16) Доказать, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \qquad (\alpha, \beta>0)$$

равномерно сходится относительно β, для $\beta \geqslant \beta_0>0$.

Это следует из **515**, 3°. Действительно, для $\beta \geqslant \beta_0$

$$\left|\int_0^A \sin \beta x\,dx\right| = \frac{1-\cos A\beta}{\beta} \leqslant \frac{2}{\beta_0}.$$

С другой стороны, выражение

$$\frac{x}{\alpha^2+x^2},$$

не содержащее β, убывает с возрастанием x (по крайней мере для $x \geqslant \alpha$) и стремится к 0 при $x \to +\infty$.

§ 3. Использование равномерной сходимости интегралов

518. Предельный переход под знаком интеграла. Мы займемся сейчас, главным образом, вопросом о предельном переходе под знаком интеграла, распространенного на бесконечный промежуток. Теорема 1 n° **506** на этот случай не распространяется: если даже во всем бесконечном промежутке функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ равномерно стремится к предельной функции $\varphi(x)$, предельный переход под знаком интеграла может оказаться недопустимым.

Рассмотрим, в виде примера, функцию ($n=1, 2, 3, \ldots$)

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{n}{x^3}\, e^{-\frac{n}{2x^2}} & (x>0), \\ f_n(0)=0. \end{cases}$$

Обычными методами дифференциального исчисления легко установить, что наибольшего значения эта функция достигает при $x=\sqrt{\frac{n}{3}}$ и равно оно $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\, e^{-\frac{3}{2}}$. Так как при $n \to \infty$ это значение стремится к нулю, то отсюда ясно, что функция $f_n(x)$ при $n \to \infty$ во всем промежутке $[0, +\infty)$ равномерно стремится к $\varphi(x)=0$. Тем не менее интеграл

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=1$$

при $n \to \infty$ вовсе не стремится к нулю.

Условия, достаточные для допустимости предельного перехода, даются следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ при y из $\mathcal{Y}$ интегрируема (в собственном смысле) по x в промежутке $[a, A]$ при любом $A > a$, и в каждом таком промежутке при $y \to y_0$ равномерно относительно x стремится к предельной функции $\varphi(x)$. Если, сверх того, интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \tag{1}$$

сходится равномерно относительно y (в $\mathcal{Y}$), то имеет место формула

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Положим, как и выше,

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Для этого интеграла выполнены условия теоремы 1 n° **506**, поэтому

$$\lim_{y \to y_0} F(A, y) = \int_a^A \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

С другой стороны, очевидно,

$$\lim_{A \to \infty} F(A, y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx, \tag{5}$$

причем дано, что здесь стремление функции $F(A, y)$ к своему пределу происходит равномерно относительно y. В таком случае мы имеем право сослаться на общую теорему n° **505** о перестановке предельных переходов и утверждать существование и равенство повторных пределов, что непосредственно и приводит к (2).

Отсюда, применяя обобщенную теорему Дини [**504**, 4°], можно получить такое

Следствие*. *Пусть неотрицательная функция $f(x, y)$ непрерывна по x в промежутке $[a, +\infty)$ и стремится, возрастая с возрастанием y, к предельной функции $\varphi(x)$, также непрерывной в указанном промежутке. Тогда из существования интеграла*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \tag{6}$$

* Мы считаем, что здесь все $y < y_0$.

уже вытекает как существование интеграла (1) (*при всех y из $\mathcal{Y}$*), *так и наличие формулы* (2).

По упомянутой теореме при указанных условиях стремление функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ будет равномерным относительно x в любом конечном промежутке. Далее, в силу теоремы 1 n° **474**, существует интеграл (1), так как

$$f(x, y) \leqslant \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ играет одновременно и роль мажоранты [**515**], обеспечивающей равномерную (относительно y) сходимость интеграла (1). Таким образом, соблюдены все условия для применения предыдущей теоремы.

Читатель легко докажет, что *предположение о существовании интеграла* (6) *от предельной функции может быть заменено здесь предположением о существовании конечного предела*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

– отсюда уже будет вытекать и существование интеграла (6), и наличие формулы (2).

В том же порядке идей можно получить и некоторое обобщение теоремы 1 n° **510**, относящейся к конечному промежутку.

Теорема 1'. *Пусть функция $f(x, y)$ (для y из $\mathcal{Y}$) интегрируема (в собственном смысле) в промежутке $[a, b-\eta]$, при любом $\eta > 0$ (но $< b-a$), и в каждом таком промежутке при $y \to y_0$ равномерно относительно x стремится к предельной функции $\varphi(x)$. Если, сверх того, интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

сходится (при $x = b$) равномерно относительно y в $\mathcal{Y}$, то имеет место формула

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство ничем не отличается от только что проведенного. Легко распространяется на этот случай и следствие.

Конечно, роль точки b может играть и любая другая точка промежутка. Кроме того, подобных точек в промежутке может быть и несколько.

Как и выше, с предельным переходом под знаком интеграла чаще всего приходится иметь дело применительно к последовательности функций $\{f_n(x)\}$. Переходя от последовательностей к бесконечным рядам, можно получить, таким образом, новые теоремы о почленном интегрировании функциональных рядов.

Вот, например, какую форму получает следствие:

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

состоящий из положительных непрерывных для $x \geqslant a$ (или для $a \leqslant x < b$) функций, имеет для этих значений x непрерывную же сумму $\varphi(x)$. Если последняя в промежутке $[a, +\infty]$ (или $[a, b]$) интегрируема, то в этом промежутке ряд можно интегрировать почленно. Здесь так же, как и выше, *вместо интегрируемости суммы ряда, можно было бы предположить сходимость ряда интегралов*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x)\,dx \left[\text{или } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{b} u_n(x)\,dx\right].$$

Утверждение, очевидно, остается в силе и в том случае, когда все члены ряда отрицательны: он приводится к предыдущему простым изменением знака.

519. Примеры. 1) С помощью разложения в ряд вычислить интегралы:

$$\text{(а)} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx, \qquad \text{(б)} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx.$$

Решение. (а) Разлагаем подинтегральную функцию в ряд

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \ldots,$$

все члены которого имеют отрицательный знак. Нарушается равномерность сходимости вблизи $x=1$. Эта точка и является для суммы ряда особой; тем не менее, в промежутке $[0, 1]$ сумма интегрируема. Применяя последнее предложение предыдущего n°, интегрируем почленно

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

[440 (4)].

(б) Второй интеграл подстановкой $x = 1 - z$ приводится к первому. Тем не менее, для упражнения, вычислим его заново, разлагая в ряд $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x;$$

все члены здесь тоже отрицательны. Равномерность сходимости на этот раз нарушается вблизи двух точек: $x=0$ и $x=1$, так что упомянутое предложение следует применить порознь, например к промежуткам $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Окончательно,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2) (а) Вычислить сумму ряда

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \ldots,$$

исходя из того, что

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Решение. Имеем:

$$\sigma = \sum_0^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2})\,dx = \int_0^1 dx \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{4n} \cdot (1+x^2) = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Хотя особенностей сумма ряда не имеет, но равномерная сходимость нарушается вблизи $x=1$. Так как для частичной суммы ряда имеем:

$$0 \leqslant \sum_0^{n-1} (-1)^\nu x^{4\nu} \cdot (1+x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1+x^{4n}}(1+x^2) \leqslant 2\,\frac{1+x^2}{1+x^4} \leqslant 4,$$

то в роли мажоранты оказывается просто постоянная и интеграл от этой суммы сходится (при $x=1$) равномерно относительно n. Этим оправдывается почленное интегрирование (теорема 1′).

(б) Аналогично:

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \ldots = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

3) Исходя из формулы

$$\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1}\,dx,$$

вычислить сумму ряда:

(а) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot6\cdot7} + \ldots,$

(б) $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{4\cdot5\cdot6} + \dfrac{1}{6\cdot7\cdot8} + \ldots,$

(в) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7} + \dfrac{1}{7\cdot8\cdot9\cdot10} + \ldots$

Ответ.

$$\text{(а)}\ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2}\,dx = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$\text{(б)}\ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2}\,dx = \frac{3}{4} - \ln 2,$$

$$\text{(в)}\ \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3}\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

4) Вычислить интегралы Эйлера:

$$\text{(а)}\ I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \quad \text{(б)}\ K = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx.$$
$$(0<a<1) \qquad\qquad (a, b>0)$$

Решение. (а) Разбив интеграл на два интеграла:

$$I = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2,$$

вычислим их порознь.

Для $0<x<1$ имеем разложение в ряд

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu x^{a+\nu-1},$$

который сходится равномерно, лишь если $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon'<1$. Но частичная сумма имеет интегрируемую в $[0, 1]$ мажоранту

$$0 \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu x^{a+\nu-1} = \frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x} < x^{a-1},$$

следовательно, интеграл от нее сходится равномерно (как при $x=0$, так и при $x=1$). Интегрируя почленно, по теореме 1 получим:

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^\infty \int_0^1 (-1)^\nu x^{a+\nu-1}\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu}{a+\nu}.$$

Интеграл I_2 подстановкой $x = \frac{1}{z}$ приводим к виду

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\,dx.$$

Применяя уже полученное выше разложение, найдем:

$$I_2 = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu}{a-\nu}.$$

Таким образом,

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{1}{a+\nu}+\frac{1}{a-\nu}\right).$$

Мы узнаем в этом выражении [см. **441**, 9] разложение на простые дроби функции $\frac{\pi}{\sin \pi a}$. Окончательно,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(б) Разбивая интеграл на два, как и выше, и делая во втором ту же подстановку, получим

$$K=\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx-\int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{-b}}{1-x}\,dx=K_1-K_2^*.$$

Очевидно, достаточно найти K_1. Прибегая к разложению подинтегральной функции в ряд, как и только что, найдем:

$$K_1=\frac{1}{a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+\nu}+\frac{1}{a-\nu}\right),$$

но [**441**, 9)] здесь мы узнаем разложение на простые дроби функции $\pi\cdot\operatorname{ctg}\pi a$. Итак,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx=\pi(\operatorname{ctg}\pi a-\operatorname{ctg}\pi b).$$

5) Найти значения интегралов ($|r|<1$)

$$\text{(а)}\ I_1=\int_0^{\infty}\frac{1-r\cos\beta x}{(1+x^2)(1-2r\cos\beta x+r^2)}\,dx,$$

$$\text{(б)}\ I_2=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+2r\cos\beta x+r^2)}{1+x^2}\,dx,$$

причем в обоих случаях интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos kx}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-k}\qquad(k>0)$$

считать известным [см. **522**, 4°, а также **523**, 9)].

