Глава 2

ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Алгебраической линией (кривой) n-го порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат. Линии первого порядка определяются уравнением $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$, а линии второго порядка – уравнением $Ax^2+Bxy+Cy^2+ \quad +Dx+Ey+F=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Линии первого порядка – прямые. К линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола.

2.1. Прямая на плоскости

Прямую линию на плоскости относительно системы декартовых прямоугольных координат можно задать различными способами. Прямая однозначно определяется углом, образуемым ею с осью Ox, и величиной направленного отрезка, отсекаемого на оси Oy, координатами двух точек и т. п.

Различные виды уравнения прямой на плоскости. Прямая, параллельная оси Oy прямоугольной декартовой системы координат (рис. 2.1), пересекающая ось Ox в точке $A(a, 0)$, имеет уравнение

$$x=a. \tag{2.1}$$

Угловым коэффициентом прямой называют тангенс угла α наклона ее к положительной полуоси Ox прямоугольной декартовой системы координат

$$k=\operatorname{tg}\alpha \quad (0\leq\alpha<\pi).$$

Угловой коэффициент прямой через координаты двух ее различных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

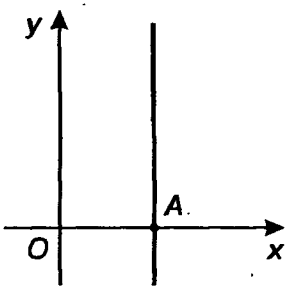

Рис. 2.1

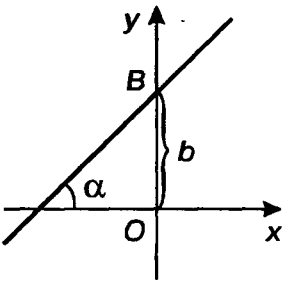

Рис. 2.2

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.2}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \tag{2.3}$$

где k – угловой коэффициент, $b = OD$ – величина направленного отрезка **OB**, отсекаемого на оси Oy (рис. 2.2).

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, записывается так:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.4}$$

Уравнение прямой проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1). \tag{2.5}$$

Параметрические уравнения прямой проходящей через эти точки:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \tag{2.6}$$

где t принимает все действительные значения.

Уравнением прямой в отрезках называют уравнение

$$x/a + y/b = 1, \tag{2.7}$$

где $a = OA$, $b = OB$ – величины направленных отрезков, отсекаемых соответственно на оси Ox и оси Oy.

Общим уравнением прямой называют уравнение,

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.8}$$

в котором A и B одновременно в нуль не обращаются, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

Пример 2.1. Составить параметрические уравнения сторон треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2, 3)$, $B(4, 7)$, $C(6, 9)$.

Составим сначала уравнения прямых, на которых лежат стороны AB, BC и AC соответственно. Используя уравнение (2.5), получаем

$$\frac{y-3}{7-3} = \frac{x-2}{4-2}, \quad \frac{y-3}{4} = \frac{x-2}{2}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x-2}{1};$$

$$\frac{y-7}{9-7} = \frac{x-4}{6-4}, \quad \frac{y-7}{2} = \frac{x-4}{2}, \quad y - 7 = x - 4;$$

$$\frac{y-3}{9-3} = \frac{x-2}{6-2}, \quad \frac{y-3}{6} = \frac{x-2}{4}, \quad \frac{y-3}{3} = \frac{x-2}{2}.$$

Обозначим буквой t равные отношения, получим параметрические уравнения этих прямых: $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$ (AB); $x = 4 + t$, $y = 7 + t$ (BC); $x = 2 + 2t$, $y = 3 + 3t$ (AC).

Введя ограничения на изменение параметра t, получим уравнения соответствующих сторон треугольника AB, BC, AC: $x=2+t$, $y=3+2t$ $(0\le t\le 1)$; $x=4+t$, $y=7+t$ $(0\le t\le 1)$; $x=2+2t$, $y=3+3t$ $(0\le t\le 1)$.

Пример 2.2. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $7x-3y-21=0$.

Разделив это уравнение почленно на 21, получим

$$x/3-y/7-1=0, \text{ или } x/3+y/(-7)=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.7), заключаем, что $a=3$, b - 7.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Тангенс угла между двумя прямыми (рис. 2.3)

$$y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2 \tag{2.9}$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями вида (2.9), выражается равенством $k_1=k_2$, а условие их перпендикулярности – равенством

$$k_1=-\frac{1}{k_2}. \tag{2.11}$$

Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{2.12}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2.13}$$

то тангенс угла между ними определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{2.14}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями (2.12) и (2.13), выражается равенством

$$A_1/A_2=B_1/B_2, \tag{2.15}$$

или

$$A_1=lA_2,\ B_1=lB_2, \tag{2.16}$$

а условие их перпендикулярности – равенством

$$-A_1/B_1=B_2/A_2, \text{ или } A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{2.17}$$

Отметим, что прямые $Ax+By+C=0$, $Bx-Ay+C=0$ перпендикулярны в силу условия (2.17).

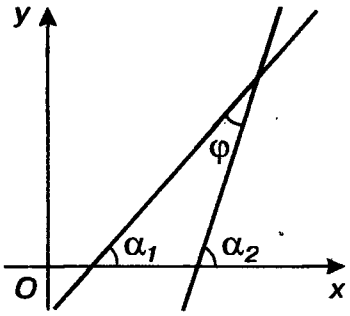

Рис. 2.3

Пример 2.3. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x+3y+15=0$, $x+4y-7=0$.

Применяем формулу (2.14). Так как в данном случае $A_1=5$, $B_1=3$, $A_2=1$, $B_2=4$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{5\cdot 4-1\cdot 3}{5\cdot 1+3\cdot 4}=1,\ \varphi=45^\circ.$$

Замечание. При другой нумерации прямых ($A_1=1$, $B_1=4$, $A_2=5$, $B_2=3$) получаем $\operatorname{tg}\varphi'=-1$, $\varphi'=135^\circ$. Очевидно, $\varphi+\varphi'=180^\circ$.

Пример 2.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4,-5)$ и параллельной прямой $3x+4y+12=0$.

Искомое уравнение имеет вид $3x+4y+C=0$, где C пока не определено. Вид уравнения следует из условия (2.16) при $l=1$ (считаем соответствующие коэффициенты равными). Чтобы найти значение C, необходимо подставить координаты точки M в искомое уравнение (точка M лежит на прямой, поэтому ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой). Подставляя координаты $x=4$, $y=-5$ в уравнение $3x+4y+C=0$, получаем $3\cdot 4+4\cdot(-5)+C=0$, откуда $C=8$. Таким образом, уравнение прямой имеет вид $3x+4y+8=0$.

Пример 2.5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3,2)$ и перпендикулярной прямой $4x+5y-7=0$.

Искомое уравнение имеет вид $5x-4y+C=0$. Действительно, для прямых выполнено условие (2.17): $4\cdot 5+5\cdot(-4)=0$. Точка $M(-3,2)$ лежит на прямой $5x-4y+C=0$, поэтому ее координаты должны удовлетворять этому уравнению: $5(-3)-4\cdot 2+C=0$. Отсюда находим, что $C=23$. Итак, уравнение прямой принимает вид $5x-4y+23=0$.

Пример 2.6. Вершины треугольника находятся в точках $A(3,4)$, $B(-2,1)$, $C(-3,-5)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит высота, опущенная из вершины B на сторону AC.

Найдем сначала угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и C. Считая точку A первой, точку C второй, т.е. полагая $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=-3$, $y_2=-5$, по формуле (2.2) получаем $k_1=(-5-4)/(-3-3)=3/2$. Прямая, на которой лежит высота, опущенная из точки B на сторону AC, будет перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и C. Угловой коэффициент этой прямой обозначим через k_2. Используя условие перпендикулярности двух прямых, заданное формулой (2.11), находим $k_2=1/k_1$, $k_2=-2/3$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $B(-2,1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k_2. Подставляя значения $x_0=-2$, $y_0=1$, $k=-2/3$ в уравнение (2.4), получаем $y-1=(-2/3)(x-(-2))$, $3(y-1)+2(x+2)=0$, $2x+3y+1=0$.

Расстояние от точки до прямой. Уравнения биссектрис углов между двумя прямыми. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляют по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.18)$$

Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (2.19)$$

Пример 2.7. Найти расстояние от точки $M_0(-7, 4)$ до прямой, заданной уравнением $4x-3y-15=0$.

Воспользуемся формулой (2.18). Так как в данном случае $x_0=-7$, $y_0=4$, $A=4$, $B=-3$, $C=-15$, то

$$d=\frac{|4\cdot(-7)-3\cdot 4-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=11.$$

Пример 2.8. Дан треугольник с вершинами $P(2,-1)$, $Q(6,-4)$, $R(10,3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки R.

Задача сводится к вычислению расстояния от точки R до прямой PQ. Запишем уравнение этой прямой. На основании уравнения (2.5) имеем $\frac{y+1}{-4+1}=\frac{x-2}{6-2}$, или $3x+4y-2=0$. Расстояние точки $R(10, 3)$ до этой прямой вычислим по формуле (2.18)

$$d=\frac{|3\cdot 10+4\cdot 3-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8.$$

Следовательно, длина высоты равна 8.

Замечание. Эту задачу можно решить и другими способами. Например, длину искомой высоты можно вычислить, зная площадь треугольника PQR и длину основания PQ. Эта же длина равна расстоянию между двумя точками R и M (M – основание высоты, опущенной из точки R на PQ). В свою очередь координаты точки M находятся в результате решения системы уравнений стороны PQ и высоты RM.

Пример 2.9. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y-7=0$, $8x+6y-1=0$.

В соответствии с формулой (2.19) получаем

$$\frac{3x-4y-7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm\frac{8x+6y-1}{\sqrt{8^2+6^2}}.$$

Преобразуя эти уравнения, находим

$$\frac{3x-4y-7}{5}=\pm\frac{8x+6y-1}{10},\ 2(3x-4y-7)=\pm(8x+6y-1).$$

Отсюда получаем уравнения биссектрис $2x+14y+13=0$, $14x-2y-15=0$.

Задачи, относящиеся к прямым. Рассмотрим примеры решения задач, в условиях которых даны уравнения прямых.

Пример 2.10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$ и уравнение одной из диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

Решая систему уравнений $x+2y+2=0$, $x+y-4=0$, находим точку $A(10,-6)$ – одну из вершин параллелограмма. Две другие вершины найдем как точки пересечения данной диагонали со сторонами, т. е. определим их координаты из систем уравнений $x+2y+2=0$, $x-2=0$; $x+y-4=0$, $x-2=0$. Это будут точки $B(2,2)$ и $D(2,-2)$. Середина диагонали BD находится в точке $S(2,0)$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то четвертая вершина $C(x,y)$ может быть найдена как конец отрезка AC по известному концу A и середине S: $(x+10)/2=2$, $(y+(-6))/2=0$. Отсюда получаем $x=-6$, $y=6$, т. е. точку $C(-6,6)$ – четвертую вершину параллелограмма $ABCD$.

Пример 2.11. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой до точки $A(2,0)$ относится к ее расстоянию до прямой $5x+8=0$ как $5:4$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка данной линии, N – основание перпендикуляра, проведенного через точку M к прямой $5x+8=0$, или $x=-8/5$. Расстояния точки M до точки A и до прямой $x=-8/5$ определяются соответственно формулами $|MA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, $|MN|=|x-(-8/5)|=|x+8/5|$ (последнее равенство следует также из формулы (2.18)). По условию задачи $\sqrt{(x-2)^2+y^2}:|x+8/5|=5:4$, откуда $4\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5|x+8/5|$. Преобразуем это уравнение:

$$16(x^2-4x+4+y^2)=25(x^2+(16/5)x+64/25),$$

$$16x^2-64x+64+16y^2=25x^2+80x+64,\ 9x^2-16y^2+144x=0.$$

Выделим полные квадраты в левой части полученного уравнения:

$$9(x^2+16x+64)-16y^2-9\cdot 64=0,\ 9(x+8)^2-16y^2=9\cdot 64.$$

Последнее уравнение примет вид $9X^2-16Y^2=9\cdot 64$, или $X^2/64-Y^2/36=1$, если перейти к новым координатам $X=x+8$, $Y=y$.

Полученное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=8$, $b=6$ (см. уравнение (2.25)).

2.2. Окружность

Каноническим уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$ называют уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2.20)$$

Когда центр окружности находится в начале координат, уравнение принимает вид $x^2+y^2=R^2$.

Если уравнение второй степени, не содержащее члена с произведением координат и имеющее равные коэффициенты при x^2 и y^2, т.е. уравнение $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, определяет некоторую линию, то эта линия – окружность.

Пример 2.12. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$.

Разделив обе части уравнения на 4 и выделив полные квадраты, получим

$$(x^2-2x+1)+y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-1-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=0,$$

$$\text{или} \quad (x-1)^2+(y+3/2)^2=4.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.20), заключаем, что $a=1$, $b=-3/2$, $R=2$.

Пример 2.13. Какое множество точек плоскости определяет уравнение $x^2+y^2-4x+10y+29=0$?

