102. Дальнейшие примеры особых случаев. 1° *Примеры несуществования производной.* Уже функция $y=|x|$ в точке $x=0$ [см. **100**] не имеет обычной, двусторонней, производной. Но интереснее пример функции

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\ (\text{при } x\neq 0),\qquad f(0)=0,$$

непрерывной и при $x=0$ [70, 5)], но не имеющей в этой точке даже односторонних производных. Действительно, отношение

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

не стремится ни к какому пределу при $\Delta x\to\pm 0$.

По графику этой функции (рис. 24) легко усмотреть, что секущая OM_1, исходящая из начальной точки O, не имеет предельного положения при стремлении M_1 к O, так что касательной к кривой в начальной точке нет (даже односторонней).

Впоследствии (во втором томе) мы познакомимся с замечательным примером функции, непрерывной при всех значениях аргумента, но ни при одном из них не имеющей производной.

2° *Примеры разрывов производной.* Если для данной функции $y=f(x)$ существует конечная производная $y'=f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка $\mathscr{X}$, то эта производная, в свою очередь, представляет собой в $\mathscr{X}$ функцию от x. В многочисленных примерах, которые нам до сих пор встречались, эта функция сама оказывалась непрерывной. Однако, это может быть и не так. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\ (\text{при } x\neq 0),\qquad f(0)=0.$$

Если $x\neq 0$, то ее производная вычисляется обычными методами:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

но полученный результат неприложим при $x=0$. Обращаясь в этом случае непосредственно к самому определению понятия производной, будем иметь

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

Вместе с тем ясно, что $f'(x)$ при $x\to 0$ не стремится ни к какому пределу, так что при $x=0$ функция $f'(x)$ имеет разрыв.

То же справедливо и для любой функции

$$f(x)=x^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x}\ (\text{при } x\neq 0),\qquad f(0)=0,$$

если только $2>\alpha>1$.

В этих примерах разрывы производной оказываются второго рода. Это – не случайность: ниже [**113**] мы увидим, что разрывов первого рода, т. е. скачков, производная иметь не может.

§ 2. Дифференциал

103. Определение дифференциала. Пусть имеем функцию $y=f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и непрерывную в рассматриваемой точке x_0. Тогда приращению Δx аргумента отвечает приращение

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx. Большую важность имеет вопрос: *существует ли для* Δy *такая линейная относительно* Δx *бесконечно малая* $A \cdot \Delta x$ ($A = \text{const}$), *что их разность оказывается, по сравнению с* Δx, *бесконечно малой высшего порядка*:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

При $A \neq 0$ наличие равенства (1) показывает, что бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy и, значит, служит для последней ее главной частью, если за основную бесконечно малую взята Δx [**62**, **63**].

Если равенство (1) *выполняется, то функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой* (*при данном значении* $x = x_0$), *само же выражение* $A \cdot \Delta x$ *называется дифференциалом функции* и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

[В последнем случае, в скобках указывается исходное значение x *).]

Еще раз повторяем, что дифференциал функции характеризуется двумя свойствами: (а) он представляет линейную (однородную) функцию от приращения Δx аргумента и (б) разнится от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой порядка высшего, чем Δx.

Рассмотрим примеры.

1) Площадь Q круга радиуса r задается формулой $Q = \pi r^2$. Если радиус r увеличить на Δr, то соответствующее приращение ΔQ величины Q будет площадью кругового кольца, содержащегося между концентрическими окружностями радиусов r и $r + \Delta r$. Из выражения

$$\Delta Q = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi (\Delta r)^2$$

сразу усматриваем, что главной частью ΔQ при $\Delta r \to 0$ будет $2\pi r \cdot \Delta r$; это и есть дифференциал, dQ. Геометрически он выражает площадь прямоугольника (полученного как бы «выпрямлением» кольца) с основанием, равным длине окружности $2\pi r$, и высотой Δr.

2) Аналогично, для объема $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ шара радиуса r, при увеличении радиуса на Δr, получается приращение

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \cdot \Delta r + 4\pi r \cdot (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^3,$$

главной частью которого при $\Delta r \to 0$, очевидно, будет $dV = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$. Это — объем плоского слоя с основанием, равным поверхности шара $4\pi r^2$, и с высотой Δr; в подобный слой как бы «распластывается» слой, содержащийся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиусов r и $r + \Delta r$.