---

* В обоих интегралах при $x=1$ особенности не будет, особая точка $x=0$; интегралы сходятся.

Решение. (а) Исходим из разложения

$$\frac{1-r\cos\beta x}{1-2r\cos\beta x+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \cos\nu\beta x\,*;$$

умножая на $\frac{1}{1+x^2}$, интегрируем почленно

$$I_1=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \int_0^\infty \frac{\cos\nu\beta x}{1+x^2}\,dx.$$

Так как исходный ряд — по умножении на дробь $\frac{1}{1+x^2}$ — сходится равномерно относительно x даже во всем бесконечном промежутке, а частичные суммы его имеют мажоранту вида $\frac{c}{1+x^2}$, то почленное интегрирование оправдано (теорема 1).

Если использовать теперь значение указанного интеграла, то окончательно получим

$$I_1=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_0^\infty r^\nu e^{-\nu\beta}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{-\beta}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^\beta}{e^\beta-r}.$$

(б) Указание. Исходить из разложения [461, 6) (б)]

$$\ln(1-2r\cos\beta x+r^2)=-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^\nu}{\nu}\cos\nu\beta x.$$

Ответ. $I_2=\pi\ln(1-re^{-\beta})$.

6) Разложить интегралы (Лаплас)

$$\text{(а)}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx,\qquad \text{(б)}\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{ch} 2bx\,dx,$$

$$\text{(в)}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

в ряды по степеням b ($b>0$), причем во всех случаях считать известным интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[492, 2°].

(а) Решение. Пользуясь известным разложением косинуса и интегрируя почленно, получаем

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\int_0^\infty e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2bx)^{2\nu}}{2\nu!}\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2b)^{2\nu}}{2\nu!}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2\nu}\,dx.$$

---

* Оно легко получается из разложений в 10) и 11) n° **440**.

Равномерная сходимость нашего ряда в любом конечном промежутке [0, A] очевидна; частичные суммы его имеют мажоранту:

$$e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2bx)^\nu}{2\nu!}=e^{-x^2}\operatorname{ch}2bx,$$

интегрируемую от 0 до ∞. Этим установлена законность почленного интегрирования.

Остается определить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2\nu}\,dx=I_\nu$. Интегрируя по частям, легко придем к рекуррентной формуле:

$$I_\nu=\frac{2\nu-1}{2}I_{\nu-1},\quad\text{откуда}\quad I_\nu=\frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu+1}}\sqrt{\pi}.$$

Подставляя это в полученное разложение, найдем окончательно:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2b)^{2\nu}}{2\nu!}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-b^2)^\nu}{\nu!}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\,*.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$.

(б) Аналогично получается разложение:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx=b\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)!!}(-2b^2)^{\nu-1},$$

но на этот раз к «конечной» формуле оно не приводит. Впоследствии, другим путем, мы выясним характер новой (уже неэлементарной) функции, которая нужна была бы для выражения нашего интеграла [523, 5) (б)].

7) Найти значение интеграла

$$I_k=\int\limits_0^\infty\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx$$

($k=1, 2, 3, \ldots$).

Решение. Разложив

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1}=\frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}$$

в прогрессию, получим положительный ряд

$$\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2k-1}\cdot e^{-2n\pi x},$$

* Мы воспользовались очевидным преобразованием:

$$2\nu!=2\nu!!(2\nu-1)!!=2^\nu\nu!(2\nu-1)!!$$

который сходится равномерно в любом промежутке $[\eta, A]$ $(0<\eta<A<+\infty]$. Так как сумма ряда интегрируема в промежутке $[0, +\infty]$, то почленное интегрирование оправдано *:

$$I_k=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2k-1}e^{-2n\pi x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k}}=\frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}.$$

Вспоминая, что k-е число Бернулли B_k имеет выражение

$$B_k=\frac{2\cdot(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

[449], окончательно получим

$$I_k=\frac{B_k}{4k}.$$

8) Найти выражение для интегралов (Лежандр):

$$\text{(а)}\ \int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx,\qquad \text{(б)}\ \int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1}\,dx\qquad (m>0).$$

Решение. (а) Разложение

$$\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu\pi x}\sin mx$$

тоже сходится равномерно в любом промежутке $[\eta, A]$, его частичные суммы мажорируются функцией $\dfrac{|\sin mx|}{e^{2\pi x}-1}$. Поэтому допустимо почленное интегрирование:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-2\nu\pi x}\sin mx\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+4\nu^2\pi^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1}-\frac{1}{2m}\ **.$$

(б) Аналогично получаем (пользуясь той же мажорантой):

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1}\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{m}{m^2+4\nu^2\pi^2}=\frac{1}{2m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{m/2}-e^{-m/2}}\ **.$$

Замечание. Естественно было бы также искать значения предложенных интегралов путем разложения $\sin mx$ в ряд. В случае (а), например, мы пришли

---

* Мы пользуемся здесь (и в следующей задаче) сразу и теоремой 1 и теоремой 1′ предыдущего n°, примененными, скажем, к промежуткам $[1, +\infty]$ и $[0, 1]$ порознь.

** Эти результаты получаются из разложений на простые дроби функций $\operatorname{cth} x$ и $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ [441, 10)].

бы к интегралам, рассмотренным в 7), а для получения результата в конечном виде могли бы использовать известное разложение

$$\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{2k!}m^{2k-1}$$

[449] и т. д. Но этот метод имеет принципиальный недостаток – он требует предположения $m<2\pi$, в то время как результат верен для любого m.

9) Если в элементарной формуле [ср. 492, 2°]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

положить $x=\frac{z}{\sqrt{n}}$, то получим:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Функция $\frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}$, монотонно убывая с возрастанием n, стремится к пределу e^{-z^2}. Опираясь на следствие n° 518 (которое сохраняет силу и для монотонно убывающей функции), можно здесь перейти к пределу при $n\to\infty$ под знаком интеграла. Если для определения предела правой части воспользоваться формулой Валлиса 317, то окончательно получим результат

$$\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[Ср. 492, 2°.]

10) Известный интеграл Фейера [309, 5) (б)]

$$\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2 dz=\frac{\pi}{2},$$

если положить здесь $z=\frac{x}{n}$, может быть переписан в виде

$$\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}.$$

Переход к пределу при $n\to\infty$ здесь затруднен тем обстоятельством, что от параметра n зависит не только подинтегральная функция, но и верхний предел интеграла.

Полагая, однако,

$$f_n(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2 \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}$$

и

$$f_n(x)=0 \text{ для прочих значений } x,$$

можно написать и так:

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Очевидно, каково бы ни было $x>0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

причем приближение функции $f_n(x)$ к своему пределу в любом конечном промежутке $[0, A]$ будет равномерным. С другой стороны, известно, что для $0<z\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin z}{z}\geqslant\frac{2}{\pi},$$

поэтому для $0<x\leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}$

$$f_n(x)\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{4};$$

это неравенство тем более выполняется при $x>n\cdot\frac{\pi}{2}$, ибо тогда $f_n(x)=0$.

Применяя теорему 1, n° **518**, можем в равенстве (7) перейти к пределу при $n\to\infty$ под знаком интеграла, что приводит нас к результату

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}.$$

[Ср. **494**, 4); **497**, 15).]

11) Другой пример того же рода. Известно [см. **440**, 10)], что

$$\int_0^\pi\frac{\cos mx}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=\pi\frac{r^m}{1-r^2},$$

где m – натуральное число и $|r|<1$. Положим здесь $x=\frac{z}{m}$ и $r=1-\frac{h}{m}$ (где $h>0$); считая $m>h$, получим:

$$\int_0^{m\pi}\frac{\cos z\,dz}{h^2+2m^2\left(1-\cos\frac{z}{m}\right)\left(1-\frac{h}{m}\right)}=\int_0^{m\pi}\frac{\cos z\,dz}{h^2+z^2\left(\frac{\sin\frac{z}{2m}}{\frac{z}{2m}}\right)^2\left(1-\frac{h}{m}\right)}=\frac{\pi}{h}\cdot\frac{\left(1-\frac{h}{m}\right)^m}{2-\frac{h}{m}}.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$ «под знаком интеграла», не стесняясь тем, что и верхний предел здесь растет вместе с m (его мы заменим на ∞), получим:

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{h^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2h}\,e^{-h}.$$

Но верно ли это? Постараемся обосновать выполненный предельный переход. Введем и здесь функцию

$$f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2+z^2\left(\dfrac{\sin\dfrac{z}{2m}}{\dfrac{z}{2m}}\right)^2\left(1-\dfrac{h}{m}\right)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant m\pi,$$

$$f_m(z) = 0 \quad \text{при} \quad z > m\pi,$$

так что левая часть интересующего нас равенства перепишется так:

$$\int_0^\infty f_m(z)\,dz.$$

Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2+z^2},$$

причем в конечном промежутке стремление происходит равномерно. Наконец, мажорантой может служить функция

$$\frac{1}{h^2+\dfrac{4}{\pi^2}z^2\left(1-\dfrac{h}{m_0}\right)},$$

если $m_0 > h$ и рассматривать только значения $m \geqslant m_0$. Остается сослаться на теорему 1 n° **518**.

