13) Аналогично может быть установлено (при $x>1$) тождество:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1+\frac{1}{7^x}\right)\left(1+\frac{1}{11^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1\pm\frac{1}{p_{k+1}^x}\right)\cdot\ldots}=1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\frac{1}{7^x}+\frac{1}{9^x}-\ldots,$$

где знак плюс или минус в знаменателе левой части берется в зависимости от того, будет ли (нечетное) простое число вида $4n-1$ или $4n+1$.

§ 7. Разложения элементарных функций

403. Разложение функции в степенной ряд; ряд Тейлора. Мы уже рассматривали в **379** степенные ряды вида:

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

расположенные по степеням x. Если исключить «всюду расходящиеся» ряды, то для каждого такого ряда существует *промежуток сходимости* с центром в точке $x=0$, от $-R$ до R, где *радиус сходимости* $R>0$, но может быть и бесконечным. Концы этого промежутка включаются или нет, смотря по случаю.

Рассматривают и степенные ряды более общего вида:

$$\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \ldots + a_n (x-x_0)^n + \ldots, \tag{2}$$

расположенные по степеням двучлена $x-x_0$ (вместо x). Такой ряд не разнится существенно от ряда вида (1), ибо приводится к нему простой заменой переменной: $x-x_0=y$ (с точностью до *обозначения* переменной). Для ряда (2) – если он не будет «всюду расходящимся» – также существует *промежуток сходимости*, но на этот раз с центром в точке x_0, от x_0-R до x_0+R. Концы его, как и в случае ряда (1), могут принадлежать, но могут и не принадлежать промежутку.

В последующих параграфах мы детально изучим свойства степенных рядов, которые во многом уподобляются многочленам. Отрезками степенного ряда являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. В связи со всем этим приобретает большую важность вопрос о возможности наперед заданную функцию разложить по степеням $x-x_0$ (в частности, по степеням x), т. е. представить ее в виде суммы ряда типа (2) или (1).

Мы займемся здесь подобным разложением по отношению к элементарным функциям, причем путь к решению поставленного вопроса нам открывает формула *Тейлора*, подробно изученная в **124 – 126**. В самом деле, предположим, что рассматриваемая функция $f(x)$ в промежутке $[x_0, x_0+H]$ или $[x_0-H, x_0]$ $(H>0)$ имеет производные всех порядков (тем самым – непрерывные). Тогда, как мы видели в **126**, для всех значений x в этом промежутке имеет место формула

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+(x-x_0)^n+r_n(x), \qquad (3)$$

где дополнительный член $r_n(x)$ может быть представлен в одной из указанных в n° **126** форм. При этом n мы можем брать сколь угодно большим, т. е. доводить это разложение до сколь угодно высоких степеней $x-x_0$.

Это естественно приводит к мысли о бесконечном разложении:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (4)$$

Такой ряд – независимо от того, сходится ли он и имеет ли, на самом деле, своей суммой $f(x)$, – называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$. Он имеет вид (2), причем коэффициенты его:

$$a_0=f(x_0), \quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a=\frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

носят название коэффициентов Тейлора.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $n+1$ членов ряда Тейлора, ввиду (3), есть как раз $r_n(x)$, то, очевидно: *для того чтобы при некотором значении x действительно имело место разложение* (4), *необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $r_n(x)$ формулы Тейлора – при этом значении x – стремился к* 0 *с возрастанием n*:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \qquad (5)$$

При исследовании вопроса, имеет ли место это равенство и при каких именно значениях x, нам и будут полезны различные формы дополнительного члена $r_n(x)$, выявляющие его зависимость от n.

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0=0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\,*; \qquad (6)$$

---

* Этот ряд обыкновенно называют рядом Маклорена; см. сноски на стр. 247 и 251 первого тома.