*) Здесь df как единый символ играет роль функционального обозначения.

3) Наконец, рассмотрим свободное падение материальной точки, по закону $s=\frac{gt^2}{2}$. За промежуток времени Δt, от t до $t+\Delta t$, движущаяся точка пройдет путь

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

При $\Delta t\to 0$ его главной частью будет $ds=gt\cdot\Delta t$. Вспомнив, что скорость в момент t будет $v=gt$ [90], видим, что дифференциал пути (приближенно заменяющий приращение пути) вычисляется как путь, пройденный точкой, которая в течение всего промежутка времени Δt двигалась бы именно с этой скоростью.

104. Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Легко установить теперь справедливость следующего утверждения:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ в точке x_0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная $y'=f'(x_0)$. При выполнении этого условия равенство (1) *имеет место при значении постоянной A, равном именно этой производной:*

$$\Delta y=y'_x\Delta x+o(\Delta x). \tag{1a}$$

Необходимость. Если выполняется (1), то отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

так что, устремляя Δx к 0, действительно, получаем

$$A=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x.$$

Достаточность сразу вытекает из **96**, 1° [см. там (3а)].

Итак, *дифференциал функции $y=f(x)$ всегда равен* *)

$$dy=y'_x\cdot\Delta x. \tag{2}$$

Подчеркнем здесь же, что под Δx в этом выражении мы разумеем произвольное приращение независимой переменной, т. е. произвольное число (которое часто удобно бывает считать не зависящим от x). При этом вовсе не обязательно предполагать Δx бесконечно малой; но если $\Delta x\to 0$, то дифференциал dy также будет бесконечно малой, и именно (при $y'_x\neq 0$) – главной частью

*) Легко проверить, что именно так и составлялся дифференциал во всех случаях, рассмотренных в предыдущем n°. Например, в случае 1), имеем:

$$Q=\pi r^2,\qquad Q'_r=2\pi r,\qquad dQ=2\pi r\cdot\Delta r,$$

и т. д.

бесконечно малого приращения функции Δy. Это и дает основание приближенно полагать

$$\Delta y \doteq dy, \tag{3}$$

с тем большей точностью, чем меньше Δx. Мы вернемся к рассмотрению приближенного равенства (3) в **107**.

Чтобы истолковать геометрически дифференциал dy и его связь с приращением Δy функции $y=f(x)$, рассмотрим график этой функции (рис. 44). Значением x аргумента и y функции определится точка M на кривой. Проведем в этой точке кривой касательную MT; как мы уже видели [**92**], ее угловой коэффициент, $\operatorname{tg}\alpha$, равен производной y'_x. Если абсциссе x придать приращение Δx, то ордината кривой y получит приращение $\Delta y = NM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение NK. Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника MNK, найдем:

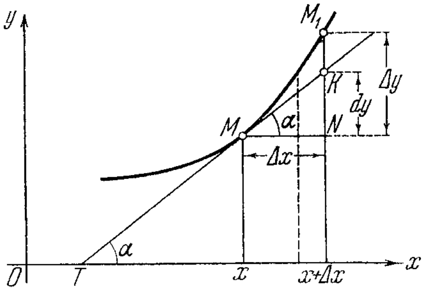

Рис. 44.

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

Итак, в то время как Δy есть приращение ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

В заключение остановимся на самой независимой переменной x: ее дифференциалом называют именно приращение Δx, т. е. условно полагают

$$dx = \Delta x. \tag{4}$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y=x$ (в этом – тоже своего рода соглашение!), то формулу (4) можно и доказать, ссылаясь на (2): $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Учитывая соглашение (4), можно теперь переписать формулу (2), дающую определение дифференциала, в виде

$$dy = y'_x \cdot dx \tag{5}$$

– так ее обычно и пишут.

Отсюда получается

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

так что выражение, которое мы раньше рассматривали как цельный символ, теперь можно трактовать как дробь. То обстоятельство, что слева здесь стоит вполне определенное число, в то время как справа мы имеем отношение двух неопределенных чисел dy и dx (ведь $dx = \Delta x$ произвольно), не должно смущать читателя: числа dx и dy изменяются пропорционально, причем производная y'_x как раз является коэффициентом пропорциональности.