Так как это уравнение сводится к уравнению $(x-2)^2+(y+5)^2=0$, которому удовлетворяют лишь координаты $x=2$, $y=-5$, то оно определяет единственную точку $C(2,-5)$.

2.3. Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина.

Каноническое уравнение эллипса

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1, \qquad (2.21)$$

где $a=OA$ – большая, $b=OB$ – малая полуоси (рис. 2.4).

Координаты фокусов эллипса, определяемого уравнением (2.21): $x_1=-c$, $y_1=0$; $x_2=c$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \qquad (2.22)$$

Эксцентриситетом эллипса ε называют отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\varepsilon=c/a, \quad \varepsilon=\sqrt{1-(b/a)^2}. \qquad (2.23)$$

Фокальными радиусами точки M эллипса называют отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2. Их длины r_1 и r_2 можно вычислить по формулам

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{2.24}$$

Директрисами эллипса (2.21) называют прямые, определяемые уравнениями $x = -a/\varepsilon, \ x = a/\varepsilon$.

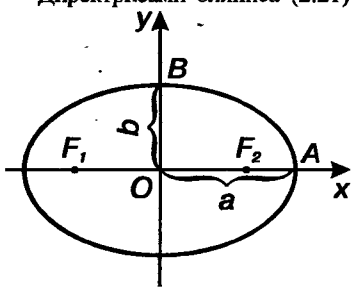

Рис. 2.4

Пример 2.14. Какую линию определяет уравнение $3x^2 + 4y^2 = 12$?

Разделим это уравнение почленно на 12: $x^2/4 + y^2/3 = 1$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.21), заключаем, что оно определяет эллипс с полуосями $a = 2, \ b = \sqrt{3}$.

Найдем фокусы этого эллипса. Из формулы (2.22) следует, что $c^2 = a^2 - b^2$; поскольку в данном случае $a^2 = 4, \ b^2 = 3, \ c^2 = 4 - 3 = 1$, $c = 1$. Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-1, 0), \ F_2(1, 0)$.

Пример 2.15. В прямоугольной декартовой системе координат построить линию, определяемую уравнением $y = (-2/3)\sqrt{9 - x^2}$.

Преобразуем это уравнение, возводя в квадрат обе его части:

$$y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2), \ \frac{y^2}{4} = \frac{9 - x^2}{9}, \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 3, \ b = 2$. Если решить это уравнение относительно y, получим

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \ y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

В условии задачи дано второе из этих уравнений. Оно определяет не весь эллипс, а только ту его часть, для точек которой $y \le 0$, т. е. половину эллипса, расположенную ниже оси Ox.

Пример 2.16. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3, 2), \ N(3\sqrt{3/2}, \sqrt{2})$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Так как точки M и N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(3\sqrt{3/2})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \quad \frac{27}{2a^2} + \frac{2}{b^2} = 1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим, что $a^2 = 18, \ b^2 = 8$.

Таким образом, получено каноническое уравнение эллипса $x^2/18 + y^2/8 = 1$.

2.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \qquad (2.25)$$

где $a = OA$ – действительная, $b = OB$ – мнимая полуоси (рис. 2.5).

Координаты фокусов гиперболы (2.25): $x_1 = -c$, $y_1 = 0$; $x_2 = c$, $y_2 = 0$, т. е. $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2.26)$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$:

$$\varepsilon = c/a. \qquad (2.27)$$

Асимптотами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x. \qquad (2.28)$$

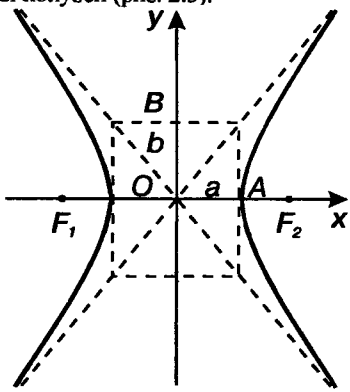

Рис. 2.5

Директрисами гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями

$$x = -a/\varepsilon, \; x = a/\varepsilon. \qquad (2.29)$$

Гипербола с равными полуосями ($b = a$) называется равносторонней, ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2.30)$$

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы вычисляется по формулам

$$r_1 = \varepsilon x + a, \; r_2 = \varepsilon x - a; \qquad (2.31)$$

фокальные радиусы точки левой ветви – по формулам

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \; r_2 = -\varepsilon x + a; \qquad (2.32)$$

Пример 2.17. Какую линию определяет уравнение $9x^2 - 4y^2 = 36$?

Разделив обе части уравнения на 36, получим $x^2/4 - y^2/9 = 1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.25), заключаем, что оно определяет гиперболу с действительной полуосью $a = 2$ и мнимой полуосью $b = 3$.

Пример 2.18. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4, \sqrt{15})$.

Разделив обе части уравнения на 20, получим $x^2/4 - y^2/5 = 1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.25), заключаем, что $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т. е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$. Из формулы (2.26) следует, что $c^2 = a^2 + b^2$, $c = 3$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. По формуле (2.27) находим $\varepsilon = c/a = 3/2$. Поскольку точка M лежит на левой ветви гиперболы, то при вычислении r_1 и r_2 необходимо пользоваться формулами (2.32) $r_1 = (-3/2)(-4) - 2 = 4$, $r_2 = (-3/2)(-4) + 2 = 8$. Отметим, что $r_2 - r_1 = 8 - 4 = 4 = 2a$.

Пример 2.19. Записать уравнения асимптот и директрис гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Приводя уравнение гиперболы к каноническому виду (2.25), заключаем, что $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 3$, $b = 2$. В соответствии с (2.28) записываем уравнения асимптот $y = (2/3)x$, $y = -(2/3)x$. По формуле (2.26) находим $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, а по формуле (2.27) – эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{13}/3$. Согласно (2.29), получаем уравнения директрис $x = -9/\sqrt{13}$, $x = 9/\sqrt{13}$.

2.5. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы), лежащих в той же плоскости.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат (рис. 2.6), имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{2.33}$$

уравнение ее директрисы

$$x = -p/2. \tag{2.34}$$

Парабола, определяемая уравнением (2.33), имеет фокус $F(p/2, 0)$, фокаль-

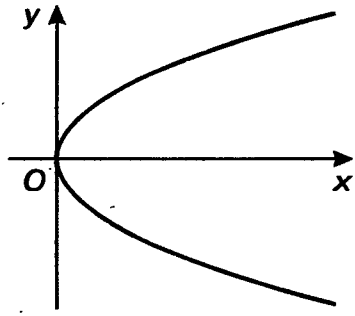

Рис. 2.6

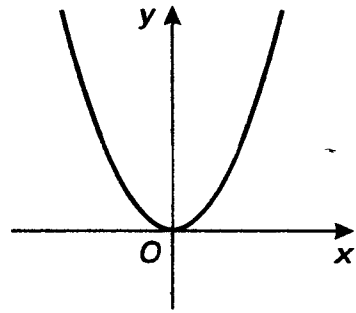

Рис. 2.7

ный радиус ее точки $M(x, y)$ вычисляется по формуле

$$r = x + p/2. \qquad (2.35)$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 2.7), определяется уравнением

$$x^2 = 2qy. \qquad (2.36)$$

Фокус этой параболы находится в точке $F(0, q/2)$, уравнение директрисы имеет вид $y = -q/2$. Фокальный радиус ее точки $M(x, y)$ выражается формулой $r = y + q/2$.

Замечание. Каждое из уравнений $y^2 = -2px$, $x^2 = -2qy$ определяет параболу.

Пример 2.20. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 8x$. Вычислить расстояние точки $M(2, 4)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $y^2 = 8x$ с уравнением (2.33), находим, что $2p = 8$, откуда $p = 4$, $p/2 = 2$. В соответствие с формулой (2.34) получаем уравнение $x = -2$ директрисы параболы, фокус параболы находится в точке $F(2, 0)$. Точка $M(2, 4)$ лежит на параболе, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2 = 8x$. По формуле (2.35) находим фокальный радиус точки M: $r = 2 + 2 = 4$.

Пример 2.21. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = 4y$. Вычислить расстояние точки $M(6, 9)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $x^2 = 4y$ с уравнением (2.36), получаем $2q = 4$, откуда $q = 2$, $q/2 = 1$. Следовательно, фокус параболы находится в точке $F(0, 1)$, уравнение директрисы имеет вид $y = -1$, а фокальный радиус точки M: $r = 9 + 1 = 10$.

Пример 2.22. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(5, 4)$, $N(15, -6)$.

Так как парабола симметрична относительно оси Ox, то в ее уравнение y входит только во второй степени. Уравнение этой параболы имеет вид $y^2 = 2px + c$, где p и c – некоторые постоянные. Найдем p и c, использовав условия задачи. Поскольку точки M и N лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению $4^2 = 2p \cdot 5 + c$, $(-6)^2 = 2p \cdot 15 + c$. Из уравнений $16 = 10p + c$, $36 = 30p + c$ находим $p = 1$, $c = 6$.

Таким образом, данная парабола определяется уравнением $y^2 = 2x + 6$.

2.6. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы

Пусть γ – дуга эллипса, гиперболы или параболы (рис. 2.8). Проведем через фокус F прямую, перпендикулярную директрисе Δ, точку их пересечения обозначим через A, проекцию точки M на эту прямую – буквой N. В точке F проведем перпендикуляр к прямой AN (оси линии γ), обозначим буквой P точку ее пересече-

ния с дугой γ, а длину отрезка FP – буквой p, т. е. $|FP| = p$, и назовем ее фокальным параметром линии γ.

Пусть ρ и φ – полярные координаты точки M в системе координат с полюсом в точке F и полярной осью FN, тогда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (2.37)$$

Уравнение (2.37) называется полярным уравнением эллипса, гиперболы, параболы (это уравнение определяет одну из двух ветвей гиперболы).

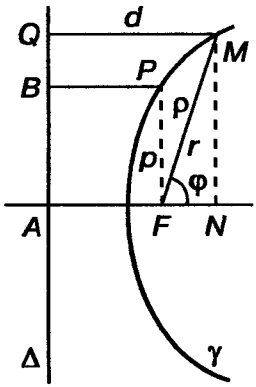

Рис. 2.8

Отметим, что для параболы фокальный параметр совпадает с параметром p, входящим в уравнение (2.33), для эллипса и гиперболы, заданных соответственно уравнениями (2.21) и (2.25), он выражается формулой

$$p = b^2/a. \qquad (2.38)$$

Пример 2.23. Какую линию определяет уравнение $\rho = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$ в полярных координатах?

Разделим на 5 числитель и знаменатель правой части уравнения:

$$\rho = \frac{16/5}{1 - (3/5)\cos\varphi}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.37) и учитывая формулу (2.38), получаем $p = b^2/a = 16/5$, $\varepsilon = c/a = 3/5$, откуда $a=5$, $b=4$, $c=3$. Поскольку $0 < \varepsilon < 1$, то данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 5$, $b = 4$.

Пример 2.24. Какую линию определяет уравнение $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$ в полярных координатах?

Разделив числитель и знаменатель правой части на 4, приведем это уравнение к виду (2.37):

$$\rho = \frac{9/4}{1 - (5/4)\cos\varphi}.$$

Следовательно, $p = b^2/a = 9/4$, $\varepsilon = c/a = 5/4 > 1$. Данное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a = 4$, $b = 3$.

2.7. Некоторые другие виды уравнений линий второго порядка

Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ приводится к виду $X^2 = 2qY$ и определяет параболу с осью, параллельной оси O_1Y.

Уравнение $x = Ay^2 + By + C$ приводится к виду $Y^2 = 2pX$ и определяет параболу с осью, параллельной оси O_1X.

Равносторонняя гипербола имеет уравнение (2.30), а в системе координат, осями которой являются ее асимптоты, определяется уравнением

$$XY = C (C \neq 0). \tag{2.39}$$

Уравнение

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$$

приводится к виду (2.39) и определяет гиперболу.

Параметрические уравнения эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ имеют вид

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Параметрические уравнения гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ имеют вид

$$x = a\,(t + (1/4t)), \quad y = b\,(t - (1/4t)),$$

а также

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t,$$

где $\mathrm{ch}\,t$, $\mathrm{sh}\,t$ – гиперболические функции аргумента t (см. п. 13.11).

Параметрические уравнения параболы $x^2 = 2qy$ можно записать так:

$$x = t, \quad y = t^2/2q.$$

Уравнение

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2 \tag{2.40}$$

определяет эллипс при $0 < \varepsilon < 1$, гиперболу при $\varepsilon > 1$, параболу при $\varepsilon = 1$. В случае $0 < \varepsilon < 1$ это уравнение принимает вид

$$y^2 = 2px - qx^2,$$

где $p = b^2/a$, $q = b^2/a^2$, а в случае $\varepsilon > 1$ $y^2 = 2px + qx^2$, где p и q имеют те же выражения.

Уравнение (2.40) называют уравнением эллипса, гиперболы, параболы, отнесенных к вершине; начало декартовой прямоугольной системы координат находится в вершине линии – точке пересечения с координатной осью (рис. 2.9).