12) Необходимость обоснования предельного перехода в примерах 10) и 11) подчеркивается следующим сходным с ними примером, где, однако, такого обоснования дать *нельзя*; результат же не подкрепленного обоснованием предельного перехода оказывается *неверным*.

Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_0^n \frac{n}{n^2+x^2}\,dx;$$

если с ним поступить, устремляя n к ∞, как в предыдущих примерах, то получится, что

$$\lim I_n = \int_0^\infty 0\cdot dx = 0.$$

На деле же (как легко убедиться с помощью замены переменной) интеграл I_n сохраняет постоянное значение $\frac{\pi}{4}$!

Приведем еще два нешаблонных примера, интересных, как увидим, в другом отношении.

13) Вычислить интеграл (где a – любое число)

$$I=\int_0^\infty e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\frac{dx}{x}$$

[ср. **478**, 8)(а)], считая известным интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

[см. **492**, 3°; **494**, 5).

Удобно ввести комплексную переменную

$$z=a(\cos x+i\sin x);$$

тогда [**457**, (6)]

$$e^z=e^{a\cos x}[\cos(a\sin x)+i\sin(a\sin x)]$$

разлагается в ряд

$$1+\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n(\cos nx+i\sin nx)}{n!}.$$

Приравнивая мнимые части, мы и получим разложение того выражения, которое стоит первым множителем под знаком интеграла:

$$e^{a\cos x}\sin(a\sin x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\sin nx,$$

отсюда

$$I=\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\cdot\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Если бы можно было здесь произвести интегрирование почленно, то сразу получили бы:

$$I=\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\int_0^\infty \frac{\sin nx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}=\frac{\pi}{2}(e^a-1).$$

Но обосновывать право на это в данном случае приходится своеобразно.

Так как ряд, стоящий под знаком интеграла, мажорируется постоянным рядом

$$a\sum_{\nu=0}^\infty \frac{a^\nu}{\nu!},$$

то в конечном промежутке $[0, A]$ интегрирование можно произвести почленно:

$$\int_0^A \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\cdot\frac{\sin nx}{x}\,dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\int_0^A \frac{\sin nx}{x}\,dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!}\int_0^{nA} \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{8}$$

Остается перейти к пределу при $A\to\infty$. Но, как нетрудно видеть, ввиду самого существования интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$, интеграл $\int\limits_0^t \frac{\sin t}{t}\,dx$ при всех значениях $t_0\geqslant 0$ будет равномерно ограничен:

$$\left|\int\limits_0^{t_0} \frac{\sin t}{t}\,dx\right|\leqslant L.$$

Тогда ряд (8), члены которого зависят от переменного A, мажорируется постоянным рядом

$$L\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n}{n!}$$

и, следовательно, сходится равномерно относительно A. В таком случае, по известной теореме [433], в нем можно перейти почленно к пределу при $A\to\infty$, чем и завершается доказательство.

14) Другой пример того же рода. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

сходится, и положим для $x\geqslant 0$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\frac{x^n}{n!};$$

этот ряд также сходится, и притом — в любом конечном промежутке $[0, A]$ — равномерно относительно x [по признакам Абеля — Дирихле, см. **430**], так как множитель $x^n/n!$, по крайней мере для $n>A$, убывает с возрастанием n.

Доказать, что тогда

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}g(x)\,dx = s. \tag{9}$$

Результат получается сразу, если проинтегрировать почленно

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\frac{x^n}{n!}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

ибо $\int\limits_0^\infty e^{-x}\cdot x^n\,dx = n!$ [**489**, 4)]. Обратимся теперь к обоснованию права на это.

Как и только что, в конечном промежутке почленное интегрирование допустимо:

$$\int\limits_0^A e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\frac{x^n}{n!}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\frac{1}{n!}\int\limits_0^A e^{-x}\cdot x^n\,dx. \tag{10}$$

Интегрируя по частям, легко показать, что

$$\frac{1}{n!}\int_0^A e^{-x}\cdot x^n\,dx<\frac{1}{(n-1)!}\int_0^A e^{-x}\cdot x^{n-1}\,dx<1,$$

так что множители

$$\frac{1}{n!}\int_0^A e^{-x}\cdot x^n\,dx,$$

зависящие от A и n, монотонно убывают с возрастанием n (при $A=\text{const}$), оставаясь равномерно ограниченными. В таком случае (по только что указанному признаку) ряд в (10) справа сходится равномерно относительно A, а значит, в нем можно перейти к пределу при $A\to\infty$ почленно, и т. д.

Приведем два примера применения полученной изящной формулы (9).

(а) Рассмотрим так называемый интегральный синус

$$-\operatorname{si} x=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3!\,3}-\frac{x^5}{5!\,5}+\ldots\ *$$

Этот ряд составляется по типу $g(x)$, исходя из ряда

$$\frac{\pi}{2}-1+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{5}+\ldots$$

По формуле (9) тогда

$$-\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{si} x\,dx=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

(б) Другая интересная функция — функция Бесселя с нулевым значком $J_0(x)$ имеет разложение [441, 4), 5):

$$J_0(x)=1+\sum_{\nu=1}^\infty(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2\cdot 2^{2\nu}},$$

которое составляется по типу $g(x)$, если положить

$$a_0=1,\qquad a_{2\nu}=(-1)^\nu\frac{(2\nu-1)!!}{2\nu!!},\qquad a_{2\nu-1}=0.$$

---

* Это разложение легко вывести, если написать:

$$-\operatorname{si} x=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt-\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$$

и во втором интеграле заменить синус его разложением в ряд, а затем проинтегрировать почленно.

Тогда, в силу (9),

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot J_0(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2\nu!!}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

окончательный результат получается здесь, если вспомнить разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ в биномиальный ряд [**407** (24)] и положить в нем $x=1$.

З а м е ч а н и е. Поучительно разобраться, в чем состоит особенность примененного в двух последних примерах метода рассуждения – по сравнению с прочими примерами на почленное интегрирование рядов в бесконечном промежутке.

Если вернуться к общему вопросу о предельном переходе под знаком интеграла с бесконечным пределом [**518**], то он оказывается равносильным вопросу о существовании и равенстве обоих п о в т о р н ы х пределов для некоторой функции $F(A, y)$ двух аргументов [см. (3)]. Согласно общей теореме n° **505** достаточным условием в этом случае является – при наличии обоих п р о с т ы х пределов – *равномерное стремление функции к одному из них,* (4) *или* (5), *и притом все равно к какому.* Обычно мы предполагали такую равномерность в отношении предела (5), что и отвечало «равномерной сходимости интеграла» с бесконечным пределом. *Но заключение оставалось бы в полной силе, если бы вместо этого равномерным было приближение функции F к пределу* (4)!

В случае ряда $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ с частичными суммами $f_n(x)$ можно, таким образом, либо устанавливать равномерное (относительно n) приближение функции

$$F_n(A)=\int_a^A f_n(x)\,dx$$

при $A\to\infty$ к пределу $\int_a^{\infty} f_n(x)\,dx$, т. е. «равномерную сходимость» этих интегралов, что мы о б ы ч н о и делали, либо же убеждаться в равномерном (относительно A) приближении названной функции при $n\to\infty$ к пределу $\int_a^A \varphi(x)\,dx$, т. е. в равномерной (относительно A) сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^A u_n(x)\,dx=\int_a^A \varphi(x)\,dx,$$

что оказалось более удобным для нас в примерах 13) *и* 14)!

520. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по параметру. Займемся и здесь сначала переносом теорем 2 и 3 nn° **506** и **507** на случай бесконечного промежутка.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) для значений $x\geqslant a$ и значений y в* *промежутке* $[c, d]$. *Если интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \tag{1}$$

сходится равномерно относительно y *в промежутке* $[c, d]$, *то он представляет собою непрерывную функцию от параметра* y *в этом промежутке.*

Это следствие из теоремы 1. Действительно, как мы видели в **506**, при изменении x в любом конечном промежутке $[a, A]$, функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ (где y_0 – любое частное значение y) равномерно относительно x стремится к предельной функции $f(x, y_0)$. А тогда, по теореме 1, в интеграле (1) можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty f(x, y_0)\,dx = I(y_0),$$

что и доказывает наше утверждение.

В n° **485**, описывая методы, с помощью которых расходящимся интегралам приписываются «обобщенные значения», мы оставили открытым вопрос о регулярности второго из этих методов. С помощью только что доказанной теоремы мы в состоянии теперь восполнить этот пробел. Если интеграл $\int_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_0^\infty e^{-kx} f(x)\,dx$ равномерно сходится относительно параметра k, для $k \geq 0$ (см. замечание в конце n° **515**) и, следовательно – по крайней мере, в случае непрерывности $f(x)$ – представляет непрерывную функцию от параметра k, для $k \geq 0$. В частности, имеем:

$$\lim_{k\to +0} \int_0^\infty e^{-kx} f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Таким образом, величина сходящегося интеграла совпадает с его «обобщенным значением»; в этом и состоит упомянутая регулярность.