Понятие дифференциала и самый термин «дифференциал» *) принадлежат Лейбницу, который не дал, однако, точного определения этого понятия. Наряду с дифференциалами, Лейбниц рассматривал и «дифференциальные частные», т. е. частные двух дифференциалов, что равносильно нашим производным; однако именно дифференциал был для Лейбница первоначальным понятием. Со времени Коши, который своей теорией пределов создал фундамент для всего анализа и впервые отчетливо определил производную как предел, стало обычным отправляться именно от производной, а понятие дифференциала строить уже на основе производной.

105. Основные формулы и правила дифференцирования. Вычисление дифференциалов функций носит название дифференцирования **). Так как дифференциал dy лишь множителем dx отличается от производной y'_x, то по таблице производных для элементарных функций [95] легко составить таблицу дифференциалов для них:

1.	$y = c$	$dy = 0$
2.	$y = x^\mu$	$dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$
	$y = \dfrac{1}{x}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
	$y = \sqrt{x}$	$dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$y = a^x$	$dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$
	$y = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
4.	$y = \log_a x$	$dy = \dfrac{\log_a e \cdot dx}{x}$
	$y = \ln x$	$dy = \dfrac{dx}{x}$
5.	$y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
6.	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
7.	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \sec^2 x \cdot dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

*) От латинского слова differentia, означающего «разность».

**) Впрочем, тем же термином обычно обозначают и вычисление производных, для которого на русском языке нет особого термина. В большинстве иностранных языков для обозначения этих операций существуют два различных термина; например, по-французски различают «dérivation» и «différentiation».

8. $y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad dy = -\csc^2 x \cdot dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

9. $y = \arcsin x$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y = \arccos x$ $\qquad dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$

12. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

Правила дифференцирования*) выглядят так:

I. $d(cu) = c \cdot du$,

II. $d(u \pm v) = du \pm dv$,

III. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$,

IV. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Все они легко получаются из соответствующих правил для производных. Докажем, например, два последних:

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v')\, dx =$$
$$= v \cdot (u' \cdot dx) + u \cdot (v' \cdot dx) = v \cdot du + u \cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx = \frac{v \cdot (u' \cdot dx) - u \cdot (v' \cdot dx)}{v^2} =$$
$$= \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

106. Инвариантность формы дифференциала. Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то – по правилу V [98] – существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{7}$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (5). Перейдем теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

*) Если речь идет именно о вычислении дифференциалов.

Заменяя, однако, производную y'_t ее выражением (7) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t \, dt = y'_x \cdot dx,$$

т. е. вернемся к прежней форме дифференциала!

Таким образом, мы видим, что *форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.* Мы всегда имеем право писать дифференциал y в форме (5), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство и называют инвариантностью формы дифференциала.

Так как из формулы (5) непосредственно получается формула (6), выражающая производную y'_x через дифференциалы dx и dy, то и последняя формула сохраняет силу, по какой бы независимой переменной (конечно, одной и той же в обоих случаях) ни были вычислены названные дифференциалы.

Пусть, например, $y = \sqrt{1-x^2}\,(-1<x<1)$, так что

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положим теперь $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, и мы будем иметь: $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t \cdot dt$. Легко проверить, что формула

$$y'_x = \frac{-\sin t \cdot dt}{\cos t \cdot dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

дает лишь другое выражение для вычисленной выше производной.

Этим обстоятельством особенно удобно пользоваться в случаях, когда зависимость y от x не задана непосредственно, а вместо этого задана зависимость обеих переменных x и y от некоторой третьей, вспомогательной, переменной (называемой параметром):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t). \tag{8}$$

Предполагая, что обе эти функции имеют производные и что для первой из них существует обратная функция $t = \theta(x)$, имеющая производную [**83**, **94**], легко видеть, что тогда и y оказывается функцией от x:

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x), \tag{9}$$

для которой также существует производная. Вычисление этой производной может быть выполнено по указанному выше правилу:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{10}$$

не восстанавливая непосредственной зависимости y от x.

Например, если $x=\sin t$, $y=\cos t \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$, то производную y'_x можно определить, как это сделано выше, не пользуясь вовсе зависимостью $y=\sqrt{1-x^2}$.

Если рассматривать x и y как прямоугольные координаты точки на плоскости, то уравнения (8) каждому значению параметра t ставят в соответствие некоторую точку, которая с изменением t описывает кривую на плоскости. Уравнения (8) называются параметрическими уравнениями этой кривой.