Эллипс, гиперболу, параболу называют каноническими сечениями. В сечении конуса плоскостью, не проходящей через его вершину (рис. 2.10), получаются эти линии, а именно эллипс (сечение одной полости конуса плоскостью, не перпенди-

кулярной его оси и не параллельно образующей), парабола (сечение плоскостью, параллельной его образующей), гипербола (сечение плоскостью обеих полостей конуса).

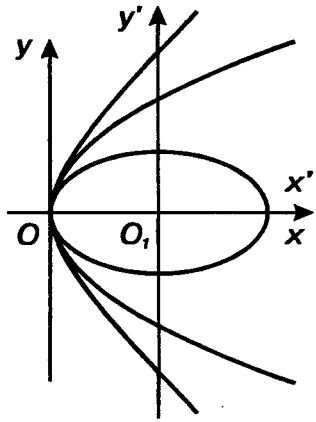

Рис. 2.9

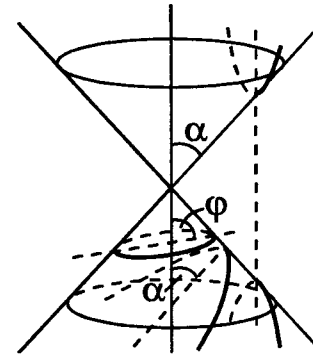

Рис. 2.10

Пример 2.25. Построить линию, определяемую уравнением $3y = x^2 - 6x + 15$.

Преобразуя это уравнение, получаем $y = (1/3)((x^2 - 6x + 9) + 6)$, $y = (1/3)(x-3)^2 + 2$, $y - 2 = (1/3)(x-3)^2$.

Перейдем к новым координатам по формулам $X = x - 3$, $Y = y - 2$. В новых координатах уравнение принимает вид $Y = (1/3)X^2$, или $X^2 = 3Y$; оно определяет параболу. Строим системы координат Oxy и O_1XY, последнею с началом в точке $O_1(3, 2)$, и саму параболу – в новой системе координат по ее каноническому уравнению (рис. 2.11).

Пример 2.26. Построить линию, определяемую уравнением $y = \dfrac{2x+12}{x+3}$.

Преобразуя данное уравнение:

$$y(x+3) - 2x - 12 = 0, \quad y(x+3) - 2x - 6 - 6 = 0,$$
$$y(x+3) - 2(x+3) - 6 = 0, \quad (x+3)(y-2) = 6.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X = x + 3$, $Y = y - 2$, получаем уравнение $XY = 6$, определяющее гиперболу. Строим линию в системе координат O_1XY (рис. 2.12), начало которой находится в точке $O_1(-3, 2)$.

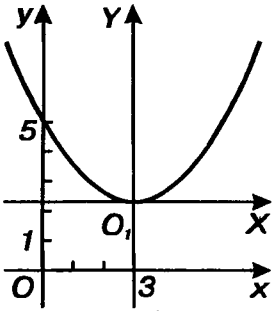

Рис. 2.11

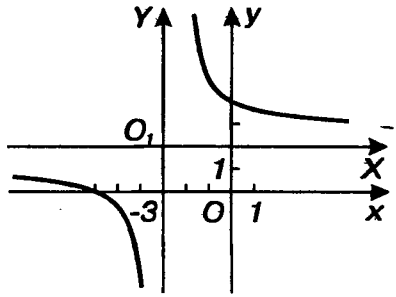

Рис. 2.12

Пример 2.27. Какую линию определяет уравнение $xy+x-2y-14=0$?

Преобразуем это уравнение: $(xy+x)-(2y+2)-12=0$, $x(y+1)-2(y+1)-12=0$, $(y+1)(x-2)-12=0$, $(x-2)(y+1)=12$.

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-2$, $Y=y+1$, получаем уравнение $XY=12$, которое определяет гиперболу.

2.8. Упрощение уравнения второй степени, не содержащего члена с произведением координат

Рассмотрим уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат, не содержащее члена с произведением координат xy:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{2.41}$$

Перейдем к новой системе координат O_1XY, полученной из исходной путем параллельного переноса (см. рис. 1.10) начала в точку $O_1(a,b)$, при котором старые координаты (x,y) точки M выражаются через ее новые координаты (X,Y) формулами (1.22).

Уравнение (2.41) путем выделения полных квадратов может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений:

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=1, \tag{2.42}$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=0, \tag{2.43}$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=-1 \tag{2.44}$$

в случае $AC>0$ (линии эллиптического типа);

$$X^2/a^2-Y^2/b^2=1,\ -X^2/a+Y^2/b^2=1, \tag{2.45}$$

$$X^2/a^2-Y^2/b^2=0 \tag{2.46}$$

в случае $AC<0$ (линии гиперболического типа);

$$Y^2 = 2pX, \tag{2.47}$$

$$Y^2 = b^2, \tag{2.48}$$

$$Y^2 = 0, \tag{2.49}$$

$$Y^2 = -b^2 \tag{2.50}$$

в случае $AC = 0$, $A = 0$ (линии параболического типа).

Если $C = 0$, $A \neq 0$, то уравнение (2.41) приводится к виду $X^2 = 2qY$, если $E \neq 0$, и к одному из уравнений $X^2 = a^2$, $X^2 = -a^2$, $X^2 = 0$, когда $E = 0$.

Уравнение (2.42) определяет эллипс, уравнения (2.45) – гиперболы (с действительной осью O_1X или O_1Y), уравнение (2.47) – параболу (с осью O_1X), уравнения (2.46) – пару пересекающихся прямых $bX - aY = 0$, $bX + aY = 0$, уравнение (2.48) – пару параллельных прямых $Y = b$, $Y = -b$, уравнение (2.49) – пару совпавших прямых $Y = 0$, $Y = 0$, уравнению (2.43) удовлетворяют координаты единственной точки $X = 0$, $Y = 0$, уравнениям (2.44) и (2.50) не удовлетворяют координаты ни одной точки.