этот ряд имеет вид (1), с коэффициентами:

$$a_0=f(0),\qquad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\qquad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots \tag{7}$$

Выпишем теперь подробнее дополнительный член $r_n(x)$ применительно именно к этому частному предположению: $x_0=0$ **[126]**

$$\text{в форме Лагранжа:}\quad r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{8}$$

$$\text{в форме Коши:}\quad r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}. \tag{9}$$

При этом о множителе θ известно только то, что он содержится между 0 и 1, но он может меняться при изменении x или n (и даже – при переходе от одной формы к другой).

Перейдем к конкретным разложениям.

404. Разложение в ряд показательной, основных тригонометрических функций и др. Докажем сначала следующее простое предложение, которым сразу будет охвачен ряд важных случаев:

Если функция $f(x)$ *в промежутке* $[0, H]$ *или* $[-H, 0]$ $(H>0)$ *имеет производные всех порядков, и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются по абсолютной величине ограниченными одним и тем же числом*:

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant L \tag{10}$$

(*где L не зависит от n*), *то во всем промежутке имеет место разложение* (6).

В самом деле, взяв дополнительный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа [см. (8)], имеем, в силу (10):

$$|r_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant L\cdot\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При безграничном возрастании n выражение $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к 0, как мы видели в **35**, 1); впрочем, это же [в силу **364**, 5°] следует и из сходимости ряда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

[**370**, 2) (а)]. Но в таком случае и $r_n(x)$ имеет пределом 0, что и доказывает наше утверждение.

(а) Это предложение приложимо к функциям

$$f(x)=e^x,\qquad \sin x,\qquad \cos x$$

в любом промежутке $[-H, H]$, ибо производные их, соответственно, равные

$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

будут в нем по абсолютной величине ограничены числом e^H – для функции e^x, и единицей – для $\sin x$ и $\cos x$.

Так как коэффициенты Тейлора мы уже вычисляли для этих функций в **125**, 1)–3), то можем сразу написать разложения:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \tag{11}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots, \tag{12}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+\ldots \tag{13}$$

Все они имеют место при любом значении x.

(б) Нетрудно подобным же образом получить разложения и для основных гиперболических функций, но проще, вспомнив их определение:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

вывести эти разложения путем почленного вычитания или сложения ряда (11) и следующего ряда, который из него получается заменой x на $-x$:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Таким путем мы находим:

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots,$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$$

(в) К функции $y=\operatorname{arctg} x$ доказанное вначале предложение уже не приложимо. Действительно, общее выражение для ее n-й производной, найденное в **116**, 8):

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

не гарантирует существования общей границы для всех $y^{(n)}$.

Так как соответствующий ряд Тейлора [см. **125**, 6)]:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots$$

сходится лишь в промежутке $[-1, 1]$*, то вне этого промежутка не приходится уже говорить о выражении функции $\operatorname{arctg} x$ этим рядом. Наоборот, для $|x| \leqslant 1$ имеем по формуле Лагранжа (8) [с учетом (14)]:

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1)\left(y_0+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

где $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$. Отсюда ясно, что $r_n(x) \to 0$, так что для всех значений x в промежутке $[-1, 1]$ имеет место разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots \tag{15}$$

Мы еще раз подчеркиваем, что хотя $\operatorname{arctg} x$ и вне этого промежутка имеет определенный смысл, но разложение (15) там уже не действительно, поскольку ряд не имеет суммы.

Из ряда (15) при $x=1$, в частности, получается знаменитый ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \ldots \tag{16}$$

– первый ряд, дающий разложение числа π.

405. Логарифмический ряд. Если в качестве функции $f(x)$ взять $\ln(1+x)$ $(x > -1)$, то соответствующий ряд Тейлора будет таков [**125**, 5)]:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Он сходится лишь для значений x в промежутке $(-1, 1]$**; значит, только для этих значений и имеет смысл исследовать поведение дополнительного члена $r_n(x)$.

Возьмем его сначала в форме Лагранжа (8). Так как

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[**116**, 2)] то

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то последний множитель не превосходит единицы, и отсюда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{так что } r_n(x) \to 0 \text{ (при } n \to \infty).$$

---

* По признаку Даламбера [**377**] легко убедиться, что ряд (абсолютно) сходится, если $|x| < 1$, и расходится при $|x| > 1$. Сходимость (неабсолютная) при $x = \pm 1$ вытекает из теоремы Лейбница [**381**].

** Ср. предыдущую сноску; при $x = -1$ получается (с точностью до знака) расходящийся гармонический ряд.

Но при $x<0$ поведение этого множителя становится неясным, и приходится прибегнуть к форме Коши дополнительного члена [см. (9)].

Имеем

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1),$$

так что

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Так как при $x>-1$ будет $1+\theta x>1-\theta$, то последний множитель меньше единицы; следовательно, лишь только $|x|<1$, заведомо $r_n(x)\to 0$.

Любопытно, что хотя форма Коши вполне исчерпывает вопрос для всех значений x между -1 и 1, она ничего не дает при $x=1$; в этом случае мы получаем

$$|r_n(1)|<(1-\theta)^n,$$

но ввиду возможности для θ меняться вместе с n, нельзя заключить о том, что $(1-\theta)^n\to 0$.

Итак, по совокупности для всех значений x в промежутке $(-1, 1]$ действительно будет

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{17}$$

В частности, при $x=1$ получаем уже знакомый нам ряд

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{18}$$

Из ряда (17) можно вывести и другие полезные разложения. Например, заменяя в нем x на $-x$ и вычитая полученный ряд почленно из ряда (17) (при этом мы считаем $|x|<1$), придем к следующему ряду:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\ldots\right). \tag{19}$$

406. Формула Стирлинга. В качестве приложения покажем, как с его помощью может быть выведена одна важная формула анализа, носящая имя Стирлинга (J. Stirling).

Возьмем в (19) $x=\dfrac{1}{2n+1}$, где n – произвольное натуральное число. Так как тогда

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}=\frac{n+1}{n},$$

то мы получим разложение

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right],\qquad(20)$$

которое можно переписать в виде:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots$$

Это выражение, очевидно, больше единицы, но меньше, чем

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Итак, имеем:

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

откуда, потенцируя, найдем

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Введем теперь варианту $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

и из предыдущих неравенств следует, что

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

так что, с одной стороны, $a_n>a_{n+1}$, с другой же,

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким образом с возрастанием n варианта a_n убывает (оставаясь ограниченной снизу, например, нулем) и стремится к конечному пределу a, варианта же $a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}$ возрастает, стремясь, очевидно, к тому же пределу a $\left(\text{ибо } e^{-\frac{1}{12n}}\to 1\right)$. Так как при любом n выполняются неравенства

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

то найдется такое число θ, заключенное между нулем и единицей, что

$$a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\quad\text{или}\quad a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(Заметим, что число θ, вообще говоря, зависит от n). Вспоминая определение переменной a_n, находим:

$$n! = a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0<\theta<1). \tag{21}$$

Остается теперь определить величину постоянной a. С этой целью вспомним формулу Валлиса [317], которую можно записать в виде:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Выражение в скобках преобразуем следующим образом:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{2n!};$$

подставив сюда вместо $n!$ его выражение по формуле (21), а вместо $2n!$ аналогичное выражение

$$2n! = a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot e^{\frac{\theta'}{24n}} \qquad (0<\theta'<1),$$

после элементарных упрощений получим

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}},$$

так что

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\cdot\frac{n}{2}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда:

$$a^2 = 2\pi \quad \text{и} \quad a = \sqrt{2\pi}.$$

Подставляя это значение a в формулу (21), мы и придем к *формуле Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0<\theta<1),$$

которая позволяет легко оценивать величину факториала $n!$ при больших значениях n.

Для упражнения предлагаем читателю фактически найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right],$$

сходимость которого была доказана в n° 367, 9) (б).

Указание. Вычислить n-ю частичную сумму и, преобразовав ее с помощью формулы Стирлинга, перейти к пределу. *Отв.* $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

407. Биномиальный ряд. Возьмем, наконец, $f(x)=(1+x)^m$, где m – любое вещественное число, отличное от 0 и от всех натуральных чисел (при натуральном m получается известное конечное разложение по формуле Ньютона). В этом случае ряд Тейлора имеет вид [125, 4)]:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots;$$

его называют биномиальным рядом, а коэффициенты его — биномиальными коэффициентами. При сделанных относительно m предположениях ни один из этих коэффициентов не будет нулем (наоборот, если бы m было натуральным числом, то коэффициент при x^{m+1} и все следующие обратились бы в нуль). С помощью признака Даламбера [377] легко установить, что при $|x|<1$ биномиальный ряд (абсолютно) сходится, а при $|x|>1$ расходится. Исследование дополнительного члена $r_n(x)$ мы будем производить в предположении, что $|x|<1$, причем сразу возьмем его в форме Коши (9) (форма Лагранжа и здесь дает ответ не при всех значениях x).

Так как

$$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

то будем иметь:

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Представим его, перегруппировав множители, в виде:

$$r_n(x)=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(\overline{m-1}-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Первое из этих трех выражений представляет собой общий член биномиального же ряда, но отвечающего показателю $m-1$; так как при $|x|<1$ биномиальный ряд сходится, каков бы ни был показатель, то это выражение при $a\to\infty$ стремится к нулю. Что же касается двух других выражений, то второе по абсолютной величине содержится между границами

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \quad \text{и} \quad |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1},$$

не зависящими от n, а третье, как и в **405**, меньше единицы. Таким образом, $r_n(x)\to 0$, т. е. для $|x|<1$ имеет место разложение

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots, \tag{22}$$

которое также связано с именем Ньютона.

Мы не рассматривали вопроса о применимости его при значениях $x=\pm 1$. Легко сообразить, что биномиальный ряд есть частный случай гипергеометрического ряда и получается из последнего при $\alpha=-m$, $\beta=\gamma$ и замене x на $-x$. Вследствие этого, по таблице в **402**, 8), легко составить такую таблицу, характеризующую поведение биномиального ряда на концах $x=\pm 1$ его промежутка сходимости:

$x=1$	$m>0$ $0>m>-1$ $m\leqslant -1$	абс. сходится неабс. сходится расходится
$x=-1$	$m>0$ $m<0$	абс. сходится расходится

Можно показать, что всякий раз, когда биномиальный ряд сходится, его суммой будет $(1+x)^m$. Здесь мы на этом не останавливаемся, желая избежать кропотливого исследования дополнительного члена, так как этот результат просто вытекает из одной общей теоремы, которая будет доказана ниже [см. **437**, 6°].

Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда, отвечающие, например, $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot x^n+\ldots \qquad (-1<x<1)$$

(обыкновенная геометрическая прогрессия), затем,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\ldots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (23)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n+\ldots \qquad (-1<x\leqslant 1). \qquad (24)$$

Важно подчеркнуть, что в случае рационального m сумма биномиального ряда дает всегда *арифметическое* значение радикала.

Замечания. I. На этом построено, например, следующее любопытное разложение, принадлежащее Шлёмильху (O. Schlömilch). Прежде всего, полагая в (23) $x=-y^2$, где $-1\leqslant y\leqslant 1$, получим, что

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}y^{2n-1}.$$

А затем, вместо y подставим сюда выражение $\frac{2z}{1+z^2}$, где z изменяется уже между $-\infty$ и $+\infty$. Окажется, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n-1}=\begin{cases} z, & \text{если } |z|\leqslant 1,\\ \frac{1}{z}, & \text{если } |z|\geqslant 1.\end{cases}$$

Этот пример интересен тем, что для функции, определяемой в разных промежутках различными аналитическими выражениями z и $\frac{1}{z}$, дается в то же время и единое аналитическое выражение – в виде суммы ряда [ср. **46**; **363**, 5)].

II. Во всех рассмотренных выше примерах разложения функций в ряд Тейлора выходило так, что для всех значений x, при которых ряд сходился, его сумма равнялась той функции, для которой ряд был построен. Поэтому у читателя могло возникнуть подозрение, что вообще достаточно установить сходимость ряда, даже не проверяя соотношения (5), чтобы было обеспечено разложение (4) или (6).