В случае параметрического задания кривой, формула (10) позволяет непосредственно по уравнениям (8) установить угловой коэффициент касательной, не переходя к заданию кривой уравнением (9); именно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11}$$

Замечание. Возможность выражать производную через дифференциалы, взятые по любой переменной, в частности, приводит к тому, что формулы

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

выражающие в лейбницевых обозначениях правила дифференцирования обратной функции и сложной функции, становятся простыми алгебраическими тождествами (поскольку все дифференциалы здесь могут быть взяты по одной и той же переменной). Не следует думать, впрочем, что этим дан новый вывод названных формул: прежде всего, здесь не доказывалось существование производных слева, главное же – мы существенно пользовались инвариантностью формы дифференциала, которая сама есть следствие правила V.

107. Дифференциалы как источник приближенных формул. Мы видели, что при $\Delta x\to 0$ дифференциал dy функции y (если только $y'_x\neq 0$) представляет собой главную часть бесконечно малого приращения функции Δy. Таким образом, $\Delta y\sim dy$, так что

$$\Delta y\doteq dy, \tag{3}$$

или подробнее

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{3a}$$

с точностью до бесконечно малой высшего порядка, чем Δx. Это значит [62], что относительная погрешность этого равенства становится сколь угодно малой при достаточно малом Δx.

Рассмотрим простой пример: пусть $y=x^3$. Тогда

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot\Delta x^2+\Delta x^3,$$

и линейной частью Δy (как мы это выше установили в общем виде), действительно, является дифференциал $dy=3x_0^2\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$. Положим конкретно $x_0=2{,}3$; если взять $\Delta x=0{,}1$, то будем иметь $\Delta y=2{,}4^3-2{,}3^3=1{,}657$ и $dy=3\cdot2{,}3^2\cdot0{,}1=1{,}587$, так что погрешность от замены первого числа вторым будет 0,070, а относительная погрешность превысит $4^0/_0$. При $\Delta x=0{,}01$ получим $\Delta y=0{,}159391$ и $dy=0{,}1587$, что дает относительную погрешность, уже меньшую $0{,}5^0/_0$; при $\Delta x=0{,}001$ – относительная погрешность меньше $0{,}05^0/_0$ и т. д.

Подобное же обстоятельство может быть и непосредственно усмотрено из рис. 44, дающего геометрическое истолкование дифференциала. На графике видно, что при уменьшении Δx мы, действительно, все с большей относительной точностью можем заменять приращение ординаты кривой приращением ординаты касательной.

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит, как ясно читателю, в том, что dy зависит от Δx линейно, в то время как Δy представляет собою обыкновенно более сложную функцию от Δx.

Если положить $\Delta x=x-x_0$ и $x_0+\Delta x=x$, то равенство (3а) примет вид

$$f(x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

или

$$f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

По этой формуле, для значений x, близких к x_0, функция $f(x)$ приближенно заменяется линейной функцией. Геометрически это соответствует замене участка кривой $y=f(x)$, примыкающего к точке $(x_0, f(x_0))$, отрезком касательной к кривой в этой точке:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)\ ^{*)}$$

(ср. рис. 44). Взяв для простоты $x_0=0$ и ограничиваясь малыми значениями x, будем иметь приближенную формулу:

$$f(x)\doteq f(0)+f'(0)\cdot x.$$

*) Действительно, уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0, y_0), будет

$$y=y_0+k(x-x_0);$$

в случае касательной здесь следует положить $y_0=f(x_0)$, $k=f'(x_0)$.

Отсюда, подставляя вместо $f(x)$ различные элементарные функции, легко получить ряд формул:

$$(1+x)^{\mu} \doteq 1+\mu x, \quad \text{в частности,} \quad \sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x,$$

$$e^{x} \doteq 1+x, \quad \ln(1+x) \doteq x, \quad \sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x, \quad \text{и т. п.}$$

(из которых многие нам уже известны).

Приведем примеры приближенных формул другого типа, также имеющих своим источником равенство (3).