Пример 2.28. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) - 36 + 16 - 124 = 0,$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 - 144 = 0, \quad (x-2)^2/16 - (y+1)^2/9 = 1.$$

Перейдя к новым координатам по формулам $X = x - 2$, $Y = y + 1$, получим уравнение $X^2/16 - Y^2/9 = 1$, определяющее гиперболу с полуосями $a = 4$, $b = 3$ (рис. 2.13). Центр гиперболы находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$. Так как

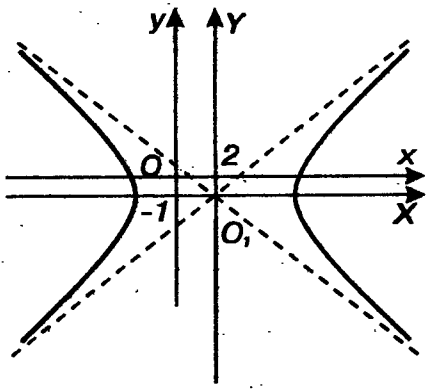

Рис. 2.13

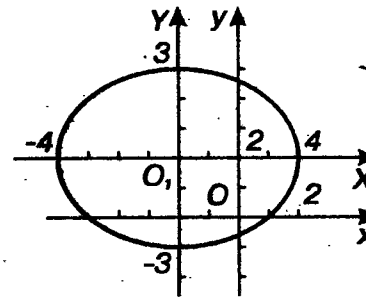

Рис. 2.14

$X = x - 2$, $Y = y + 1$, то $x - 2 = 0$, $y + 1 = 0$, откуда $x = 2$, $y = -1$. Получена точка $O_1(2, -1)$, в которой находится начало новой системы координат.

Пример 2.29. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в левой части уравнения, получаем

$$9(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 4y + 4) - 36 - 64 - 44 = 0,$$

$$9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144, \quad (x+2)^2/16 + (y-2)^2/9 = 1.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X = x + 2$, $Y = y - 2$, последнему уравнению придадим вид $X^2/16 + Y^2/9 = 1$. Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$ (рис. 2.14). Центр эллипса находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$, или $x + 2 = 0$, $y - 2 = 0$, откуда $x = -2$, $y = 2$, т. е. в точке $O_1(-2, 2)$.

2.9. Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.51)$$

при повороте координатных осей на угол α, для которого

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = (A - C)/2B, \qquad (2.52)$$

преобразуется в уравнение $A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0$, являющееся уравнением вида (2.41).

Формулы преобразования координат имеют вид

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \qquad (2.53)$$

причем

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{(1 - \cos 2\alpha)/2}, \; \cos\alpha = \pm\sqrt{(1 + \cos 2\alpha)/2}, \qquad (2.54)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}, \qquad (2.55)$$

где $\operatorname{ctg} 2\alpha$ определяется формулой (2.52).

Уравнение (2.51) определяет или пустое множество, или точку, или пару прямых (пересекающихся, параллельных, совпавших), или одну из линий (окружность, эллипс, гиперболу, параболу). Пару прямых называют распадающейся линией второго порядка.

Пример 2.30. Построить линию, определяемую уравнением

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x + 8y + 24 = 0.$$

Это частный случай уравнения (2.51), для которого $A = 5$, $2B = -6$, $C = 5$,

$D=-24$, $E=8$, $F=24$. По формуле (2.52) имеем $\operatorname{ctg}2\alpha=(5-5)/(-6)=0$. Возьмем $2\alpha=\pi/2$, т. е. $\alpha=\pi/4$, тогда $\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{2}/2$. Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(\sqrt{2}/2)(x'-y'),\ y=(\sqrt{2}/2)(x'+y'). \qquad \text{(I)}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$(5/2)(x'-y')^2-(6/2)(x'-y')(x'+y')+(5/2)(x'+y')^2-$$
$$-12/\sqrt{2}(x'-y')+4\sqrt{2}(x'+y')+24=0,$$
$$(5/2)(x'^2-2x'y'+y'^2)-3(x'^2-y'^2)+(5/2)(x'^2+2x'y'+y'^2)-$$
$$-12/\sqrt{2}(x'-y')+4\sqrt{2}(x'+y')+24=0,$$
$$2x'^2+8y'^2-8\sqrt{2}x'+16\sqrt{2}y'+24=0,$$
$$x'^2+4y'^2-4\sqrt{2}x'+8\sqrt{2}y'+12=0.$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения, выделив в ней полные квадраты: $(x'^2-4\sqrt{2}x'+8)+4(y'^2+2\sqrt{2}y'+2)-8-8+12=0$, $(x'-2\sqrt{2})^2+4(y'+\sqrt{2})^2=4$.

Переходя к новым координатам по формулам

$$X=x'-2\sqrt{2},\ Y=y'+\sqrt{2}, \qquad \text{(II)}$$

последнее уравнение записываем так:

$$X^2+4Y^2=4,\ \text{или}\ X^2/4+Y^2/1=1. \qquad \text{(III)}$$

Каноническое уравнение (III) определяет эллипс с полуосями $a=2$, $b=1$. Построим этот эллипс относительно новой системы декартовых прямоугольных координат O_1XY. Угол наклона оси O_1X к оси Ox уже известен $\alpha=45°$, осталось определить старые координаты точки O_1. В системе O_1XY эта точка (центр эллипса) имеет координаты $X=0$, $Y=0$. По формулам (II) имеем $x'-2\sqrt{2}=0$, $y'+\sqrt{2}=0$, откуда $x'=2\sqrt{2}$, $y'=-2\sqrt{2}$. С помощью формул (I) находим координаты точки O_1 в старой системе координат Oxy:

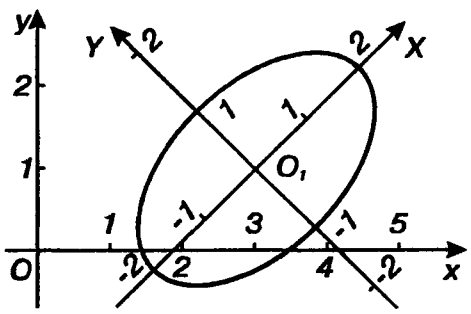

Рис. 2.15

$$x=(\sqrt{2}/2)(2\sqrt{2}-(-\sqrt{2}))=3,\ y=(\sqrt{2}/2)(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=1,\ O_1(3,1).$$

Строим новую систему координат O_1XY и сам эллипс по его каноническому уравнению (III) (рис. 2.15).

Пример 2.31. Построить линию, определяемую уравнением $3x^2+4xy-4x-8y=0$.

