I
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1

КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ, В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Координаты на прямой

На прямой зафиксируем одно из двух определяемых ею направлений и назовем его положительным, другое – отрицательным. Прямую, на которой указано положительное направление, называют осью.

Отрезок, ограниченный точками A и B, называют направленным отрезком или вектором, если указано, какая из данных точек является началом, какая – концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначают **AB**.

Величиной направленного отрезка **AB** некоторой оси называют его длину, взятую со знаком плюс, когда направление этого отрезка совпадает с положительным направлением данной оси, и со знаком минус, когда оно совпадает с отрицательным направлением оси. Величину направленного отрезка **AB** обозначают AB.

Координатной осью называют прямую, на которой зафиксированы начало отсчета, положительное направление и выбран масштаб для измерения длин.

Координатой точки M координатной оси (рис. 1.1) называют величину OM направленного отрезка **OM**, где O – начало координат. Если обозначить координату точки M через x, то по определению $x = OM$.

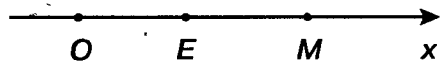

Рис. 1.1

Запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величина направленного отрезка $\mathbf{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \tag{1.1}$$

а расстояние между ними – по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \tag{1.2}$$

Простым отношением трех различных точек M_1, M_2, M, лежащих на одной прямой и взятых в указанном порядке, называют число

$$l = \frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1.3}$$

где M_1M и MM_2 – величины направленных отрезков $\mathbf{M_1M}$ и $\mathbf{MM_2}$.

Если точка M принадлежит отрезку $\mathbf{M_1M_2}$, простое отношение положительно ($l > 0$), так как числитель и знаменатель в последней формуле одного знака. В этом случае говорят, что точка M делит отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ внутренним образом. Если точка M лежит вне отрезка $\mathbf{M_1M_2}$, то $l < 0$ (числитель и знаменатель в формуле имеют противоположные знаки); точка M делит отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ внешним образом. Если точки M_1 и M совпадают, то $l = 0$.

Пусть $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$ – точки координатной оси Ox, тогда

$$l = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \tag{1.4}$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}. \tag{1.5}$$

Эта формула определяет координату точки M, делящей направленный отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ в данном отношении l.

Если точка M совпадает с серединой отрезка $\mathbf{M_1M_2}$, то $l = 1$, поэтому ее координата определяется формулой

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1.6}$$

Пример 1.1. Даны две точки $M_1(4)$, $M_2(-3)$. Найти величину направленного отрезка $\mathbf{M_1M_2}$ и расстояние между точками.

В данном случае $x_1 = 4, x_2 = -3$; по формулам (1.1) и (1.2) находим $M_1M_2 = -3 - 4 = -7$, $\rho(M_1, M_2) = |-3 - 4| = 7$.

1.2. Координаты на плоскости

Прямоугольными декартовыми координатами точки M называют числа, определяемые формулами

$$x = OM_x,\ y = OM_y,$$

где OM_x – величина отрезка $\mathbf{OM_x}$ оси Ox, OM_y – величина направленного отрезка $\mathbf{OM_y}$ оси Oy (рис. 1.2).

Полярная система координат на плоскости определяется точкой O (полюс), исходящим из нее лучом OP (полярная ось), масштабным отрезком e и направлением отсчета углов (рис. 1.3).

Полярными координатами точки M, не совпадающей с полюсом, называют расстояние $\rho = |OM|$ (полярный радиус) от точки M до полюса O и величину угла φ (полярный угол) между полярной осью OP и лучом OM. Для полюса считают $\rho = 0$ (φ не определен). Полярный угол имеет бесконечное множество значений, главным значением его называют значение, удовлетворяющее условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой и полярной систем координат (рис. 1.4) связь между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами ρ и φ выражается формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi; \tag{1.7}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.8}$$