Замечание. В случае, если функция $f(x, y)$ неотрицательна: $f(x, y) \geq 0$, имеет место в некотором смысле обратная теорема: *из непрерывности интеграла* (1), *как функции от параметра, вытекает равномерная его сходимость.*

В этом случае непрерывная функция от y

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx \tag{3}$$

при возрастании A возрастает и, следовательно (по обобщенной теореме Дини, **504**, 4°), стремится к своему пределу (1) равномерно относительно y, ч. и тр. д.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по x для $x \geqslant a$ и y в $[c, d]$ и, сверх того, имеет для указанных значений непрерывную по обеим переменным производную $f'_y(x, y)$. Предположим, далее, что интеграл (1) сходится для всех y в $[c, d]$, а интеграл*

$$\int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx \tag{11}$$

*сходится равномерно относительно y в том же промежутке. Тогда при любом y из $[c, d]$ имеет место формула**

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y)\, dx.$$

Взяв частное значение $y = y_0$, рассмотрим отношение

$$\frac{I(y_0+k) - I(y_0)}{k} = \int_a^\infty \frac{f(x, y_0+k) - (x, y_0)}{k}\, dx \tag{12}$$

и докажем, что здесь допустим предельный переход по параметру $k \to 0$ под знаком интеграла.

Мы уже видели в **507**, что если x изменяется в любом конечном промежутке $[a, A]$, подинтегральная функция $\frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}$ стремится при $k \to 0$ к предельной функции $f'_y(x, y_0)$ равномерно относительно x. Для того чтобы иметь право применить теорему 1, нам следовало бы еще убедиться в равномерной сходимости интеграла (12) относительно k.

Ввиду предположенной равномерной сходимости интеграла (11), по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_0 \geqslant a$, что, лишь только $A' > A > A_0$, будет

$$\left| \int_A^{A'} f'_y(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \tag{13}$$

для всех y зараз [**514**]. Покажем, что одновременно будет и

$$\left| \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} \cdot dx \right| < \varepsilon \tag{14}$$

для всех возможных значений k.

* Вычисление производной по этой формуле и здесь называют *правилом Лейбница.*

Для этой цели (фиксируя A и A') рассмотрим функцию

$$\Phi(y) = \int_A^{A'} f(x, y)\, dx.$$

По теореме 3 n° **507** ее производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\Phi'(y) = \int_A^{A'} f'_y(x, y)\, dx$$

и, ввиду (13), по абсолютной величине всегда $<\varepsilon$. Но тогда и отношение

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k} = \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}\, dx,$$

которое по формуле Лагранжа равно $\Phi'(y_0+\theta k)$, тоже по абсолютной величине будет $<\varepsilon$, т. е. выполняется (14). Отсюда, по признаку n° **514**, следует равномерная сходимость интеграла (12), чем и завершается доказательство.

Легко получить и обобщение теорем 2* и 3* n° **510**, относящихся к конечному промежутку $[a, b]$: стоит лишь, ничего не меняя по существу в приведенных здесь формулировках и рассуждениях, заменить точку $x=\infty$ точкой $x=b$ (как это сделано, например, при переходе от теоремы 1 к теореме 1').

Замечание. В излагаемой здесь теории мы не пользуемся связью интегралов с рядами, предпочитая выдвигать повсюду ту идею, которая в действительности является основой всех умозаключений, – идею равномерного стремления к предельной функции. Однако в иных случаях ссылка на уже развитую теорию рядов могла бы создать формальное упрощение в рассуждениях. Разъясним это, дав новое доказательство теоремы 3 (где упомянутое упрощение более значительно).

Заменим интеграл $I(y)$ рядом [477]

$$I(y) = \sum_1^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx \qquad (A_n \to \infty).$$

Члены этого ряда

$$u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx,$$

в силу теорем 2 и 3 nn° **506** и **507** непрерывны и имеют непрерывные же производные

$$u_n'(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)\, dx.$$

К тому же ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно относительно y в промежутке $[c, \partial]$, как это следует из равномерной сходимости интеграла (11) [**514**]. Тогда, по теореме о почленном дифференцировании ряда [**435**], существует производная

$$I'(y) = \sum_1^{\infty} u_n'(y) = \sum_1^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f_y'(x, y)\, dx,$$

что и доказывает требуемое.

Тот же прием можно применить и к доказательству теорем 1 и 2 n° **518** и **520** (а также теоремы 4 из следующего n°), со ссылкой на соответствующие теоремы из теории функциональных рядов. Осуществление этого предоставляем читателю.

521. Интегрирование интеграла по параметру. Сначала докажем следующую теорему:

Теорема 4. *При предположениях теоремы 2 имеет место формула:*

$$\int_c^{\partial} I(y)\, dy = \int_c^{\partial} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\partial} f(x, y)\, dy. \tag{15}$$

Действительно, по теореме 4 n° **508** для любого конечного $A \geqslant a$ справедливо равенство

$$\int_c^{\partial} dy \int_a^{A} f(x, y)\, dx = \int_a^{A} dx \int_c^{\partial} f(x, y)\, dy.$$

Но, по предположению, функция (3), непрерывная по y, при $A \to \infty$ стремится к своему пределу (1) р а в н о м е р н о относительно y. Следовательно, по теореме 1 n° **506**, в интеграле слева можно перейти к пределу по $A \to \infty$ под знаком интеграла, т. е.

$$\lim_{A \to \infty} \int_c^{\partial} dy \int_a^{A} f(x, y)\, dx = \int_c^{\partial} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

В таком случае существует и предел при $A \to \infty$ интеграла справа, т. е. интеграл

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\partial} f(x, y)\, dy,$$

и имеет то же значение, ч. и тр. д.

Если воспользоваться замечанием к теореме 2 [520], то легко вывести отсюда такое

Следствие. *В случае неотрицательной функции $f(x, y)$ одна непрерывность интеграла* (1) *по y влечет за собой формулу* (15).

Таким образом, мы – при известных условиях – установили право переставлять два интеграла, из которых лишь один распространен на бесконечный промежуток, а другой – на конечный.

Между тем во многих случаях как раз приходится переставлять интегралы, взятые оба в бесконечных промежутках, по формуле

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy. \tag{16}$$

Оправдать такую перестановку часто представляется делом сложным и кропотливым, чему читатель ниже найдет много примеров.

Лишь для узкого класса случаев удается обосновать формулу (16) общими соображениями:

Теорема 5. *Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна для $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$. Предположим, далее, что оба интеграла*

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx \quad и \quad \int_c^{\infty} f(x, y)\, dy \tag{17}$$

сходятся равномерно: первый – относительно y, а второй – относительно x, в любом конечном промежутке. Тогда, если хоть один из двух повторных интегралов

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x, y)|\, dx, \qquad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |f(x, y)|\, dy \tag{18}$$

существует, то существуют и равны повторные интегралы (16).

Допустим, что существует второй из интегралов (18). Ввиду равномерной сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f\, dx$, по предыдущей теореме, для любого конечного $C > c$ будем иметь

$$\int_c^{C} dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x, y)\, dy.$$

Остается доказать, что в интеграле справа при $C\to\infty$ допустим предельный переход под знаком интеграла, ибо тогда будет существовать

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)\,dx=\lim_{C\to\infty}\int_c^C dy\int_a^\infty f(x,y)\,dx=\lim_{C\to\infty}\int_a^\infty dx\int_c^C f(x,y)\,dy=$$
$$=\int_a^\infty dx\cdot\lim_{C\to\infty}\int_c^C f(x,y)\,dy=\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)\,dy.$$

Оправдать упомянутый предельный переход можно, опираясь на теорему 1 [518]. Функция от x и C

$$\int_c^C f(x,y)\,dy,$$

непрерывная по x [теорема 2, 506], при $C\to\infty$ стремится к предельной функции

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

равномерно относительно x в любом конечном промежутке. Интеграл же

$$\int_a^\infty dx\int_c^C f(x,y)\,dy$$

сходится равномерно относительно C, потому что мажорируется вторым из интегралов (18), поскольку

$$\left|\int_c^C f(x,y)\,dy\right|\leqslant\int_c^\infty |f(x,y)|\,dy.$$

Таким образом, все условия теоремы 1 здесь выполнены, и наше утверждение оправдано.

Несколько проще обстоит дело в случае функции, не меняющей знака. Например, для неотрицательной функции (этим случаем достаточно ограничиться) имеет место

Следствие. *Пусть для неотрицательной непрерывной функции $f(x,y)$ оба интеграла* (17) *также представляют собой непрерывные функции, первый – от y, а второй – от x. Тогда, если существует один из повторных интегралов* (16), *то существует и другой и притом – равный первому.*

По теореме 2 и замечанию к ней явствует, что предположение о непрерывности интегралов (17) равносильно требованию их равномерной сходимости. Остается применить предыдущую теорему, отметив, что в данном случае $|f(x, y)| = f(x, y)$.

Предложения настоящего n° также могут быть перефразированы на случай конечных промежутков; при этом особая точка $x = \infty$ лишь заменяется конечной особой точкой $x = b$, а также (если нужно) точка $y = \infty$ точкой $y = \partial$.

522. Применение к вычислению некоторых интегралов. Применим вышеизложенную теорию к вычислению некоторых важных интегралов.

1°. Интегралы Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x^2+2x\cos\theta+1}.$$
$$(0<a<1) \qquad (0<a,\ b<1) \qquad (0<a<1,\ -\pi<\theta<\pi)$$

Из результатов n° **496**, 1) сразу получается:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m<n).$$

Положив здесь $z = x^{\frac{1}{n}}$, найдем первый из эйлеровых интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2n+1}{2n}-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}, \tag{19}$$

при частном значении $a = \dfrac{2m+1}{2n}$.

Для того чтобы отсюда получить значение искомого интеграла при любом a, удовлетворяющем неравенствам $0<a<1$, убедимся в том, что этот интеграл представляет собой непрерывную функцию от a для указанных значений параметра.

При $0<x<+\infty$ и $0<a<1$ подинтегральная функция сохраняет непрерывность по обеим переменным. Далее, рассматриваемый интеграл сходится равномерно относительно a: при $x=0$ для $a \geqslant a_0 > 0$, а при $x=\infty$ для $a<a_1<1$. Действительно, разбивая интеграл $\int_0^\infty$ на два: $\int_0^1 + \int_1^\infty$, легко видеть, что последние мажорируются, соответственно, интегралами:

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{x^{a_1-1}}{1+x}\,dx.$$

Прилагая к интегралу $\int\limits_1^\infty$ теорему 2, а к интегралу $\int\limits_0^1$ – аналогичную ей теорему для конечного промежутка, убеждаемся в непрерывности обоих интегралов как функций от параметра.

К любому значению a, $0<a<1$ можно произвольно приблизиться с помощью значений вида $\frac{2m+1}{2n}$ (m и n – натуральные, $m<n$). Переходя в формуле (19) к пределу при $\frac{2m+1}{2n}\to a$ и используя доказанную непрерывность интеграла, найдем окончательно:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi a} \qquad [\text{ср. } \mathbf{519},\ 4)].$$

Совершенно аналогично, из **496**, 2) и 3) получим:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx=\pi(\operatorname{ctg} a\pi-\operatorname{ctg} b\pi)$$

и

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x^2+2x\cdot\cos\theta+1}=\pi\frac{\sin(1-a)\theta}{\sin\theta\cdot\sin a\pi}.$$

2°. Интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[ср. **492**, 3°].

Рассмотрим интеграл

$$I_0=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx \qquad (\alpha>0).$$

Вычислим его с помощью дифференцирования по параметру α. Однако непосредственное применение правила Л е й б н и ц а приводит здесь к расходящемуся интегралу

$$\int\limits_0^\infty \cos\alpha x\,dx.$$

Поэтому мы введем «множитель сходимости» e^{-kx} ($k>0$) и станем искать значение интеграла

$$I=\int\limits_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx \qquad (\alpha\geqslant 0).$$

Для него дифференцирование по α под знаком интеграла уже дозволительно, ибо соблюдены условия теоремы 3: подинтегральная функция и ее частная производная по α непрерывны по x и α для $x \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 0$, а интеграл, получаемый в результате дифференцирования:

$$\int_b^{\infty} e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{a^2 + k^2}$$

сходится равномерно относительно α, так как мажорируется интегралом $\int_0^{\infty} e^{-kx} \, dx$, не содержащим α.

Итак, для $\alpha \geqslant 0$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

Интегрируя по α, найдем

$$I = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}$$

(постоянного слагаемого здесь вводить не приходится, так как оба эти выражения при $\alpha = 0$ обращаются в нуль).

Эта формула выведена в предположении, что $k > 0$. Но, при $\alpha = \text{const}$, интеграл I оказывается функцией от k, непрерывной и при $k = 0$; это следует по теореме 2 из равномерной сходимости интеграла I относительно k при $k \geqslant 0$ [см. **515**, 4°]. Иными словами,

$$I_0 = \lim_{k \to +0} I.$$

Если $\alpha > 0$, то

$$I_0 = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \operatorname{arctg} (+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

В частности (при $\alpha = 1$) и

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

3°. Интеграл Эйлера–Пуассона

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

[ср. **492**, 2°].

Положив здесь $x = ut$, где u – любое положительное число, получим

$$J = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} \, dt.$$

Умножим теперь обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по u от 0 до ∞:

$$J\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=J^2=\int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Нетрудно видеть, что перестановка интегралов ведет здесь весьма быстро к результату. В самом деле, после перестановки получим

$$J^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},$$

откуда (так как, очевидно, $J>0$)

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для оправдания произведенной перестановки интегралов попробуем прибегнуть к следствию из теоремы 5 n° **521**. Но в то время как интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

есть непрерывная функция от t для всех $t\geqslant 0$, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}\cdot J$$

непрерывен лишь для $u>0$, а при $u=0$ обращается в 0, терпя в этой точке р а з р ы в. Поэтому применить следствие непосредственно к прямоугольнику $[0,\infty;\,0,\infty]$ нельзя! Мы его применим к прямоугольнику $[u_0,\infty;\,0,\infty]$, где $u_0>0$, пользуясь тем, что интеграл

$$\int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot e^{-(1+t^2)u_0}$$

является непрерывной функцией от t для всех $t\geqslant 0$. Этим оправдывается равенство

$$\int_{u_0}^\infty du\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=\int_0^\infty dt\int_{u_0}^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du.$$

Остается лишь, уменьшая u_0, перейти здесь к пределу при $u_0 \to 0$, что в правой части можно выполнить под знаком интеграла — на основании следствия n° **518**.

4°. Интегралы Лапласа (P. S. Laplace):

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx, \qquad z = \int_0^\infty \frac{x \cdot \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx \qquad (\alpha, \beta > 0).$$

Полагая в первом из них

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)}\, dt,$$

получим

$$y = \int_0^\infty \cos \beta x\, dx \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)}\, dt.$$

Переставим здесь, по теореме 5, интегрирования по x и по t

$$y = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t}\, dt \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x\, dx.$$

Но внутренний интеграл нам известен [**519**, 6) (а)]

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

так что

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{(t = z^2)}{=} \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2 - \frac{\beta^2}{4z^2}}\, dz.$$

Вспоминая **497**, 8), окончательно находим

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Второй интеграл Лапласа получается из первого дифференцированием по параметру β:

$$z = -\frac{dy}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

Применение правила Лейбница оправдывается тем, что интеграл сходится равномерно относительно β для $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ [**517**, 16)].

5°. Интегралы Френеля (A. J. Fresnel):

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

Полагая $x^2 = t$, получим:

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt;$$

станем искать первый из этих интегралов в преобразованной форме.

Заменяя (под знаком интеграла) выражение $1/\sqrt{t}$ равным ему интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du,$$

приведем искомый интеграл к виду:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du.$$

Перестановка интегралов здесь сразу привела бы к окончательному результату:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ {}^{*}.$$

Так как непосредственное обоснование такой перестановки требует кропотливых преобразований и оценок, мы предпочтем и здесь (ср. 2°) прибегнуть к «множителю сходимости» e^{-kt} $(k > 0)$.

Имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-kt}\sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-(k+u^2)\cdot t}\sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

На этот раз возможность перестановки интегралов устанавливается с помощью теоремы 5. Остается, наконец, перейти к пределу при $k \to 0$, что – как легко проверить – может быть проведено под знаком интеграла.

---

* См. **472**, 2) или **491**, 7).

Итак, окончательно

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

То же значение получается и для интеграла $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$. Отсюда

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

523. Примеры на дифференцирование под знаком интеграла. 1) Исходя из известных интегралов (при $a>0$)

$$\text{(а)}\quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\text{(б)}\quad \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}},$$

$$\text{(в)}\quad \int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a},$$

путем последовательного дифференцирования их по параметру вывести новые интегралы.

(а) Решение. По правилу Лейбница, после n-кратного дифференцирования, найдем:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Так как получающиеся при этом интегралы все равномерно сходятся относительно a, для $a\geqslant a_0>0$ (например, написанный интеграл мажорируется интегралом $\int_0^\infty e^{-a_0x^2}x^{2n}\,dx$), то применение правила Лейбница оправдано.

(б) *Ответ.* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}\,.$

(в) *Ответ.* $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\log^n x\,dx = (-1)^n\,\frac{n!}{a^{n+1}}\,.$

2) Дифференцированием по параметру вычислить интегралы (α, β, $k>0$):

$$\text{(а)} \quad J=\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx}\,dx,$$

$$\text{(б)} \quad H=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\cdot e^{-kx}\,dx.$$

(а) Решение. Производная J по α выражается интегралом (сходящимся равномерно относительно α)

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2},$$

отсюда

$$J=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)+C.$$

Так как при $\alpha=0$ интеграл J обращается в 0, то $C=-\frac{1}{2}\ln k^2$ и окончательно

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

(б) Дифференцируя H по α под знаком интеграла, получим:

$$\frac{dH}{d\alpha}=\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin\beta x\cdot\cos\alpha x}{x}\,dx.$$

Применение правила Лейбница законно, ибо условия теоремы 3 соблюдены, как в этом легко убедиться.

Преобразуя произведение синуса на косинус в разность двух синусов, сведем полученный интеграл к интегралам знакомого нам вида [522, 2°]:

$$\frac{dH}{d\alpha}=\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx-\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx\right]=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right).$$

Интегрируем по α:

$$H=\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}+C.$$

Постоянная $C=0$ (ибо $H=0$ при $\alpha=0$).

3) Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt.$$

Указание. Рассмотреть более общий интеграл, введя параметр:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\,dt,$$

вычислить его с помощью дифференцирования, а затем положить $\alpha=1$.

Ответ. $\ln\sqrt{2}$.

4) Вычислить интегралы:

$$\text{(а)}\quad J_1=\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx \qquad (a,\ b>0).$$

$$\text{(б)}\quad J_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)}\,dx \qquad (r\geqslant 0),$$

$$\text{(в)}\quad J_3=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax\cdot\operatorname{arctg} bx}{x^2}\,dx \qquad (a,\ b>0).$$

(а) Указание. J_1 непрерывен по a для $a\geqslant 0$; мажоранта $\dfrac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2}$ для $0\leqslant a\leqslant a_1$. Производная для $a>0$

$$\frac{dJ_1}{da}=\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}\,dx=\frac{\pi}{ab+1};$$

мажоранта $\dfrac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}$ для $0<a_0\leqslant a\leqslant a_1$.

Ответ. $J_1=\dfrac{\pi}{b}\ln(ab+1)$.