На деле, однако, это не так. Если, например, вернуться к функции, рассмотренной в замечании n° **138**:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{при } x\neq 0), \qquad f(0)=0,$$

то для нее, как мы видели, существуют даже при $x=0$ производные всех порядков, но все в этой точке обращаются в нуль. Ряд Тейлора вида (6) со сплошь нулевыми коэффициентами, конечно, сходится везде, но ни при одном значении x (кроме $x=0$) не воспроизводит значения исходной функции.

408. Разложение синуса и косинуса в бесконечные произведения. Мы познакомились выше с разложениями важнейших элементарных функций в бесконечные ряды, расположенные по степеням x, т. е. с представлением этих функций в виде «бесконечных многочленов». В заключение этого параграфа мы представим функции $\sin x$ и $\cos x$ в виде бесконечных произведений, которые как бы осуществляют разложение на множители соответствующих «бесконечных многочленов».

Начнем с вывода одной вспомогательной формулы. Известна из алгебры *формула Моавра**:

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\cdot\sin mz,$$

где m будем считать натуральным числом. Раскрыв слева скобки – по обычному правилу – и приравняв слева и справа коэффициенты при «мнимой единице» $i=\sqrt{-1}$, получим

$$\sin mz=m\cos^{m-1}z\cdot\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos^{m-3}z\cdot\sin^3 z+\ldots$$

Если $m=2n+1$ нечетно, то, заменяя четные степени косинуса по формуле $\cos^{2k}z=(1-\sin^2 z)^k$, мы представим результат в виде:

$$\sin(2n+1)z=\sin z\cdot P(\sin^2 z), \tag{25}$$

где $P(u)$ есть целый многочлен n-й степени.

Этот многочлен, если через $u_1, u_2, \ldots, u_n$ обозначить его корни, можно следующим образом разложить на множители

$$P(u)=a(u-u_1)\ldots(u-u_n)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

Корни $u_1, u_2, \ldots, u_n$ легко определить из (25), заметив, что если z обращает в нуль $\sin(2n+1)z$, но оставляет $\sin z$ отличным от нуля, то $\sin^2 z$ необходимо будет корнем многочлена $P(u)$. Очевидно, значениям $z=\frac{\pi}{2n+1}, 2\frac{\pi}{2n+1}, \ldots, n\frac{\pi}{2n+1}$, содержащимся между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и идущим в порядке возрастания, отвечают возрастающие

* См., например, ниже, **453**.

же (следовательно, различные) корни:

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\qquad u_2=\sin^2 2\frac{\pi}{2n+1},\quad \ldots,\qquad u_n\ \sin^2 n=\frac{\pi}{2n+1}.$$

Наконец, коэффициент $A=P(0)$ определяется, как предел отношения $\sin(2n+1)z/\sin z$ при $z\to 0$; отсюда $A=2n+1$.

Таким образом, приходим к формуле

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\dfrac{\pi}{2n+1}}\right).$$

Полагая $z=\dfrac{x}{2n+1}$, перепишем ее так:

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\dfrac{\pi}{2n+1}}\right).\tag{26}$$

Будем считать x отличным от 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\ldots$, так что $\sin x\neq 0$. Возьмем натуральное число k под условием: $(k+1)\pi>|x|$, и пусть n будет $>k$. Представим теперь $\sin x$ в виде произведения:

$$\sin x=U_k^{(n)}\cdot V_k^{(n)},\tag{27}$$

где

$$U_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

содержит лишь k множителей в скобках, а

$$V_k^{(n)}=\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1)\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

охватывает все остальные.

Пусть k пока фиксировано; легко найти предел $U_k^{(n)}$ при $n\to\infty$, поскольку это выражение состоит из определенного конечного числа сомножителей. Так как

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\dfrac{\pi}{2n+1}}=\frac{x^2}{h^2\pi^2}\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

то

$$U_k=\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Ввиду (27), существует и предел

$$V_k = \lim_{n\to\infty} V_k^{(n)}, \qquad \text{причем } \sin x = U_k \cdot V_k.$$

Займемся оценкой предела V_k.