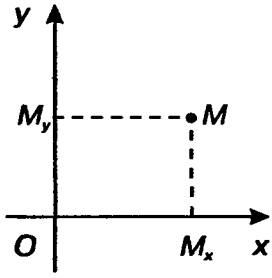

Рис. 1.2

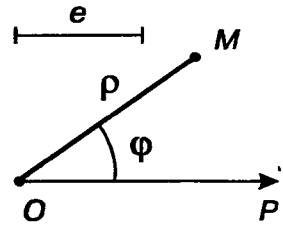

Рис. 1.3

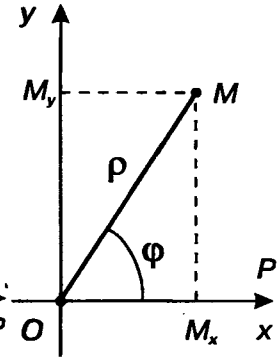

Рис. 1.4

Пример 1.2. Найти прямоугольные декартовы координаты точек $A(2, \pi/4)$, $B(4, \pi/4)$ в системе, для которой полюс совпадает с началом координат, полярная ось – с положительной полуосью Ox.

Применяя формулы (1.7), находим координаты точки A:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ A(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Аналогично находим координаты точки B: $x = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$.

1.3. Расстояние между двумя точками на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.9)$$

В частном случае, когда одна из точек, например M_1, совпадает с началом координат, формула (1.9) принимает вид

$$\rho(O, M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.10)$$

Пример 1.3. Вычислить расстояние между точками $M_1(6, -3)$, $M_2(9, -7)$ и расстояние от точки M_2 до начала координат.

По формулам (1.9) и (1.10) получаем

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(9-6)^2 + ((-7)-(-3))^2} = 5, \ \rho(O, M_2) = \sqrt{9^2 + (-7)^2} = \sqrt{130}.$$

Пример 1.4. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A(-1, -3)$, $B(2, -3)$, $C(2, 1)$.

По формуле (1.9) находим

$$a = \rho(B, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-3))^2} = 4,$$

$$b = \rho(A, C) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = 5,$$

$$c = \rho(A, B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-3-(-3))^2} = 3.$$

Следовательно, $P = a + b + c = 12$.

1.4. Деление отрезка в данном отношении

Отношением, в котором точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, делит отрезок $\mathbf{M_1M_2}$, называют число l, определяемое формулой (1.3).

Если даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ в отношении l, определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \ y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}. \qquad (1.11)$$

Когда точка M является серединой отрезка $\mathbf{M_1M_2}$, то ее координаты вычисляют по формулам

$$x = (x_1 + x_2)/2, \ y = (y_1 + y_2)/2. \qquad (1.12)$$

Пример 1.5. Даны две точки $M_1(-1,-2)$, $M_2(3,4)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, которая в три раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится вне отрезка M_1M_2. Найти середину этого отрезка.

Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $l=-1/3$. По формулам (1.11), считая в них $x_1=-1$, $y_1=-2$, $x_2=3$, $y_2=4$, находим

$$x=\frac{-1+(-1/3)\,3}{1+(-1/3)}=-3,\ y=\frac{-2+(-1/3)\,4}{1+(-1/3)}=-5;\ M\,(-3,-5).$$

С помощью формул (1.12) находим точку $N=(1,1)$ – середину отрезка M_1M_2.

Пример 1.6. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

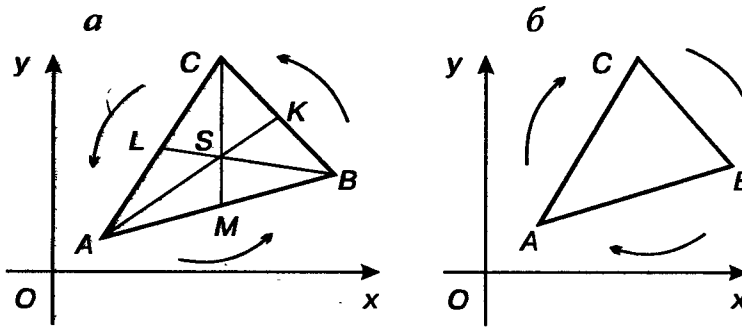

Рис. 1.5

Пусть $S(x,y)$ – точка пересечения медиан AK, BL, CM треугольника ABC (рис. 1.5, а). Так как точка L – середина отрезка AC, то она имеет координаты $x_l=(x_1+x_3)/2$, $y_l=(y_1+y_3)/2$. Отрезок BL точкой S делится в отношении $l=2/1=2$. Считая точку B первой, точку L второй, по формулам (1.11) находим

$$x=\frac{x_2+2(x_1+x_3)/2}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_2+2(y_1+y_3)/2}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Следовательно, координаты точки пересечения медиан треугольника по координатам его вершин определяются формулами

$$x=(x_1+x_2+x_3)/3,\ y=(y_1+y_2+y_3)/3. \tag{1.13}$$

1.5. Центр тяжести системы масс

Дана система масс $m_1, m_2, \cdots, m_n$, помещенных соответственно в точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \cdots, M_n(x_n, y_n)$ некоторой плоскости. Формулы, выражающие координаты центра тяжести этой системы масс, имеют вид