В данном случае $A=3$, $2B=4$, $C=0$. По формуле (2.52) находим $\operatorname{ctg}2\alpha=(3-0)/4=3/4$. В формулы (2.53) входят $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Найдем их значения с помощью формул (2.54) и (2.55), в которых знак можно выбрать по своему усмотрению. Выбрав везде знак плюс, получим

$$\cos 2\alpha=\frac{3/4}{\sqrt{1+(3/4)^2}}=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-3/5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(1/\sqrt{5})(2x'-y'),\ y=(1/\sqrt{5})(x'+2y'). \qquad \text{(IV)}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и преобразуем его:

$$\frac{3}{5}(2x'-y')^2+\frac{4}{5}(2x'-y')(x'+2y')-\frac{4}{\sqrt{5}}(2x'-y')-\frac{8}{\sqrt{5}}(x'+2y')=0,$$

$$\frac{3}{5}(4x'^2-4x'y'+y'^2)+\frac{4}{5}(2x'^2+4x'y'-x'y'-2y'^2)-\frac{16}{\sqrt{5}}x'-\frac{12}{\sqrt{5}}y'=0,$$

$$4x'^2-y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}x'-\frac{12}{\sqrt{5}}y'=0,$$

$$4\left(x'^2-\frac{4}{\sqrt{5}}x'+\frac{4}{5}\right)-\left(y'^2+\frac{12}{\sqrt{5}}y'+\frac{36}{5}\right)-\frac{16}{5}+\frac{36}{5}=0,$$

$$4\left(x'-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(y'+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=-4.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$X=x'-2/\sqrt{5},\ Y=y'+6/\sqrt{5}. \qquad \text{(V)}$$

Последнее уравнение в новых координатах примет вид

$$4X^2-Y^2=-4,\ \text{или}\ -X^2/1+Y^2/4=1.$$

Это каноническое уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=1$, $b=2$, причем действительной осью будет ось O_1Y. Построим гиперболу в новой системе координат O_1XY. Найдем сначала старые координаты точки O_1, в которой находится центр гиперболы. Для этой точки $X=0$, $Y=0$. По формулам (V) получаем $x'=2/\sqrt{5}$, $y'=-6/\sqrt{5}$. С помощью формул (IV) находим

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)=2,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{12}{\sqrt{5}}\right)=-2,\ \ O_1(2,-2)$. Через точку O_1 проводим ось O_1X, для которой $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, и ось O_1Y, перпендикулярную оси O_1X. В системе координат O_1XY строим гиперболу по ее каноническому уравнению (рис. 2.16).

Пример 2.32. Построить линию, определяемую уравнением $x^2-2xy+y^2+4x-8y+7=0$.

Поскольку $A=1$, $2B=-2$, $C=1$, то по формуле (2.52) $\operatorname{ctg}2\alpha=(1-1)/(-2)=0$, $2\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi/4$. Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(\sqrt{2}/2)(x'-y'),\ y=(\sqrt{2}/2)(x'+y'). \qquad \text{(VI)}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и преобразуем его:

$$(1/2)(x'-y')^2-(x'-y')(x'+y')+(1/2)(x'+y')^2+2\sqrt{2}(x'-y')-$$
$$-4\sqrt{2}(x'+y')+7=0,$$
$$2y'^2-2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+7=0,\ (y'-3\sqrt{2}/2)^2-\sqrt{2}(x'+1/\sqrt{2})=0.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$X=x'+1/\sqrt{2},\ Y=y'-3\sqrt{2}/2. \qquad \text{(VII)}$$

В новых координатах последнее уравнение принимает вид

$$Y^2-\sqrt{2}X=0,\ \text{или}\ Y^2=\sqrt{2}X.$$

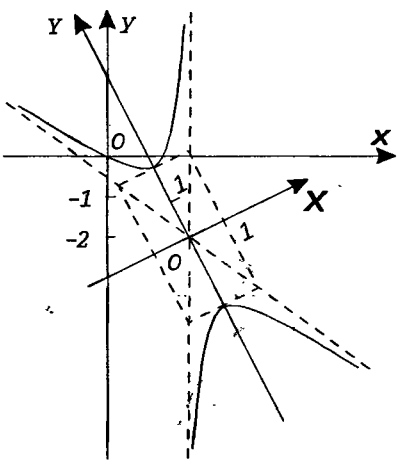

Рис. 2.16

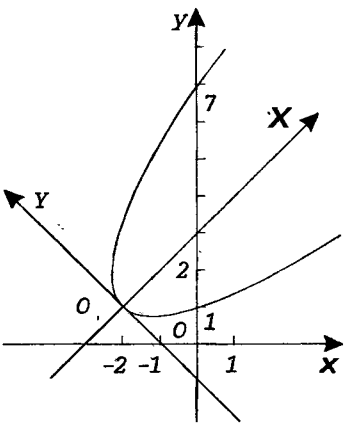

Рис. 2.17

Это уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке, для которой $X=0$, $Y=0$. Найдем старые координаты этой точки. По формулам (VII) находим $x'=-1/\sqrt{2}$, $y'=3/\sqrt{2}$. С помощью формул (VI) получаем

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-2,$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=1, \quad O_1(-2,1).$$

Строим систему координат O_1XY и параболу по ее каноническому уравнению (рис. 2.17).

2.10. Некоторые алгебраические линии высших порядков

Декартов лист – линия, определяемая в прямоугольной декартовой системе координат алгебраическим уравнением

$$x^3+y^3-3axy=0 \ (a=\text{const}\neq 0).$$

В полярных координатах уравнение принимает вид

$$\rho=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

Декартов лист можно задать и параметрическими уравнениями

$$x=3at/(1+t^3),\ y=3at^2/(1+t^3).$$

Линия эта изображена на рис. 2.18.

Циссоида. Рассмотрим окружность с диаметром $OA=2a$ и касательную к ней в точке A (рис. 2.19). Из точки O проведем луч OB, точку его пересечения с окружностью обозначим буквой C. На этом луче отложим отрезок $|OM|=|BC|$.

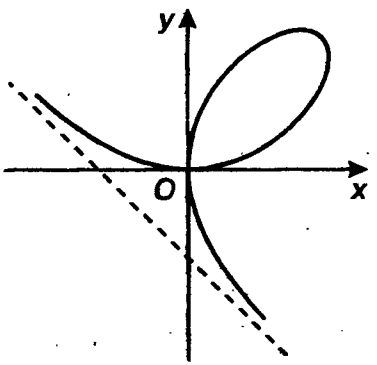

Рис. 2.18

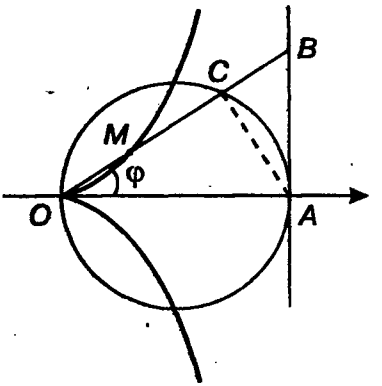

Рис. 2.19

Проведя другой луч и выполнив аналогичное построение, получим точку M_1. Таким способом можно построить сколько угодно точек. Множество точек $M, M_1, \ldots$ называют циссоидой. Построив достаточное число указанных точек и соединив их плавной линией, получим циссоиду (см. рис. 2.19).