Известно, что для $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi$$

[**54**, (9); **133**, 1)]. Поэтому

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

и

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \qquad (h=k+1, \ldots, n),$$

так что

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right). \tag{28}$$

Бесконечное произведение

$$\prod_{h=h_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(где h_0 выбрано так, чтобы было $4h_0^2>x^2$) сходится, ибо сходится ряд $\sum_{h=h_0}^{\infty}\frac{x^2}{4h^2}$ [теорема 5°, **401**]. Поэтому остаточное произведение

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

при $k\to\infty$ должно стремиться к 1 [**401**, 2°]. Очевидно, мы лишь усилим второе из неравенств (28), если напишем

$$1 > V_k^{(n)} > \bar{V}_k;$$

переходя (при фиксированном k) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$1 > V_k \geqslant \bar{V}_k.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} V_k = 1, \qquad \text{так что} \qquad \lim_{k\to\infty} U_k = \sin x,$$

и мы приходим, окончательно, к замечательному разложению:

$$\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots, \tag{29}$$

впервые установленному Эйлером.

Оно имеет место, разумеется, и для исключенных ранее значений $x=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ..., ибо тогда обе части этого равенства суть нули. Легко видеть, что отдельные множители как раз и отвечают различным корням $\sin x$*.

Если в полученном разложении положить $x=\frac{\pi}{2}$, то найдем:

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right),$$

откуда снова вытекает формула Валлиса [317; ср. 400. 2)].

Укажем еще одно интересное применение этого разложения, которое, заменяя x на πx, можно представить в виде:

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Вспомним определение функции $\Gamma(x)$ [402, (13)]:

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

и соотношение $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ [там же, (15)]. Тогда

$$\Gamma(1-x)=-x\cdot\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}}.$$

Умножая, сразу приходим к так называемой *формуле дополнения*

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\tag{30}$$

также найденной Эйлером; она имеет место при любых нецелых значениях x**.

Аналогично разложению $\sin x$ выводится разложение

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right),$$

выявляющее корни $\cos x$: $\pm\frac{2n-1}{2}\pi$. Впрочем, оно может быть получено и из разложения $\sin x$, по формуле

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\text{или}\quad\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}.$$

---

* Относительно возможности переставлять сомножители — см. 402, 4).

** Положив здесь $x=\frac{1}{2}$, в частности, найдем, что $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$; так как при $x>0$ и $\Gamma(x)>0$, то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Наконец, упомянем о разложениях

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right), \tag{31}$$

которые также могут быть установлены с помощью сходных соображений.

§ 8. Приближенные вычисления с помощью рядов. Преобразование рядов

409. Общие замечания. На примере полученных нами конкретных разложений мы разъясним, как бесконечные ряды могут быть использованы для целей *приближенных вычислений*. Предпошлем ряд общих замечаний.

Если неизвестное нам число A разложено в ряд:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — легко вычисляемые (обыкновенно рациональные) числа, и мы положим приближенно:

$$A \doteq A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то *поправка* на отбрасывание всех остальных членов выразится остатком

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

При достаточно большом n эта погрешность станет сколь угодно малой, так что A_n воспроизведет A с любой наперед заданной точностью.

Мы заинтересованы в возможности просто производить *оценку* остатка α_n; это позволило бы нам и вовремя остановиться при вычислении последовательных частичных сумм, когда уже будет получено приближение требуемой точности.

Если рассматриваемый ряд оказывается знакопеременным и притом с монотонно убывающими по абсолютной величине членами («лейбницевского типа»), то, как мы видели [381, замечание], остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его. Эта оценка в смысле простоты не оставляет желать лучшего.

Несколько сложнее обстоит дело в случае положительного ряда.

Тогда обыкновенно стараются найти *легко суммируемый* положительный же ряд, члены которого были бы *больше* членов интересующего нас остатка, и оценивают остаток суммой этого ряда.

Например, для ряда $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ можно получить:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n}$$