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \quad y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

или

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \tag{1.14}$$

где знаком Σ обозначена сумма однотипных слагаемых.

Пример 1.7. В вершинах $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ треугольника ABC сосредоточены равные массы m. Найти центр тяжести этой материальной системы.

Формулы (1.14) при $n = 3$ принимают вид

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Используя условие $m_1 = m_2 = m_3$, получаем

$$x = \frac{x_1 m + x_2 m + x_3 m}{m + m + m} = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{y_1 m + y_2 m + y_3 m}{m + m + m} = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Замечание. Из последнего примера и формул (1.13) следует, что центр тяжести данной системы находится в точке пересечения медиан треугольника.

1.6. Площадь треугольника

Каковы бы ни были три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле

$$\pm S = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \tag{1.15}$$

Правая часть формулы равна $+S$ в том случае, когда кратчайший поворот отрезка AB к отрезку AC положителен (рис. 1.5, а), и $-S$, когда указанный поворот отрицателен (рис. 1.5, б).

В формуле (1.15) берут знак плюс, когда выражение в квадратных скобках положительно, и минус, когда оно отрицательно.

Пример 1.8. Даны две точки $A(3,5)$, $B(6,-2)$. На оси Oy найти такую точку C, чтобы площадь треугольника ABC равнялась 15 квадратным единицам.

Пусть $C(0, y)$ – искомая точка ($x = 0$, так как точка лежит на оси Oy). В формулу (1.15) подставим значения $S = 15$, $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 6$, $y_2 = -2$, $x_3 = 0$, $y_3 = y$ и найдем y:

$$\pm 15 = \frac{1}{2}[(6-3)(y-5)-(0-3)(-2-5)] = \frac{1}{2}[3(y-5)-21],$$

$$\pm 15 = \frac{1}{2}(3y-36),\ \pm 30 = 3y-36,\ y_1 = 2,\ y_2 = 22.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют координаты точек $C_1(0, 2)$, $C_2(0, 22)$.

1.7. Уравнение линии в декартовых координатах

Уравнением линии относительно фиксированной системы координат называют такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной линии.

Уравнение линии в декартовых координатах в общем виде записывается так:

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ – функция переменных x и y.

Пример 1.9. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4, 3)$ и $M_2(2, 5)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данного геометрического места. По условию $|M_1M| = |M_2M|$. По формуле (1.9) получаем

$$|M_1M| = \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2},\ |M_2M| = \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $|M_1M| = |M_2M|$, находим уравнение данного множества точек:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Упростим это уравнение. Возведем в квадрат обе части уравнения и раскроем скобки в подкоренных выражениях:

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9 = x^2-4x+4+y^2-10y+25.$$

Произведя преобразования, получим $3x + y - 1 = 0$. Это уравнение прямой линии.

Пример 1.10. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a,b)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности. По определению окружности (как множества точек, равноудаленных от данной точки) для любой ее

точки имеем $|MC| = R$. Выражая расстояние между точками M и C по формуле $|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ и подставляя его в левую часть данного равенства, получим уравнение $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$, которое можно записать так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (1.16)$$

Уравнение (1.16) является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Если точка C совпадает с началом координат, то уравнение (1.16) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (1.17)$$

Замечание. Если точка $N(x, y)$ лежит внутри круга радиуса R с центром в начале координат, то ее координаты удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < R^2$; если вне указанного круга, то неравенству $x^2 + y^2 > R^2$.

Пример 1.11. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(4, 0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(1, 0)$. Найти уравнение траектории движения точки M.