1) Если длину тяжелой нити (провода, каната, ремня), подвешенной за оба конца, обозначить через $2s$, пролет — через $2l$, а стрелу провеса — через f (рис. 45), то для вычисления s часто пользуются (приближенной) формулой

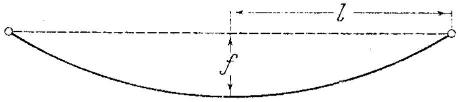

Рис. 45.

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right).$$

Величину f здесь будем считать независимой переменной, а s — функцией от f. Требуется установить связь между изменением Δs длины s и изменением Δf стрелы провеса f.

Заменяя Δs на ds, получим

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3}\,\frac{f}{l}\cdot\Delta f, \quad \text{откуда} \quad \Delta f \doteq \frac{3}{4}\,\frac{l}{f}\cdot\Delta s.$$

Если, например, учесть изменение длины провода от изменения температуры или нагрузки, то отсюда можно предусмотреть и изменение стрелы провеса.

2) Известно, что круговой ток (рис. 46) действует на единицу так называемого «магнитного заряда», помещенную на его оси на расстоянии x от центра O, с силой

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

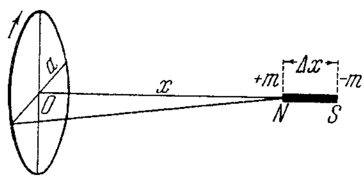

Рис. 46.

где k — постоянный коэффициент, a — радиус. Найти выражение для силы, с какой круговой ток будет действовать на магнит NS длины Δx, расположенный по оси тока. При этом будем считать, что в полюсе N сосредоточен положительный «магнитный заряд» m, а в полюсе S — равный ему отрицательный «магнитный заряд» — m.

Общая сила F действия тока на магнит выразится так:

$$F=\frac{km}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{km}{[a^2+(x+\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}}=-km\cdot\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Заменяя приращение функции (в предположении, что Δx мало) ее дифференциалом, получим

$$F \doteq -km\cdot d\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=3k\cdot m\,\Delta x\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

108. Применение дифференциалов при оценке погрешностей. Особенно удобно и естественно использовать понятие дифференциала в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, величину x мы измеряем или вычисляем непосредственно, а зависящую от нее величину y определяем по формуле: $y=f(x)$. При измерении величины x обыкновенно вкрадывается погрешность, Δx, которая влечет за собою погрешность Δy для величины y. Ввиду малой величины этих погрешностей, полагают

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

т. е. заменяют приращение дифференциалом. Пусть δx будет максимальной абсолютной погрешностью величины x: $|\Delta x| \leqslant \delta x$ (в обычных условиях подобная граница погрешности при измерении известна). Тогда, очевидно, за максимальную абсолютную погрешность (границу погрешности) для y можно принять

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x. \tag{12}$$

1) Пусть, например, для определения объема шара сначала (с помощью штангенциркуля, толщемера, микрометра и т. п.) непосредственно измеряют диаметр D шара, а затем объем V вычисляют по формуле

$$V = \frac{\pi}{6} D^3.$$

Так как $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, то в этом случае, в силу (12),

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

Разделив это равенство на предыдущее, получим

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

так что (максимальная) относительная погрешность вычисленного значения объема оказывается втрое большей, чем (максимальная) относительная погрешность измеренного значения диаметра.

2) Если число x, для которого вычисляется его десятичный логарифм $y=\log x$, получено с некоторой погрешностью, то это отразится на логарифме, создавая и в нем погрешность.

Здесь $y'_x = \frac{M}{x}$ ($M \doteq 0{,}4343$), так что, по формуле (12),

$$\delta y = 0{,}4343 \cdot \frac{\delta x}{x}.$$

Таким образом, (максимальная) абсолютная погрешность логарифма просто определяется по (максимальной) относительной погрешности самого числа, и обратно.

Этот результат имеет многообразные применения. Например, с его помощью можно составить себе представление о точности обыкновенной логарифмической линейки, со шкалой в 25 *см* = 250 *мм*. При отсчете или установке визира можно ошибиться, примерно, на 0,1 *мм* в ту или другую сторону, что отвечает погрешности в логарифме

$$\delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}0004.$$

Отсюда, по нашей формуле,

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0{,}0004}{0{,}4343} = 0{,}00092\ldots \doteq 0{,}001.$$

Относительная точность отсчетов во всех частях шкалы одна и та же!