(б) Указание. Производная при $r\geqslant 0$:

$$\frac{dJ_2}{dr}=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+r};$$

мажоранта $\dfrac{1}{1+x^2}$. *Ответ.* $J_2=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+r)$.

(в) Указание. Производная по a приводится к интегралу типа J_2:

$$\frac{dJ_3}{da}=\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\cdot\frac{\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}t}{t(1+t^2)}\,dt=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a+b}{a} \qquad (a>0).$$

Ответ. $J_3=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(a+b)^{a+b}}{a^a\cdot b^b}$.

Замечание. Из J_2, при $r=1$, подстановкой $x=\operatorname{tg} t$ получается интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

а отсюда интегрированием по частям находим вновь [ср. **492**, 1°]:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

5) (а) Вычислить интеграл $J=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$.

Решение. Имеем

$$\frac{dJ}{db} = -\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot 2x \cdot \sin 2bx\, dx.$$

Интегрируя по частям, получим затем:

$$\frac{dJ}{db} = -2b \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = -2bJ.$$

Таким образом, для определения J получилось простое дифференциальное уравнение с отделяющимися переменными [358]. Интегрируя, находим

$$J = Ce^{-b^2}.$$

Так как при $b=0$ должно быть $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то именно этому и равно C. Окончательно,

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

[ср. **519**, 6) (а)].

(б) Если тот же прием применить к вычислению интеграла $H=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2bx\, dx$, то придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{dH}{db} + 2bH = 1.$$

Умножив обе его части на e^{b^2}, слева получим, очевидно, производную от произведения $e^{b^2} \cdot H$ по b; интегрируя от 0 до b, найдем

$$e^{b^2} \cdot H = \int\limits_0^{b} e^{b^2}\, db$$

(так как $H=0$ при $b=0$). Таким образом,

$$H=e^{-b^2}\cdot\int_0^b e^{t^2}\,dt.$$

Здесь для выражения интеграла пришлось ввести новую, «неэлементарную» функцию

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

[ср. **519**, 6) (в)].

6) Вычислить интеграл (a, $b>0$)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\,dx.$$

Решение. Искомый интеграл лишь множителем $1/\sqrt{a}$ отличается от интеграла

$$J=\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\,dy,$$

где $c^2=ab$ (подстановка $y=\sqrt{ax}$).

Имеем:

$$\frac{dJ}{dc}=-2c\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{dy}{y^2}=-2\int_0^\infty e^{-z^2-\frac{c^2}{z^2}}\,dz=-2J$$

$\left(\text{подстановка } y=\dfrac{c}{z}\right)$. Отсюда

$$J=Ae^{-2c},\qquad A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$. [Ср. **497**, 8)].

7) Вычислить интеграл

$$J=\int_0^\infty\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-a_1t}\cos b_1t}{t}\,dt\qquad(a,\ a_1>0).$$

Решение. Дифференцируя по a и по b порознь, получим:

$$\frac{\partial J}{\partial a}=-\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\,dt=-\frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial J}{\partial b}=-\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\,dt=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Нетрудно по этим частным производным восстановить самую функцию *

$$J=-\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+C,$$

где C не зависит ни от a, ни от b. Так как при $a=a_1$ и $b=b_1$ будет $J=0$, то

$$C=\frac{1}{2}\ln(a_1^2+b_1^2),$$

так что

$$J=\frac{1}{2}\ln\frac{a_1^2+b_1^2}{a^2+b^2}.$$

8) Вычислить интегралы ($a>0$, $b\geqslant 0$):

$$u=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx,\qquad v=\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx.$$

Решение. Найдем производные этих интегралов по параметру b, пользуясь правилом Лейбница:

$$\frac{du}{db}=-\int_0^\infty x^2\cdot e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx,\qquad \frac{dv}{db}=\int_0^\infty x^2\cdot e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx.$$

Интегрированием по частям отсюда легко получить

$$\frac{du}{db}=-\frac{1}{2a}v-\frac{b}{a}\cdot\frac{dv}{db},\qquad \frac{dv}{db}=\frac{1}{2a}u+\frac{b}{a}\cdot\frac{du}{db}$$

или – решая эти уравнения относительно производных –

$$\frac{du}{db}=-\frac{bu+av}{2(a^2+b^2)},\qquad \frac{dv}{db}=\frac{au-bv}{2(a^2+b^2)}. \tag{20}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций u, v от b мы получили систему дифференциальных уравнений.

Вводя комплексную функцию $w=u+iv$ от вещественной переменной b, легко свести дело к одному уравнению (с отделяющимися переменными). Именно, если второе из уравнений (20) умножить на i и почленно сложить с первым, то придем к уравнению

$$\frac{dw}{db}=\frac{-b+ai}{2(a^2+b^2)}w=\frac{i}{2}\cdot\frac{w}{a-bi}.$$

Его можно интегрировать обычным путем, отделяя переменные. Чтобы избежать пользования логарифмами комплексных чисел, можно и непосредственно убедиться, что

$$\frac{d}{db}\left(w\cdot\sqrt{a-bi}\right)=0$$

в силу дифференциального уравнения, откуда

$$w\cdot\sqrt{a-bi}=c=\text{const}.$$

* Впоследствии мы займемся этим вопросом систематически, здесь же «первообразная функция» устанавливается на глаз.

Полагая $b=0$, легко найти $c=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, так что

$$w=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-bi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\sqrt{a+bi}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Под символом $\sqrt{a\pm bi}$ мы разумеем те ветви корней, которые при $b=0$ обращаются в арифметический корень $+\sqrt{a}$.

Известно, что

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\;{}^{*};$$

гаким образом,

$$w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\right).$$

Приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получим, наконец:

$$u=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\,,$$

$$v=\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\,.$$

Эти формулы выведены нами при существенном предположении, что $a>0$. Io так как оба интеграла, как легко убедиться с помощью теоремы 2 [см. и **515**, °], являются непрерывными функциями от a и при $a=0$, то, переходя в полученных авенствах к пределу при $a\to 0$, найдем (если $b>0$):

$$\int_0^\infty \cos bx^2\,dx=\int_0^\infty \sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\,,$$

е. интегралы Френеля [ср. **522**, 5°].

9) Покажем, как с помощью дифференциального уравнения могут быть просто ычислены интегралы Лапласа [ср. **522**, 4°]:

$$y=\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad\text{и}\quad z=\int_0^\infty\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \qquad (\alpha,\beta>0).$$

---

* Полагая $\sqrt{a+bi}=x+yi$, будем иметь: $a=x^2-y^2$, $b=2xy$. Отсюда и получется:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,\qquad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,$$

ричем оба корня здесь берутся с плюсом, во внимание к заключенному только о условию и к тому, что $xy=\dfrac{1}{2}b>0$.

Мы уже видели, что

$$\frac{dy}{d\beta} = -z.$$

Дальнейшее дифференцирование по β производить под знаком интеграла невозможно, ибо в результате такого дифференцирования получился бы уже расходящийся интеграл.

Однако если к написанному равенству почленно прибавить равенство

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$$

[522, 2°] *, то получим:

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)}\, dx.$$

Здесь дифференцировать под знаком интеграла снова можно и таким путем мы найдем

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx,$$

т. е.

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 y.$$

Для этого простого дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, по корням $\pm\alpha$ «характеристического уравнения», легко составить общее решение

$$y = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta},$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Но при всех значениях β величина y ограничена:

$$|y| \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

значит C_1 необходимо равно 0 (ибо иначе, при $\beta \to +\infty$, и величина y безгранично возрастала бы).

Для определения же постоянной C_2 положим $\beta = 0$; очевидно:

$$C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Окончательно,

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Отсюда дифференцированием получается и z.

---

* Впрочем, для дальнейшего нам вовсе не нужно значение этого интеграла; достаточно лишь знать, что при всех $\beta > 0$ он сохраняет постоянное значение, а в этом легко убедиться простой подстановкой $t = \beta x$.

10) Вычислить интегралы

$$u=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx,\qquad v=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx.$$

Существование и непрерывность интегралов при всех значениях α обеспечивается наличием мажоранты: e^{-x^2}. По правилу Лейбница:

$$\frac{du}{d\alpha}=-\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\cdot\frac{2\alpha}{x^2}\,dx=-2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}}\sin y^2\,dy.$$

$$\left(y=\frac{\alpha}{x}\right)$$

Второй интеграл сходится равномерно — как при $y=0$, так и при $y=\infty$ — для всех значений α, значит, первый сходится равномерно — как при $x=\infty$, так и при $x=0$ — для значений α, удовлетворяющих неравенствам $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$. Таким образом, для $\alpha>0$ применение правила Лейбница оправдано.

Дальнейшее дифференцирование по α (которое оправдывается аналогично) даст нам:

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}}\sin y^2\cdot\frac{-2\alpha}{y^2}\,dy=4\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx=4v.$$

Точно так же

$$\frac{d^2v}{d\alpha^2}=-4u.$$

Полагая $w=u+iv$, имеем для определения w дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2}=-4iw.$$

Составим «характеристическое» уравнение: $\lambda^2+4i=0$ и по корням его $\lambda=\pm\sqrt{2}\mp\sqrt{2}i$ напишем общее решение дифференциального уравнения.

$$w=u+iv=Ae^{-\alpha\sqrt{2}}(\cos\alpha\sqrt{2}+i\sin\alpha\sqrt{2})+Be^{\alpha\sqrt{2}}(\cos\alpha\sqrt{2}-i\sin\alpha\sqrt{2}).$$

Так как функция w при всех α ограничена, то необходимо: $B=0$; но при $\alpha=0$ должно быть $w=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, так что $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Окончательно,

$$u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2},\qquad v=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

11) Доказать тождество

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2+a^2}\qquad(a>0).$$

Обозначим первый интеграл через u, а второй – через v. Полагая в u: $x^2+a^2=y^2$, преобразуем его к виду:

$$u=e^{a^2}\cdot\int_a^\infty e^{-y^2}\,dy.$$

Введем новую переменную и в v, полагая $x=az$; получим

$$v=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}\,dz}{z^2+1}.$$

Продифференцировав v по a (по правилу Лейбница), представим производную $\frac{dv}{da}$ в виде:

$$\frac{dv}{da}=-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^\infty e^{-a^2z^2}\,dz-\int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}}{z^2+1}\,dz\right\},$$

откуда для определения v получается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{da}-2a\cdot v=-1.$$

Умножив обе части его на («интегрирующий») множитель e^{-a^2}, придем к равенству

$$\frac{d}{da}[v\cdot e^{-a^2}]=-e^{-a^2};$$

если проинтегрировать его по a от 0 до a, то получим:

$$v\cdot e^{-a^2}=v_0-\int_0^a e^{-t^2}\,dt,$$

где под v_0 разумеется предельное значение

$$v_0=\lim_{a\to 0} v=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Так как это же число есть значение интеграла $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$, то для v окончательно получается

$$v=e^{a^2}\cdot\int_a^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

т. е. то же выражение, что и для u.

12) Доказать тождество (при $k>0$)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx=\int_k^\infty \frac{\sin(x-k)}{x}\,dx.$$

Оба интеграла, как функции от k, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$y''+y=\frac{1}{k}.$$

По отношению к первому в этом убеждаемся, дважды дифференцируя его по правилу Лейбница. По отношению ко второму проще исходить из его представления в виде:

$$\cos k\cdot\int_k^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt-\sin k\cdot\int_k^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Так как разность обоих предложенных интегралов $z=z(k)$ удовлетворяет однородному уравнению: $z''+z=0$, то она имеет форму

$$z=c_1\cdot\sin(k+c_2),$$

где c_1 и c_2 – постоянные. Но оба интеграла, а с ними и их разность z, стремятся к 0 при $k\to\infty$. Отсюда $c_1=0$, $z(k)\equiv 0$ и требуемое тождество доказано.

524. Примеры на интегрирование под знаком интеграла. 1) Найти значения интегралов

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,\qquad \text{(б)}\quad \int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx\qquad (a, b>0)$$

путем интегрирования под знаком интеграла.

Решение. (а) Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx=\frac{1}{y}\qquad (y>0)$$

сходится равномерно относительно y для $y\geqslant y_0>0$. Интегрируя это равенство по y от a до b, причем слева интегрирование можно произвести под знаком интеграла, получим

$$\int_0^\infty dx\int_a^b e^{-yx}\,dy=\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

Ср. 495, 1).]

б) Аналогично, исходя из интеграла

$$\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\qquad (y>0),$$

который также сходится равномерно относительно y для $y\geqslant y_0>0$, найдем:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x}\int_a^b \sin yx\,dy=\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

Ср. 497, 10) (а).]

2) Рассмотрим полный эллиптический интеграл 1-го рода

$$\mathrm{K}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

как функцию от модуля k, и найдем интеграл от этой функции в промежутке $[0,\ 1]$.

Имеем

$$\int_0^1 \mathrm{K}(k)\,dk=\int_0^1 dk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1\frac{dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

что подстановкой $x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ приводит к удвоенному интегралу

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx=G=0{,}915965\ldots$$

[G – «постоянная Каталана», см. **328**, 6) и **440**, 6а)].

Перестановка интегралов производится на основании (модифицированного) следствия из теоремы 5. Подинтегральная функция повсюду в прямоугольнике $\left[0,\ \frac{\pi}{2};\ 0,\ 1\right]$ положительна и непрерывна, за исключением точки $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$, где она обращается в ∞. Интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

есть непрерывная функция от k для значений $k<1$, а интеграл

$$\int_0^1\frac{dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

– непрерывная функция от φ для значений $\varphi<\frac{\pi}{2}$. Наконец, второй из повторных интегралов, очевидно, существует. Таким образом, все условия названного следствия выполнены.

В ближайших нескольких примерах будем вновь иметь дело с уже знакомой нам функцией Бесселя с нулевым значком [**440**, 12); **441**, 4)]

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

но в основу наших умозаключений положим «асимптотическую» формулу для $J_0(x)$, которую примем без доказательства. Вот эта формула:

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}, \tag{21}$$

где $\varphi_0(x)$ при безграничном возрастании x остается ограниченной:

$$|\varphi_0(x)|\leqslant L.$$

3) Вычислить интеграл

$$A=\int_0^\infty e^{-ax}\cdot J_0(x)\,dx \qquad (a>0).$$

Имеем

$$A=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{a^2+\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Перестановка интегралов дозволительна ввиду равномерной (относительно θ сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)\,dx$$

(мажоранта: e^{-ax}).

Так как из (21) явствует, что интеграл

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx$$

сходится *, то интеграл A будет непрерывной функцией от a и при $a=0$ [теор. 2; **515**, 4°]. Поэтому значение этого интеграла может быть получено из выражения для A предельным переходом при $a\to 0$. Таким образом,

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx=1.$$

* Это сразу станет ясным, если первое слагаемое в (21) справа написать в виде:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right).$$

4) Вычислить интеграл

$$B=\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cdot J_0(x)\,dx \qquad (a>0).$$

Имеем

$$B=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx.$$

Но внутренний интеграл есть «разрывный множитель» Дирихле [497, 11)]

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad \sin\theta<a,\\ 0, & \text{если}\quad \sin\theta>a.\end{cases}$$

Поэтому

$$B=\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cdot J_0(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при}\quad a\geqslant 1,\\ \arcsin a & \text{при}\quad a<1.\end{cases}$$

Установим дозволительность перестановки интегралов. Имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx.$$

Но можно написать внутренний интеграл в виде:

$$\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int_0^A \frac{\sin(a+\sin\theta)x}{x}\,dx+\int_0^A \frac{\sin(a-\sin\theta)\,x}{x}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{A(a+\sin\theta)} \frac{\sin z}{z}\,dz+\int_0^{A(a-\sin\theta)} \frac{\sin z}{z}\,dz\right\}. \tag{22}$$

Если $a>1$, так что $a-\sin\theta>a-1>0$, то это выражение при $A\to\infty$ стремится к своему пределу равномерно относительно θ, иными словами, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$ сходится равномерно, и перестановка интегралов оправдана. При $a\leqslant 1$ равномерность нарушается вблизи $\theta=\arcsin a$. Но так как выражение (22) остается равномерно ограниченным при всех A и θ (мажорируется постоянной!), то наружный интеграл при $\theta=\arcsin a$ сходится равномерно относительно A, так что предельный переход при $A\to\infty$ под знаком интеграла все же допустим, чем снова оправдана перестановка интегралов.

5) Из интеграла B, дифференцированием по параметру a, получаем другой интересный интеграл:

$$C=\int_0^\infty J_0(x)\cos ax\,dx=\begin{cases} 0 & \text{при } a>1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} & \text{при } a<1. \end{cases}$$

Для обоснования права на дифференцирование под знаком интеграла заметим, что интеграл C сходится равномерно относительно a в любом замкнутом промежутке значений a, не содержащем единицы. Это следует из асимптотической формулы (21). Переписав ее в виде *

$$J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x+\sin x)+\frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}},$$

умножим обе части на $\cos ax$:

$$J_0(x)\cos ax=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos(1+a)x+\cos(1-a)x+\sin(1+a)x+\sin(1-a)x}{\sqrt{x}}+\frac{\varphi_0(x)\cdot\cos ax}{x^{3/2}}.$$

Второе слагаемое мажорируется функцией $\dfrac{L}{x^{3/2}}$. Что же касается интеграла от первого слагаемого, то при $|1-a|\leqslant\delta>0$ и он сходится равномерно.

Та же формула показывает, что при $a=1$ интеграл C расходится.

6) Вычислить интеграл

$$D=\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\cdot J_0(x)\,dx \qquad (a>0).$$

Имеем

$$D=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty\frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\sqrt{|a^2-\sin^2\theta|}-\ln\sin\theta\right]d\theta$$

[см. **497**, 16) (б)]. Таким образом [**497**, 7) и **511**, 7)]:

$$D=\int_0^\infty\frac{1-\cos ax}{x}\cdot J_0(x)\,dx=\begin{cases}\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) & \text{при } a\geqslant 1, \\ 0 & \text{при } a<1.\end{cases}$$

---

* См. сноску на стр. 735.

Для обоснования перестановки интегралов напишем сначала для конечного A:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1-\cos ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^A\frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx.$$

Весь вопрос теперь в том, можно ли справа здесь перейти к делу при $A\to\infty$ под знаком интеграла.

Чтобы исследовать характер стремления внутреннего интеграла к своему пределу, рассмотрим интеграл

$$\int_A^{A'}\frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_A^{A'}\frac{dx}{x}\,[2\cos(x\sin\theta)-\cos(a+\sin\theta)x-\cos|a-\sin\theta|x|=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg[2\int_{A\sin\theta}^{A'\sin\theta}-\int_{A(a+\sin\theta)}^{A'(a+\sin\theta)}-\int_{A|a-\sin\theta|}^{A'|a-\sin\theta|}\Bigg]\frac{\cos z}{z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg[\int_{A\sin\theta}^{A(a+\sin\theta)}-\int_{A'\sin\theta}^{A'(a+\sin\theta)}+\int_{A\sin\theta}^{A|a-\sin\theta|}-\int_{A'\sin\theta}^{A'|a-\sin\theta|}\Bigg]\frac{\cos z}{z}\,dz.$$

Ввиду существования интеграла $\int_{z_0}^{\infty}\frac{\cos z}{z}\,dz$ $(z_0>0)$ ясно, что, взяв A и A' достаточно большими, можно сделать эту сумму сколь угодно малой сразу для всех значений θ в любом замкнутом промежутке, не содержащем ни 0, ни $\arcsin a$ (если $a\leqslant 1$). Таким образом, равномерность стремления внутреннего интеграла к своему пределу при $A\to\infty$ нарушается лишь вблизи одного или двух указанных значений θ.