Текущие координаты точки M в прямоугольной декартовой системе координат обозначим через x, y. По условию $|MA| = 2|MB|$. Выразим длины отрезков MA и MB через координаты соответствующих точек с помощью формулы (1.9):

$$|MA| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}, \ |MB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $|MA| = 2|MB|$, получаем уравнение траектории движения точки M: $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Упростим это уравнение, для чего возведем в квадрат обе части и приведем подобные члены

$$(x-4)^2 + y^2 = 4((x-1)^2 + y^2), \quad x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2),$$
$$12 = 3x^2 + 3y^2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Итак, траекторией движения точки M является окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

1.8. Пересечение линий

Координаты точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$, находят из системы этих уравнений

$$F(x, y) = 0, \ \Phi(x, y) = 0. \qquad (1.18)$$

Число действительных решений равно числу точек пересечения. Если система (1.18) не имеет действительных решений, то данные линии не пересекаются.

Пример 1.12. Найти точки пересечения линий $x^2 + y^2 = 10$, $x + y - 4 = 0$.

Из последнего уравнения выражаем $y = -x + 4$ и подставляем в первое урав-

нение: $x^2+(-x+4)^2=10$, $2x^2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Подставим эти значения в уравнение $y=-x+4$ и найдем $y_1=3$, $y_2=1$. Следовательно, получены две точки пересечения $M(1,3)$, $N(3,1)$.

Пример 1.13. Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2+(y-6)^2=25$, $(x+2)^2+(y-6)^2=32$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему уравнений

$$x^2+y^2-10x-12y+36=0,$$
$$x^2+y^2+4x-12y+8=0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $-14x+28=0$, откуда $x=2$. Второе уравнение системы при $x=2$ сводится к квадратному относительно y: $y^2-12y+20=0$. Решив его, найдем $y_1=2$, $y_2=10$. Следовательно, данные окружности пересекаются в точках $M_1(2,2)$, $M_2(2,10)$.

1.9. Уравнение линии в полярных координатах

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах в общем виде можно записать так:

$$F(\rho,\varphi)=0,$$

где $F(\rho,\varphi)$ – функция переменных ρ и φ (ρ, φ – полярные координаты). Если это уравнение разрешимо относительно ρ, то его можно представить в виде $\rho=\rho(\varphi)$.

Пример 1.14. Составить уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей от нее отрезок, длина которого равна a.

Обозначим буквой A точку пересечения данной прямой с полярной осью OP (рис. 1.6). Пусть $M(\rho,\varphi)$ – произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника OAM находим, что $\rho\cos\varphi=a$. Полученное уравнение является искомым; ему удовлетворяют координаты любой точки данной прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой прямой.

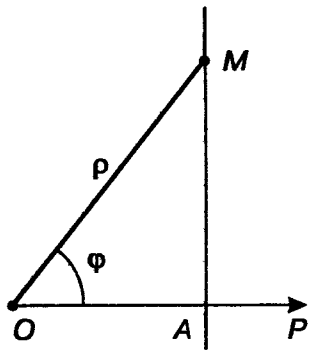

Рис. 1.6

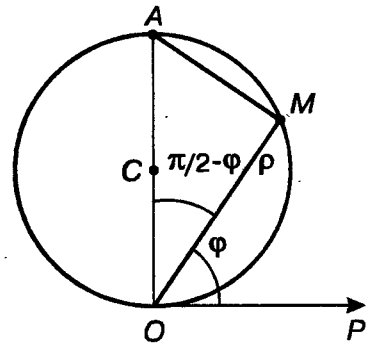

Рис. 1.7

Пример 1.15. Составить уравнение окружности радиуса a, касающейся полярной оси в полюсе, центр которой расположен выше полярной оси (рис. 1.7).

Пусть $M(\rho, \varphi)$ – произвольная точка окружности, OA – диаметр окружности, равный $2a$. Так как в треугольнике OAM угол при вершине M прямой, угол при вершине O равен $\pi/2-\varphi$, то $2a\cos(\pi/2-\varphi)=\rho$, или $\rho=2a\sin\varphi$. Это искомое уравнение данной окружности.

1.10. Параметрические уравнения линии

Уравнения вида

$$x=f(t),\ y=\varphi(t) \tag{1.19}$$

называются параметрическими уравнениями линии, если при изменении t в некотором промежутке формулы (1.19) дают координаты любой точки данной линии и *только таких точек.*

Если линия задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярных координатах, то ее параметрические уравнения можно записать так:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \tag{1.20}$$

В уравнениях (1.20) роль параметра играет полярный угол φ.