3) При вычислении угла φ по логарифмо-тригонометрическим таблицам встает вопрос, какими таблицами выгоднее пользоваться – таблицами синусов или тангенсов. Положим

$$y_1 = \log\sin\varphi \quad \text{и} \quad y_2 = \log\operatorname{tg}\varphi$$

и будем считать максимальные погрешности δy_1 и δy_2 равными (скажем, половине последнего знака мантиссы). Если обозначить соответствующие максимальные погрешности в угле φ через $\delta_1\varphi$ и $\delta_2\varphi$, то, как и выше, получим:

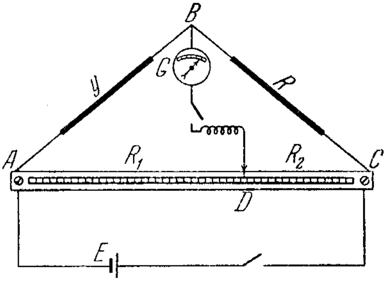

Рис. 47.

$$\delta y_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\delta_1\varphi,$$

$$\delta y_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi\cdot\delta_2\varphi,$$

так что

$$\delta_2\varphi = \delta_1\varphi\cdot\cos^2\varphi < \delta_1\varphi.$$

Таким образом оказывается, что при одинаковых ошибках в логарифме таблица тангенсов дает меньшую погрешность в угле, чем таблица синусов, и, стало быть, является более выгодной *).

4) В качестве последнего примера рассмотрим вопрос о точности измерения неизвестного сопротивления y с помощью мостика Уитстона (рис. 47). При этом подвижной контакт D передвигается по градуированной линейке AC до тех пор, пока гальванометр G не покажет отсутствие тока. Сопротивление y определяется по формуле

$$y = \frac{Rx}{a-x}, \tag{13}$$

где $a = AC$, $x = AD$, R – известное сопротивление ветви BC.

По формуле (12) получается:

$$\delta y = \left(\frac{Rx}{a-x}\right)'_x\cdot\delta x = \frac{aR}{(a-x)^2}\cdot\delta x;$$

если разделить почленно это равенство на равенство (13), то получим выражение (максимальной) относительной погрешности для y;

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{a\cdot\delta x}{x(a-x)}.$$

Так как знаменатель $x(a-x)$ достигает своего наибольшего значения при $x = \frac{a}{2}$ **), а погрешность δx при измерении длины можно считать не зависящей

---

*) При этих выкладках мы предполагали углы выраженными в радианах, но результаты, очевидно, справедливы безотносительно к тому, какой единицей измеряются углы.

**) Из очевидного неравенства

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

непосредственно получаем

$$x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4},$$

что и доказывает наше утверждение.

от x, то наименьшее значение для относительной погрешности достигается именно при $x=\frac{a}{2}$. Поэтому обыкновенно, для получения возможно точного результата, сопротивление R (с помощью магазина сопротивлений) устанавливается с таким расчетом, чтобы ток исчезал при положении контакта D, возможно более близком к середине линейки AC.

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

109. Теорема Ферма. Знание производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$. Вопросам этого рода и будут, в сущности, посвящены настоящий параграф и следующие за ним.

Предварительно докажем простую лемму:

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0. Если эта производная $f'(x_0)>0$ $[f'(x_0)<0]$, то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, будет $f(x)>f(x_0)$ $[f(x)<f(x_0)]$, а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, будет $f(x)<f(x_0)$ $[f(x)>f(x_0)]$.*

Иными словами этот факт выражают так: *функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает (убывает)*. Если имеется в виду односторонняя производная, например, справа, то сохраняет силу лишь утверждение о значениях x, лежащих справа от x_0.

Доказательство. По определению производной,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Если $f'(x_0)>0$ (ограничимся этим случаем), то, в силу **55**, 2°, найдется такая окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0, в которой (при $x\neq x_0$)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Пусть сначала $x_0<x<x_0+\delta$, так что $x-x_0>0$; из предыдущего неравенства следует тогда, что $f(x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x)>f(x_0)$. Если же $x_0-\delta<x<x_0$ и $x-x_0<0$, то, очевидно, и $f(x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x)<f(x_0)$. Лемма доказана.

Теорема Ферма. (P. Fermat) *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(c)$ в этой точке, то необходимо $f'(c)=0$* *).

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке c. Предположение, что $f'(c)\neq 0$,

*) Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приема, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной).