Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(V_0,p_0)}^{(V,p)} \frac{dU}{T}$$

уже не зависит от пути интегрирования, соединяющего постоянную точку (V_0,p_0) с переменной точкой (V, p) и лишь постоянной отличается от указанной выше функции S. Этим интегралом определяется некоторая физическая величина (так называемая э н т р о п и я), уже являющаяся функцией состояния газа и играющая важную роль в тепловых расчетах.

§ 4. Функции с ограниченным изменением

567. Определение функции с ограниченным изменением. Настоящий параграф представляет некоторое отступление от основной линии этой главы. Он посвящен ознакомлению читателя с важным классом функций (указанным в заголовке), который был введен в науку Ж о р д а н о м (C. Jordan). Этот класс функций будет играть основную роль в том обобщении понятия определенного интеграла, которым мы займемся в следующем параграфе. Впрочем, и во многих других вопросах математического анализа класс функций с ограниченным изменением имеет важное значение.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором конечном промежутке $[a, b]$, где $a<b$. Разложим этот промежуток произвольным образом на части с помощью точек деления:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

(подобно тому, как мы это делали при составлении интегральных или римановых сумм, устанавливая понятие определенного интеграла). Из абсолютных величин приращений функции, отвечающих отдельным частичным промежуткам, образуем сумму

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|. \tag{1}$$

Теперь весь вопрос в том, будет ли множество этих чисел, отвечающих различным способам дробления промежутка $[a, b]$ на части, ограничено сверху или нет.

Если суммы (1) *в их совокупности ограничены сверху, то говорят, что функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ имеет* *о г р а н и ч е н н о е и з м е н е н и е* (или ограниченную вариацию). При этом *точную верхнюю границу этих сумм называют* *п о л н ы м и з м е н е н и е м* (или *полной вариацией*) *функции в указанном промежутке* и обозначают символом

$$\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} f(x)=\sup\{v\}.$$

Можно применять это понятие и в случае функции не ограниченного изменения, но тогда *полное изменение будет равно* $+\infty$.

По самому определению точной верхней границы, в обоих случаях, надлежаще выбирая подразделения промежутка $[a, b]$, можно достигнуть произвольной близости сумм v к полному изменению $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$. Иными словами, можно выбрать такую последовательность подразделений, чтобы полное изменение служило пределом для последовательности соответствующих сумм v.

Иногда ставится вопрос об ограниченности изменения функции $f(x)$ в бесконечном промежутке, например, в промежутке $[a, +\infty]$. Говорят, что *функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a, +\infty]$, если она является функцией с ограниченным изменением в любой его конечной части $[a, A]$ и полные изменения $\overset{A}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$ ограничены в их совокупности.* Во всех случаях мы полагаем

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = \sup_{A>a} \left\{ \overset{A}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) \right\}. \tag{2}$$

Отметим, что в этих определениях никакой роли не играет вопрос о непрерывности функции $f(x)$.

Примером функции с ограниченным изменением в конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$ может служить любая ограниченная монотонная функция. Если промежуток $[a, b]$ конечный, то это сразу следует из того, что

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(b) - f(a)|,$$

так что и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = |f(b) - f(a)|$. Для промежутка $[a, +\infty]$, очевидно, будет

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = \sup_{A>a} \{ |f(A) - f(a)| \} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

разумея под $f(+\infty)$, как обычно, предел $\lim\limits_{A \to +\infty} f(A)$.

Дадим теперь пример непрерывной функции, которая, однако, не будет функцией с ограниченным изменением. Положим

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad (\text{для } x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

и рассмотрим, например, промежуток [0, 1]. Если за точки деления этого промежутка принять точки

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

то, как легко убедиться,

$$v=v_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=H_n$$

и [см. 365, 1)]

$$\bigvee_0^1 f(x)=\sup\{v\}=+\infty.$$

568. Классы функций с ограниченным изменением. Мы уже упоминали о том, что монотонная функция имеет ограниченное изменение. Можно следующим образом расширить этот класс функций:

1°. *Если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$, такова, что этот промежуток может быть разложен на конечное число частей*

$$[a_k,\ a_{k+1}]\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ a_0=a,\ a_m=b),$$

в каждой из которых $f(x)$ монотонна, то она имеет в $[a, b]$ ограниченное изменение.*

Разбив произвольным образом промежуток $[a, b]$ на части, составим сумму v. Так как от присоединения каждой новой точки деления сумма v может разве лишь увеличиться**, то, присоединив к точкам деления все точки a_k, о которых была речь выше, мы получим сумму $\bar{v}\geqslant v$. Если выделить из суммы $\bar{v}$ те слагаемые, которые относятся к промежутку $[a_k,\ a_{k+1}]$, то, обозначая их сумму значком (k) наверху, будем иметь

$$\bar{v}^{(k)}=|f(a_{k+1})-f(a_k)|,$$

так что

$$\bar{v}=\sum_{k=0}^{m-1}|f(a_{k+1})-f(a_k)|.$$

Так как произвольная сумма v не превосходит этого числа, то оно и будет полным изменением функции.

---

* Про такую функцию говорят, что она кусочно-монотонна в промежутке $[a, b]$.

** Если между x_i и x_{i+1} вставлена точка x', то слагаемое $|f(x_{i+1})-f(x_i)|$ заменяется суммой

$$|f(x_{i+1})-f(x')|+|f(x')-f(x_i)|\geqslant|f(x_{i+1})-f(x_i)|.$$

2°. *Если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ удовлетворяет условию*

$$|f(\bar{x})-f(x)| \leqslant L|\bar{x}-x|, \tag{3}$$

где $L=\text{const}$, а $\bar{x}$ и x — любые точки промежутка, то она имеет ограниченное изменение, причем*

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant L(b-a).$$

Это следует из неравенства

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1}-f(x_i)| \leqslant L \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=L(b-a).$$

В частности,

3°. *Функция $f(x)$ будет в промежутке $[a, b]$ функцией с ограниченным изменением, если она имеет в нем ограниченную производную*: $|f'(x)| \leqslant L$ (где $L=\text{const}$).

В самом деле, по теореме о среднем в этом случае

$$|f(\bar{x})-f(x)|=|f'(\xi)(\bar{x}-x)| \leqslant L|\bar{x}-x| \qquad (x \gtrless \xi \gtrless \bar{x}),$$

так что выполнено условие Липшица (3).

На основании этого замечания можно, например, утверждать ограниченность изменения функции

$$f(x)=x^2 \sin \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0),\ f(0)=0$$

в любом конечном промежутке, ибо производная ее

$$f'(x)=2x \sin \frac{\pi}{x}-\pi \cos \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0),\ f'(0)=0$$

ограничена. Любопытно отметить, что в каждом промежутке, содержащем точку 0, эта функция «бесконечно колеблется», т. е. бесконечное число раз переходит от возрастания к убыванию, и наоборот.

Обширный класс функций с ограниченным изменением дается следующим предложением:

4°. *Если $f(x)$ в конечном (или даже в бесконечном) промежутке $[a, b]$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:*

$$f(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

---

* Это условие обычно называется *условием Липшица* (R. Lipschitz).

где $\varphi(t)$ предполагается абсолютно интегрируемой в этом промежутке, то $f(x)$ имеет в нем ограниченное изменение. При этом*

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Пусть $[a, b]$ — конечный промежуток; тогда

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|\,dt = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt,$$

откуда и следует наше утверждение.

Если же речь идет о бесконечном промежутке $[a, +\infty]$, то достаточно заметить, что

$$\bigvee_a^A f(x) \leqslant \int_a^A |\varphi(t)|\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Замечание. Можно доказать, что как в случае конечного, так и в случае бесконечного промежутка на самом деле имеет место точное равенство

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Если же функция $\varphi(t)$ в промежутке $[a, b]$ интегрируема, но не абсолютно, то полное изменение $f(x)$ заведомо бесконечно. Мы не будем останавливаться на этом, но поясним лишь последнюю часть замечания примерами.

Пусть $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, так что

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} \quad (x \neq 0),\ f'(0) = \varphi(0) = 0.$$

Тогда, например, для $0 \leqslant x \leqslant 2$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

* Т. е. интегрируемой (хотя бы в несобственном смысле) вместе со своей абсолютной величиной $|\varphi(t)|$.

но в п° 482 мы показали, что интеграл этот — неабсолютно сходящийся. Пользуясь той же идеей, что и там, разложим промежуток [0, 2] точками

$$0,\ \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \sqrt{\frac{2}{2n-1}},\quad \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$
$$\sqrt{\frac{2}{2n-3}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{\frac{2}{3}},\quad 1,\quad \sqrt{2},\quad 2;$$

для соответствующей суммы v, очевидно, будет

$$v > \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_k,$$

откуда и следует, что

$$\bigvee_{0}^{2} f(x)=+\infty.$$

Аналогично этому легко показать, что функция

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

в промежутке $[0, +\infty]$ имеет неограниченное изменение [ср. 476].

569. Свойства функций с ограниченным изменением. Промежуток $[a, b]$, в котором здесь рассматриваются все функции, предполагается конечным.

1°. *Всякая функция с ограниченным изменением ограничена.* В самом деле, при $a < x' \leqslant b$ имеем

$$v'=|f(x')-f(a)|+|f(b)-f(x')| \leqslant \bigvee_{a}^{b} f(x),$$

откуда

$$|f(x')| \leqslant |f(x')-f(a)|+|f(a)| \leqslant |f(a)|+\bigvee_{a}^{b} f(x).$$

2°. *Сумма, разность и произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ с ограниченным изменением также являются функциями с ограниченным изменением.*

Пусть $s(x)=f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$|s(x_{i+1})-s(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1})-f(x_i)|+|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$

и, суммируя по значку i,

$$\sum_i |s(x_{i+1})-s(x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i |f(x_{i+1})-f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1})-g(x_i)| \leqslant \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x),$$

откуда следует

$$\bigvee_a^b s(x) \leqslant \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x).$$

Положим теперь $p(x)=f(x)g(x)$ и пусть для $a\leqslant x\leqslant b$

$$|f(x)|\leqslant K, \quad |g(x)|\leqslant L \qquad (K,\ L=\text{const})$$

[см. 1°]. Очевидно,

$$|p(x_{i+1})-p(x_i)| =$$
$$= |f(x_{i+1})[g(x_{i+1})-g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1})-f(x_i)]| \leqslant$$
$$\leqslant K\cdot|g(x_{i+1})-g(x_i)| + L\cdot|f(x_{i+1})-f(x_i)|,$$

откуда уже легко получить, что

$$\bigvee_a^b p(x) \leqslant K\bigvee_a^b g(x) + L\bigvee_a^b f(x).$$

3°. *Если $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с ограниченным изменением и, сверх того, $|g(x)|\geqslant\sigma>0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет функцией с ограниченным изменением.*

Ввиду свойства 2°, достаточно доказать ограниченность изменения функции $h(x)=\frac{1}{g(x)}$. Имеем

$$|h(x_{i+1})-h(x_i)| = \frac{|g(x_{i+1})-g(x_i)|}{|g(x_i)|\cdot|g(x_{i+1})|} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}|g(x_{i+1})-g(x_i)|,$$

так что

$$\bigvee_a^b h(x) \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\bigvee_a^b g(x).$$

4°. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ и $a<c<b$. Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a, b]$, то она имеет ограниченное изменение и*

в каждом из промежутков $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *и обратно. При этом*

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{5}$$

Пусть $f(x)$ имеет ограниченное изменение в $[a, b]$. Разложим на части каждый из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$ порознь:

$$y_0 = a < y_1 < \ldots < y_m = c, \quad z_0 = c < z_1 < \ldots < z_n = b; \tag{6}$$

этим будет разбит на части и весь промежуток $[a, b]$. Составим суммы отдельно для промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|;$$

соответствующая сумма для промежутка $[a, b]$ будет $v = v_1 + v_2$. Таким образом

$$v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^b f(x)$$

и, следовательно, каждая из сумм v_1, v_2 порознь ограничена, т. е. функция $f(x)$ оказывается с ограниченным изменением в промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$. Выбирая подразделения (6) так, чтобы суммы v_1 и v_2 стремились к соответствующим полным изменениям, в пределе получим

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leqslant \bigvee_a^b f(x). \tag{7}$$

Допустим теперь, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение в каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$. Произведем произвольное разбиение промежутка $[a, b]$ на части. Если точка c не входит в состав точек деления, то мы ее дополнительно введем, отчего, как мы знаем *, сумма v может лишь увеличиться. Сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$v \leqslant v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Отсюда сразу вытекает ограниченность изменения $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и неравенство

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{8}$$

* См. сноску ** на стр. 76.

Наконец, из (7) и (8) следует (5).

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает:

5°. *Если в промежутке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение, то для* $a \leqslant x \leqslant b$ *полное изменение*

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

будет монотонно возрастающей (и ограниченной) функцией от x.

Действительно, если $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, то

$$\bigvee_a^{x''} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t),$$

так что

$$g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t) \geqslant 0 \tag{9}$$

(так как по самому определению полного изменения оно не может быть отрицательным числом).

Теперь становится ясным, что определение полного изменения в бесконечном промежутке $[a, +\infty]$ вместо (2) может быть дано в следующей форме:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \bigvee_a^{A} f(x). \tag{2*}$$

С помощью этого замечания теоремы настоящего n° легко обобщаются и на случай бесконечного промежутка.

570. Критерии для функций с ограниченным изменением. Пусть функция $f(x)$ определена в конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$.

6°. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *имела в промежутке* $[a, b]$ *ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этом промежутке существовала монотонно возрастающая и ограниченная функция* $F(x)$, *такая, что в любой части* $[x', x'']$, $(x' < x'')$ *промежутка* $[a, b]$ *приращение функции* f *по абсолютной величине не превосходит соответствующего приращения функции* F:

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant F(x'') - F(x')\,*$$

---

* Можно было бы, впрочем, ограничиться и неравенством без знака абсолютной величины:

$$f(x'') - f(x') \leqslant F(x'') - F(x').$$

[Функцию $F(x)$, обладающую этим свойством, естественно было бы назвать **мажорантой** для функции $f(x)$.]

Необходимость следует из того, что для функции $f(x)$ с ограниченным изменением роль мажоранты может играть, например, функция

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t),$$

монотонно возрастающая и ограниченная в силу 5°. Неравенство

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant g(x'')-g(x')=\bigvee_{x'}^{x''} f(t)$$

вытекает из самого определения полного изменения функции.

Достаточность для случая конечного промежутка видна сразу из неравенства

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)]=F(b)-F(a),$$

а для бесконечного — получается предельным переходом.

Очень важной является другая форма критерия:

7°. *Для того чтобы функция $f(x)$ имела в промежутке $[a, b]$ ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в этом промежутке в виде разности двух монотонно возрастающих и ограниченных функций:*

$$f(x)=g(x)-h(x). \tag{10}$$

Необходимость. В силу 6°, для функции $f(x)$ с ограниченным изменением существует монотонно возрастающая и ограниченная мажоранта $F(x)$. Положим

$$g(x)=F(x),\quad h(x)=F(x)-f(x),$$

так что (10) выполнено. Остается убедиться в монотонности функции $h(x)$; но при $x'<x''$

$$h(x'')-h(x')=[F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')]\geqslant 0$$

по самому определению мажоранты.

Достаточность ясна из того, что при наличии равенства (10) функция

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

служит мажорантой, ибо

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant[g(x'')-g(x')]+[h(x'')-h(x')]=F(x'')-F(x').$$

В виде упражнения предлагается читателю:

1) опираясь на установленные критерии, наново доказать утверждения 1°—4° предыдущего n°;

2) для рассмотренных в n° **568** классов функций с ограниченным изменением непосредственно установить наличие монотонной мажоранты и возможность представления в виде разности монотонных функций.

По поводу теоремы 7° сделаем дополнительное замечание. Так как функции g и h обе ограничены, то путем прибавления к ним одной и той же постоянной всегда можно добиться того, чтобы они обе стали положительными. Точно так же, прибавляя к функциям g и h какую-либо возрастающую в строгом смысле, но ограниченную функцию (например, $\operatorname{arctg} x$), придем к такому разложению вида (10), где обе функции будут уже строго возрастающими.

Установленная в 7° возможность сведéния функций с ограниченным изменением в некотором смысле к монотонным функциям не должна создавать у читателя иллюзий относительно «простоты» поведения функций с ограниченным изменением: ведь бесконечно колеблющаяся функция

$$f(x)=x^2 \sin\frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0)=0,$$

которая была рассмотрена в n° **568**, тоже допускает представление в виде разности двух монотонных функций!

Тем не менее, именно в связи с представлением (10), некоторые свойства монотонных функций переносятся и на функции с ограниченным изменением. Так, если вспомнить, что для монотонной ограниченной функции $f(x)$ при любом $x=x_0$ существуют односторонние пределы, слева и справа,

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \tag{11}$$

[**71**, 1°], то, применяя это свойство к каждой из функций g и h, заключим, что и

8°. *Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением в промежутке $[a, b]$ в любой точке $x=x_0$ этого промежутка существуют конечные односторонние пределы* (11)*.

571. Непрерывные функции с ограниченным изменением.

9°. *Пусть в промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ с ограниченным изменением. Если $f(x)$ в некоторой точке $x=x_0$ непрерывна, то в этой же точке непрерывна и функция*

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t).$$

* Конечно, если x_0 есть один из концов промежутка, то речь может идти только об одном из этих пределов.

Предположим, что $x_0 < b$, и докажем, что $g(x)$ непрерывна в точке x_0 справа. С этой целью, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, разложим промежуток $[x_0, b]$ точками

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на части так, чтобы оказалось

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \varepsilon. \tag{12}$$

Опираясь на непрерывность функции $f(x)$, можно предположить при этом, что x_1 уже настолько близко к x_0, что выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(в случае надобности, можно было бы вставить еще одну точку деления, отчего сумма v разве лишь увеличилась бы). Тогда из (12) следует, что

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) < \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| <$$

$$< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b} f(t)$$

стало быть,

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon$$

или, наконец,

$$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon.$$

Отсюда и подавно

$$0 \leqslant g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon,$$

следовательно, ввиду произвольности ε,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0).$$

Аналогично доказывается, что (при $x_0 > a$)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0),$$

т. е. что $g(x)$ в точке x_0 непрерывна слева.

Из доказанной теоремы вытекает такое следствие:

10°. *Непрерывная функция с ограниченным изменением представима в виде разности двух непрерывных же возрастающих функций.*

В самом деле, если вернуться к доказательству предложения 7° (в части, относящейся к необходимости) и в качестве монотонной мажоранты взять именно функцию

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t),$$

непрерывную в силу 9°, то и получится требуемое разложение.

В заключение покажем, что для непрерывной функции в определении полного изменения:

$$\bigvee_a^b f(x)=\sup\,\{v\}$$

supremum можно заменить пределом как в том случае, когда полное изменение конечно, так и в том, когда оно бесконечно.

11°. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в конечном промежутке $[a, b]$. Разложив этот промежуток на части точками*

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$$

и составив сумму

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|,$$

будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0} v=\bigvee_a^b f(x), \tag{13}$$

где $\lambda=\max(x_{i+1}-x_i)$ *.

Как уже отмечалось, сумма v не убывает от добавления новой точки деления **. С другой стороны, если эта новая точка попадает в промежуток между x_k и x_{k+1}, то увеличение суммы v, проистекающее из появления этой точки, не превосходит удвоенного колебания функции $f(x)$ в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

Заметив это, возьмем какое-либо число

$$A<\bigvee_a^b f(x)$$

и найдем сумму v^* такую, что

$$v^*>A. \tag{14}$$

---

* Здесь имеется в виду предельный переход такого же типа, как и для римановых сумм или сумм Дарбу [259, 30].

** См. сноску ** на стр. 76.

Пусть эта сумма отвечает следующему способу деления:

$$x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b.$$

Выберем теперь столь малое $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m},$$

лишь только $|x'' - x'| < \delta$ (это сделать можно ввиду равномерной непрерывности функции f). Докажем, что для любого способа деления, которому отвечает $\lambda < \delta$, будет

$$v > A. \tag{15}$$

В самом деле, имея подобный способ деления (I), составим новый способ (II), получающийся из (I) добавлением всех точек x_k^*. Если способу (II) отвечает сумма v_0, то

$$v_0 \geqslant v^*. \tag{16}$$

С другой стороны, способ (II) получается из (I) путем (самое большее) m-кратного добавления по одной точке. Так как каждое добавление вызывает увеличение суммы v, меньшее, чем $\frac{v^* - A}{2m}$, то

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}.$$

Отсюда, а также из (16) и (14), следует, что

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geqslant \frac{A + v^*}{2} > A.$$

Итак, при $\lambda < \delta$ выполнено (15); но, поскольку всегда

$$v \leqslant \bigvee_a^b f(x),$$

о действительно имеет место (13), что и требовалось доказать.

572. Спрямляемые кривые. Понятие функции с ограниченным изменением находит себе применение в вопросе о спрямляемости кривой линии, в связи с которым названное понятие и было впервые введено Жорданом. Изложением этого вопроса мы хотим заключить настоящий параграф.

Пусть кривая (K) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{17}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предположены только непрерывными. Допустим при этом, что кривая не имеет кратных точек.

Взяв вершины вписанной в кривую ломаной в точках кривой, отвечающих значениям параметра

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T, \tag{18}$$

будем иметь для периметра ломаной выражение

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}.$$

Как мы знаем [**247**], длина s рассматриваемой дуги кривой определяется как точная верхняя граница множества всех периметров p. Если эта граница конечна, кривая и называется спрямляемой. Достаточные условия спрямляемости мы указали уже в первом томе [**278**]. Нижеследующая теорема устанавливает самые общие — необходимые и достаточные условия для этого.

Теорема Жордана. *Для спрямляемости кривой* (17) *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *обе имели ограниченное изменение в промежутке* $[t_0,\ T]$.

Необходимость. Если кривая спрямляема и имеет длину s, то при любом подразделении (18) промежутка $[t_0,\ T]$ имеем

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant s,$$

откуда, в силу очевидного неравенства

$$|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2},$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant s,$$

так что функция $\varphi(t)$, действительно, имеет ограниченное изменение. Аналогичное заключение применимо и к функции $\psi(t)$.

Достаточность. Допустим теперь, что обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют ограниченное изменение. Ввиду очевидного неравенства

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|+\sum_{i=0}^{n-1}|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)|$$

можно утверждать, что все числа p ограничены сверху, например, числом

$$\mathop{\mathrm{V}}_{t_0}^{T}\varphi(t)+\mathop{\mathrm{V}}_{t_0}^{T}\psi(t),$$

а отсюда по доказанному выше уже вытекает спрямляемость кривой (K).

Присовокупим еще два важных замечания.

Из только что сказанного явствует, что вся длина s кривой (17) удовлетворяет неравенству

$$s \leqslant \bigvee_{t_0}^{T} \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^{T} \psi(t).$$

Рассматривая переменную дугу $s = s(t)$, отвечающую промежутку $[t_0, t]$ изменения параметра, применим написанное неравенство к промежутку $[t, t + \Delta t]$, где, скажем, $\Delta t > 0$. Тогда

$$0 < \Delta s < \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \psi(t).$$

Так как при бесконечно малом Δt обе вариации справа [в силу **571** 9°], а с ними и Δs, также бесконечно малы, то мы приходим к заключению: *для непрерывной спрямляемой кривой переменная дуга $s(t)$ является непрерывной функцией параметра.*

Так как эта функция монотонно возрастает от 0 до длины S всей кривой, то, каково бы ни было натуральное число n, можно себе представить кривую разделенной на n частей длины $\frac{S}{n}$ [теорема Коши, **82**]. Если плоскость покрыта сеткой квадратов со стороной $\frac{S}{n}$, то каждая из упомянутых частей не может встретить больше четырех таких квадратов. Таким образом, сумма площадей всех квадратов, встречающих нашу кривую, во всяком случае не превосходит $4n \cdot \frac{S^2}{n^2}$ и может быть сделана сколь угодно малой: *кривая имеет площадь нуль.*

Отсюда — такое интересное следствие: *область, ограниченная спрямляемой кривой (или несколькими такими кривыми), заведомо квадрируема,* т. е. имеет площадь [**337**].

§ 5. Интеграл Стилтьеса

573. Определение интеграла Стилтьеса. Интеграл Стилтьеса (Th. J. Stieltjes) является непосредственным обобщением обычного определенного интеграла Римана [**295**]. Определяется он следующим образом.

Пусть в промежутке $[a, b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

промежуток $[a, b]$ на части и положим $\lambda = \max \Delta x_i$. Выбрав в каждой из частей $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ по точке ξ_i, вычислим