Пример 1.16. Составить параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

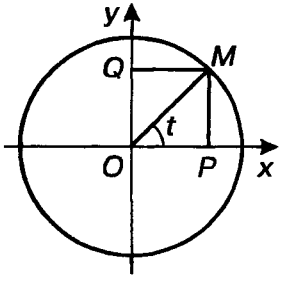

Рис. 1.8

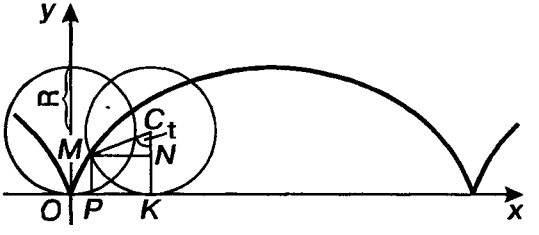

Рис. 1.9

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности, t – величина угла, образуемого отрезком OM и осью абсцисс, P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на координатные оси (рис. 1.8). Так как по определению $x=OP$, $y=OQ$ и $OP=R\cos t$, $OQ=R\sin t$, то $x=R\cos t$, $y=R\sin t$.

Следовательно, параметрические уравнения данной окружности имеют вид $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, где $0\le t<2\pi$.

Исключив из этих уравнений параметр t (для чего возведем в квадрат оба равенства и почленно сложим), получим уравнение $x^2+y^2=R^2$ (см. уравнение (1.17)).

Пример 1.17. Составить параметрические уравнения циклоиды. Циклоидой называют линию, являющуюся траекторией фиксированной точки окружности радиуса R, катящейся по прямой.

Указанную прямую примем за ось Ox декартовой прямоугольной системы координат (рис. 1.9). Предположим, что фиксированная точка при начальном положении окружности находилась в начале координат, а после того как окружность повернулась на угол t, заняла положение M.

Поскольку $x = OP = OK - PK$, $y = MP = CK - CN$ и $OK = \overset{\frown}{MK} = Rt$, $PK = MN = R\sin t$, $CK = R$, $CN = R\cos t$, то $x = Rt - R\sin t$, $y = R - R\cos t$, или

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t). \tag{1.21}$$

Уравнения (1.21) называются параметрическими уравнениями циклоиды.

1.11. Преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости

Одна и та же точка имеет различные координаты в разных системах декартовых координат. Существует связь между координатами точки в разных системах координат.

Параллельный перенос. Пусть даны две системы декартовых прямоугольных координат с общим масштабным отрезком: Oxy (старая) и O_1XY (новая), соответствующие оси которых параллельны (рис. 1.10). Положительные полуоси имеют

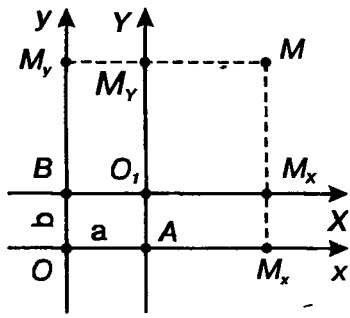

Рис. 1.10

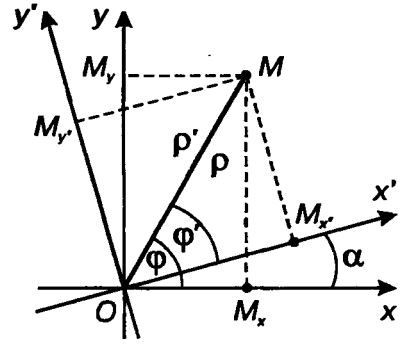

Рис. 1.11

одинаковые направления, начало новой системы находится в точке $O_1(a, b)$, старые координаты которой $x = a$, $y = b$ (новые координаты ее равны нулю). Относительно таких систем говорят, что одна получена из другой путем параллельного переноса.

Старые координаты x, y точки M через ее новые координаты X, Y и старые координаты a, b нового начала O_1 выражаются формулами

$$x = X + a,\ y = Y + b, \tag{1.22}$$

откуда

$$X = x - a,\ Y = y - b. \tag{1.23}$$

Поворот координатных осей. Новая система $Ox'y'$ получена путем поворота старой на угол α вокруг точки O (рис. 1.11). Старые декартовы прямоугольные x, y

точки M через ее новые координаты x', y' выражаются формулами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \qquad (1.24)$$

Чтобы выразить x', y' через x, y, необходимо разрешить систему (1.24) относительно x', y'. Можно сделать проще: считать систему $Ox'y'$ старой, тогда переход к новой системе Oxy совершается поворотом на угол $(-\alpha)$, поэтому в формулах (1.24) достаточно поменять местами x и x', y и y', записать $(-\alpha)$ вместо α.

В общем случае, когда даны две системы Oxy и $Ox'y'$ (рис. 1.12), вводя промежуточную систему $O'x''y''$ и применяя последовательно формулы (1.22) и (1.24), получаем

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{aligned} \qquad (1.25)$$

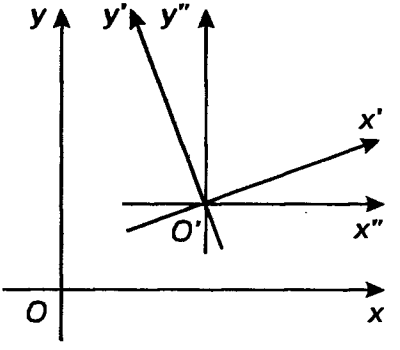

Рис. 1.12

Замечание. Система координат Oxy, в которой кратчайший поворот положительной полуоси Ox до совпадения с положительной полуосью Oy совершается против часовой стрелки, называется правой; если указанный поворот совершается по часовой стрелке, система называется левой. Формулы (1.25) остаются прежними, если обе системы координат являются левыми. Если одна система правая, другая левая, то в формулах (1.25) изменится знак перед y', так как в случае простейшего преобразования координат разноименных систем формулы имеют вид $x = x'$, $y = -y'$.

1.12. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Прямоугольная декартова система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, сами оси – координатными осями, первая из них – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Обозначим начало координат буквой O; координатные оси будем обозначать соответственно через Ox, Oy, Oz (рис. 1.13).

Пусть M – произвольная точка пространства; проведем через нее три плоскости, перпендикулярные координатным осям, и точки пересечения с осями обозначим соответственно через M_x, M_y, M_z. Прямоугольными декартовыми координатами точки M называются числа, определяемые формулами

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z,$$

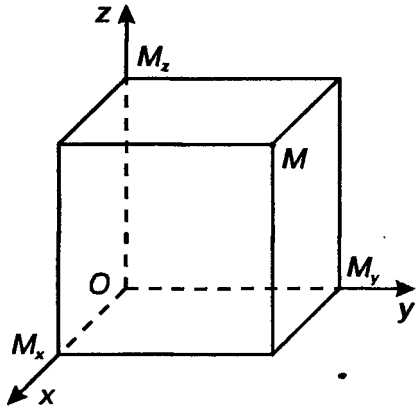

Рис. 1.13

где OM_x, OM_y, OM_z – величины направленных отрезков $\mathbf{OM_x}$, $\mathbf{OM_y}$, $\mathbf{OM_z}$ соответствующих координатных осей. Число x называется первой координатой или абсциссой, число y – второй координатой или ординатой, число z – третьей координатой или аппликатой точки M.

Координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz делят все точки пространства, не принадлежащие этим плоскостям, на восемь частей, называемых октантами.

Таблица 1.1

Координата	Октант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

Начиная с I октанта, в котором все координаты положительны, пронумеруем октанты I, II, III, IV верхнего полупространства ($z > 0$) против часовой стрелки (для наблюдателя со стороны положительной оси Oz). В нижнем полупространстве ($z < 0$) проведем соответствующую нумерацию октантов V, VI, VII, VIII так, чтобы V находился под I, VI – под II, VII – под III, VIII – под IV. Знаки координат точек в различных октантах приведены в табл. 1.1.

Очевидно, знаки координат однозначно определяют октант пространства.

1.13. Расстояние между двумя точками в пространстве

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – две любые точки пространства, то расстояние между ними определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.26)$$

В частном случае, когда точка M_1 совпадает с началом координат ($x_1 = y_1 = z_1 = 0$), то формула (1.26) принимает вид

$$\rho(O, M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \qquad (1.27)$$

Пример 1.18. Вычислить расстояние между точками $M_1(1,-2,2)$ и $M_2(3,-1,4)$, а также расстояние от точки M_2 до начала координат.