Но, с другой стороны, этот внутренний интеграл мажорируется функцией $[\ln\sqrt{|a^2-\sin^2\theta|}-\ln\sin\theta]$, которая интегрируема в промежутке $[0,\pi/2]$; значит, наружный интеграл равномерно сходится как при $\theta=0$, так и при $\theta=\arcsin a$ (если $a\leqslant 1$). Тогда, по теореме 1′ n° **518**, упомянутый выше предельный переход допустим.

7) Отсюда дифференцированием по параметру найдется интеграл:

$$E=\int_0^{\infty}J_0(x)\sin ax\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} & \text{при } a>1,\\ 0 & \text{при } a<1.\end{cases}$$

Обоснование проводится сходно с 5), опираясь на формулу (21). При $a=1$ интеграл расходится.

8) (а) Проверить непосредственно допустимость перестановки интеграла в случае

$$J=\int_1^{\infty}dy\int_1^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\,dx.$$

Имеем:

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)} dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=1}^{x=\infty} = -\frac{1}{1+y^2},$$

так что

$$J = -\int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2} = -\operatorname{arctg} y\Bigg|_1^\infty = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

В то же время для другого повторного интеграла

$$J = -\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dy$$

аналогично получается значение $J=\frac{\pi}{4}$: перестановка недопустима.

Любопытно отметить, что [как мы убедились в 517, 1)] интеграл

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$

сходится равномерно относительно y для всех $y \geqslant 1$: аналогично устанавливается и равномерная относительно x (для $x \geqslant 1$) сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dy.$$

Теорема 5 здесь неприменима потому, что (как легко проверить непосредственно) интегралы

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2} dy, \qquad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2} dx$$

расходятся!

(б) Легко установить недопустимость перестановки интегрирований и в следующем случае:

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy = -1, \quad \int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}.$$

Здесь интеграл

$$\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3} dx$$

– как это ясно уже из теоремы 4 – не может быть равномерно сходящимся относительно y в промежутке $[0, 1]$ (в чем легко убедиться и непосредственно).

(в) Еще изящный пример того же типа (Харди) *:

$$\int_0^1 dx \int_1^\infty (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dy - \int_1^\infty dy \int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}\, dx = \ln\frac{q}{p},$$

что не равно нулю, если взять $p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$.

9) Приведем два новых приема для вычисления интеграла Лапласа:

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+}\, dx$$

[ср. 522, 4°].

Так как

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-xy} \sin y\, dv$$

то, подставляя, представим J в виде

$$J = \int_0^\infty \cos\beta x\, dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y\, dy.$$

Переставляя интегрирования, получим

$$J = \int_0^\infty \sin y\, dy \int_0^\infty e^{-xy} \cos\beta x\, dx = \int_0^\infty \frac{y \sin y}{\beta^2 + y^2}\, dy = \int_0^\infty \frac{x \sin\beta x}{1+x^2}\, dx.$$

Но последний интеграл, с точностью до знака, представляет собой $\frac{dJ}{d\beta}$, так что J удовлетворяет простому дифференциальному уравнению

$$\frac{dJ}{d\beta} = -J, \qquad \text{откуда} \quad J = Ce^{-\beta}.$$

Так как $J = C = \frac{\pi}{2}$ при $\beta = 0$, то, окончательно, $J = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}$.

* Интеграл Фруллани [495, 1)].

Остается еще обосновать перестановку интегралов. Если $0<a<A<+\infty$, то легко убедиться в справедливости равенств:

$$\int_a^A \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\int_a^A \cos\beta x\,dx\int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,dy=\int_0^\infty \sin y\,dy\int_a^A e^{-xy}\cos\beta x\,dx=$$

$$=\int_0^\infty \sin y\,dy\left[\frac{\beta\sin\beta A-y\cos\beta A}{y^2+\beta^2}e^{-Ay}-\frac{\beta\sin\beta a-y\cos\beta a}{y^2+\beta^2}e^{-ay}\right]=$$

$$=\beta\sin\beta A\cdot\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-Ay}\,dy-\cos\beta A\cdot\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-Ay}\,dy-$$

$$-\beta\sin\beta a\cdot\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-ay}\,dy+\cos\beta a\cdot\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-ay}\,dy.$$

Равномерная сходимость всех интегралов, соответственно, относительно a и A позволяет перейти под знаком интеграла к пределу при $a\to 0$ и при $A\to\infty$. Отсюда ясно, что рассматриваемое выражение при указанном двойном предельном переходе действительно стремится к пределу $\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}\,dy$.

10) Используя другое тождество

$$\frac{x}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy,$$

можно написать:

$$J=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{x}\,dx\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy.$$

Переставляя здесь интегралы

$$J=\int_0^\infty e^{-y}\,dy\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx,$$

мы в качестве внутреннего интеграла получаем «разрывный множитель» Дирихле [497, 11)]

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0<y<\beta,\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при}\quad 0<\beta<y.\end{cases}$$

Таким образом,

$$J=\frac{\pi}{2}\int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-y}\,dy=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

Для обоснования перестановки интегралов заметим, что интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-y}\cdot\frac{\sin xy}{x}\cdot\cos\beta x\,dy$$

сходится равномерно относительно x (мажоранта ye^{-y}). Поэтому

$$\int\limits_0^{A}\frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\int\limits_0^{A}\frac{\cos\beta x}{x}\,dx\int\limits_0^{A} e^{-y}\sin xy\,dy=\int\limits_0^{\infty} e^{-y}\,dy\int\limits_0^{A}\frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx.$$

Можно ли в последнем интеграле (по y) перейти к пределу при $A\to\infty$ под знаком интеграла? Подинтегральное выражение есть произведение e^{-y} на

$$\int\limits_0^{A}\frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{A}\frac{\sin(y+\beta)x+\sin(y-\beta)x}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{\beta}^{(y+\beta)A}\frac{\sin z}{z}\,dz+\int\limits_0^{(y-\beta)A}\frac{\sin z}{z}\,dz\right\}$$

и стремится при $A\to\infty$ к своему пределу равномерно относительно y, исключая окрестность точки $y=\beta$. Так как второй множитель равномерно ограничен при всех A и y, то подинтегральное выражение имеет мажоранту вида Ce^{-y}, так что при $y=\beta$ и $y=\infty$ (наружный) интеграл сходится равномерно относительно A. Этим оправдывается предельный переход под знаком интеграла, а с ним и перестановка интегралов.

11) В заключение укажем еще один изящный вывод значения интеграла

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Так как

$$\frac{1}{x}=\int\limits_0^{\infty} e^{-xy}\,dy,$$

то

$$I=\int\limits_0^{\infty}\sin x\,dx\int\limits_0^{\infty} e^{-xy}\,dy=\int\limits_0^{\infty}dy\int\limits_0^{\infty} e^{-xy}\sin x\,dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Займемся вопросом о законности перестановки интегралов. Взяв $0<a<A<$ $<+\infty$, легко оправдать равенства

$$\int_a^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_a^A \sin x\, dx \int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \int_0^\infty dy \int_a^A e^{-xy} \sin x\, dx =$$

$$= \int_0^\infty dy \left\{ \frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2} e^{-ay} - \frac{y \sin A + \cos A}{1+y^2} e^{-Ay} \right\} =$$

$$= \sin a \cdot \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay}\, dy + \cos a \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-ay}\, dy -$$

$$- \sin A \cdot \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-Ay}\, dy - \cos A \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-Ay}\, dy.$$

Так как последние два интеграла сходятся равномерно относительно A (для $A \geqslant A_0 > 0$), то, переходя к пределу при $A \to \infty$ под знаком интеграла, видим, что оба они стремятся к 0. Второй интеграл, равномерно сходящийся относительно a (для $a \geqslant 0$), очевидно, стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $a \to 0$. Остается убедиться в том, что первый интеграл, умноженный на $\sin a$, при этом предельном переходе стремится к 0. Имеем:

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay}\, dy = \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2} e^{-t}\, dt = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

$$\int_0^1 < \int_0^1 \frac{t\, dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+a^2) - \ln a, \qquad \int_1^\infty < \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} = C.$$

Отсюда и вытекает требуемое заключение.

§ 4. Дополнения

525. Лемма Арцела. Хотя для вычислительных целей чаще всего достаточно того материала, который изложен в первых трех параграфах, но в теоретических построениях иной раз бывают нужны некоторые более тонкие теоремы, дающие, кстати сказать, более простые условия применимости рассмотренных процессов.

Начнем с доказательства одного вспомогательного утверждения, относящегося к системам промежутков; оно принадлежит Арцела (C. Arzelà).

Лемма. *Пусть в конечном промежутке $[a, b]$ содержатся системы $D_1, D_2, \ldots$ $\ldots, D_k, \ldots$ промежутков, каждая из которых состоит из конечного числа не налегающих друг на друга замкнутых промежутков. Если сумма длин промежутков каждой системы D_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ больше некоторого постоянного положительного числа δ, то найдется, по крайней мере, одна точка $x=c$, принадлежащая бесконечному множеству систем D_k.*

Доказательство. Если промежуток какой-нибудь системы D_k $(k>1)$ налегает на промежутки предшествующих систем $D_1, \ldots, D_{k-1}$ и их