По формулам (1.26) и (1.27) соответственно получаем

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2+(4-2)^2}=3,$$

$$\rho(O, M_2)=\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}.$$

Замечание. Формулы (1.26) и (1.27) упрощаются, когда точки M_1 и M_2 лежат в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, или в самой этой плоскости. В этом случае получаем формулы (1.9) и (1.10).

1.14. Цилиндрические и сферические координаты

В плоскости П фиксируем точку O и исходящий из нее луч OP (рис. 1.14). Через точку O проведем прямую, перпендикулярную плоскости П, и укажем на ней положительное направление; полученную ось обозначим Oz. Выберем масштаб для измерения длин. Пусть M – произвольная точка пространства, N – ее проекция на плоскость П, M_z – проекция на ось Oz. Обозначим через ρ и φ полярные координаты точки N в плоскости П относительно полюса O и полярной оси OP. Цилиндрическими координатами точки M называются числа ρ, φ, z, где ρ, φ – полярные координаты точки N $(\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$, $z = OM_z$ – величина направленного отрезка $\mathbf{OM_z}$ оси Oz. Запись $M(\rho, \varphi, z)$ обозначает, что точка M имеет цилиндрические координаты ρ, φ, z. Наименование «цилиндрические координаты»

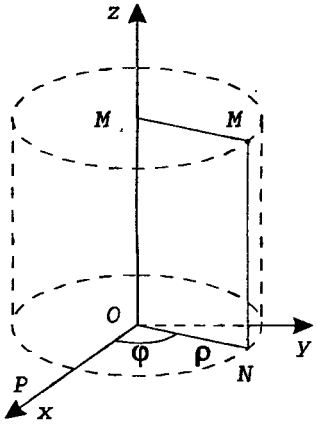

Рис. 1.14

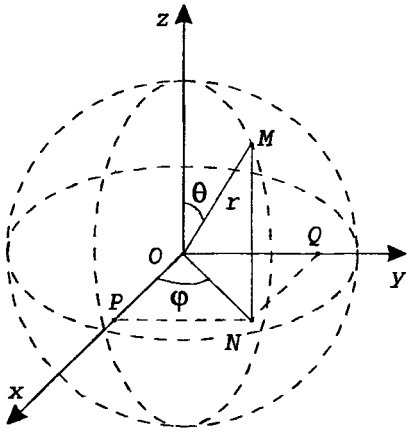

Рис. 1.15

объясняется тем, что координатная поверхность $\rho = \text{const}$ (т. е. множество точек, имеющих одну и ту же первую координату ρ) является цилиндром (на рис. 1.14 он изображен штрихами).

Если выбрать систему прямоугольных декартовых координат так, как показано на рис. 1.14, то декартовы координаты x, y, z точки M будут связаны с ее цилиндрическими координатами ρ, φ, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \tag{1.28}$$

Сферические координаты вводят следующим образом. Выберем масштаб для измерения длин отрезков, фиксируем плоскость П с точкой O и полуосью Ox, ось Oz, перпендикулярную плоскости П (рис. 1.15). Пусть M – произвольная точка пространства (отличная от O), N – проекция ее на плоскость П, r – расстояние точки M до начала координат, θ – угол, образуемый отрезком **OM** с осью Oz, φ – угол, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oz), чтобы она совпала с лучом ON; θ называется широтой, φ – долготой.

Сферическими координатами точки M называются три числа r, θ, φ, определенные выше. Если точка M имеет сферические координаты r, θ, φ, то пишут $M(r, \theta, \varphi)$.

Наименование «сферические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $r = \text{const}$ (т.е. множество точек, имеющих одну и ту же координату r) является сферой (на рис. 1.15 одна из таких сфер изображена штрихами); фиксировав другое значение r, получим другую сферу.

Для того чтобы соответствие между точками пространства и тройками сферических координат r, θ, φ было взаимно однозначным, обычно считают, что r, θ, φ изменяются в следующих границах: $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Если выбрать оси прямоугольной декартовой системы координат так, как указано на рис. 1.15, то декартовы координаты x, y, z точки M связаны с ее сферическими координатами r, θ, φ формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \tag{1.29}$$