Уравнение циссоиды в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$y^2 = x^3/(2a - x),$$

в полярных координатах

$$\rho = 2a\sin^2\varphi/\cos\varphi.$$

Параметрические уравнения циссоиды

$$x = \frac{2a}{t^2+1}, \quad y = \frac{2a}{t\,(t^2+1)},$$

или

$$x = 2a\sin^2\varphi,\ y = 2a\sin^3\varphi/\cos\varphi,$$

где φ – полярный угол.

Строфоида. Рассмотрим точку A и прямую Δ, не проходящую через данную точку (рис. 2.20). Обозначим буквой C точку пересечения перпендикуляра к прямой Δ, проведенной в точке A, а длину отрезка $AC - a$, т. е. $|AC| = a$. Вокруг точки A вращается луч, на котором откладываются отрезки BM_1 и BM_2 от точки B пересечения с данной прямой так, что $|BM_1| = |BM_2| = |BC|$. Каждому положению луча соответствует пара точек M_1, M_2, построенных указанным способом. Множество пар точек M_1, M_2 называют строфоидой. Точки M_1 и M_2 при этом называют сопряженными. Построив достаточное число точек и соединив их плавной линией, получим строфоиду (см. рис. 2.20). Название «строфоида» происходит от греческого слова στροφη – поворот.

Уравнение строфоиды в полярных координатах

$$\rho = a\,(1 \pm \sin\varphi)/\cos\varphi,$$

в декартовых координатах

$$y^2 = \frac{(x-a)^2 x}{2a - x}, \text{ или } y = \pm\,(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Параметрические уравнения строфоиды

$$x = a\,(1 \pm \sin\varphi),\ y = a\,(1 \pm \sin\varphi)\sin\varphi/\cos\varphi.$$

Версьера. Рассмотрим окружность с диаметром $|OC| = a$ и отрезок BM, построенный так, что $|OB| : |BD| = |OC| : |BM|$ (рис. 2.21). Множество точек M называют версьерой.

В прямоугольных декартовых координатах уравнение версьеры имеет вид

$$y = a^3/(x^2 + a^2).$$

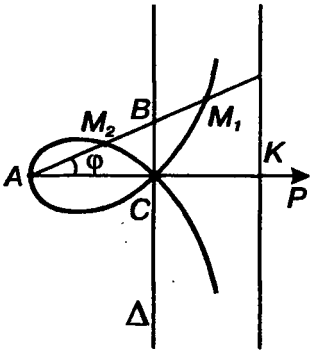

Рис. 2.20

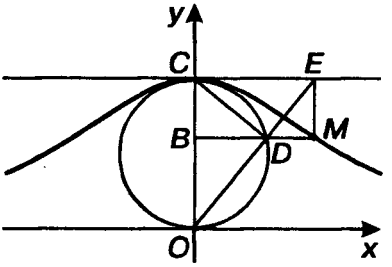

Рис. 2.21

Параметрические уравнения версьеры

$$x = t,\ y = a^3/(t^2 + a^2),$$

где роль параметра играет первая координата.

Рассматриваемую линию называют так же «локоном Аньези» в честь первой в Европе женщины, получившей известность благодаря заслугам на поприще математики.

Лемиискатa Бериулли – множество всех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть посто-

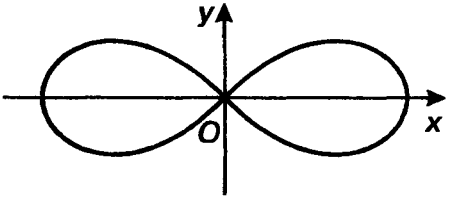

Рис. 2.22

янная величина, равная квадрату половины расстояния между данными точками.

В декартовых прямоугольных координатах лемниската Бернулли (рис. 2.22) имеет уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2),$$

в полярных

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

При другом выборе системы координат (рис. 2.23) эта линия определяется соответственно уравнениями

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 xy, \quad \rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi.$$

Название линии происходит от греческого слова λημνισκοξ – повязка, бант. Линия названа по имени ученого, открывшего ее. Уравнение лемнискаты впервые встречается в статье Я. Бернулли, опубликованной в 1694 г. в журнале «Acta eruditorum» («Труды ученных»).

Овал Кассини – множество всех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть постоянная величина.

Уравнение овала Кассини в декартовых координатах

$$(x^2+y^2)-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4,$$

в полярных

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi\pm\sqrt{\cos^2 2\varphi((b^4/a^4)-1)}}.$$

Вид овала Кассини зависит от соотношения между постоянными a и b. В случае $b>a$ овал имеет форму замкнутой линии, симметричной относительно осей координат (рис. 2.24). При $b=a$ получаем лемнискату Бернулли. В случае $b<a$ овал состоит из двух замкнутых линий.

Овалы Кассини названы в честь французского ученного, впервые рассмотревшего их. Жан Доминик Кассини (1625 – 1712) открыл эти линии при попытке определить орбиту земли.

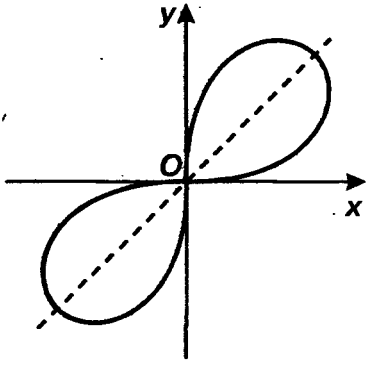

Рис. 2.23

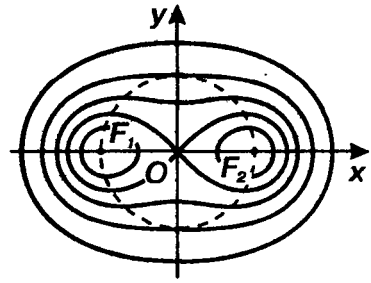

Рис. 2.24

Конхоида. В плоскости фиксируем прямую LL_1 и точку O, отстоящую от этой прямой на расстоянии $|OE|=a$ (рис. 2.25, *а*). Проведем луч OK, пересекающий прямую LL_1 в точке K. На луче от точки K, по обе стороны от нее, отложены два отрезка KM и KM_1 таких, что $|KM|=|KM_1|=l$, где l – заданное число. Вращая луч вокруг точки O (от 0 до 180°) и проводя аналогичные построения (при одном и том же значении l), получим линию, описываемую точками M и M_1, которую называют конхоидой. Точку O при этом называют полюсом конхоиды, а прямую

LL_1 – ее базисом. Линия эта состоит из двух ветвей: одну ветвь описывает точка M, другую – точка M_1.

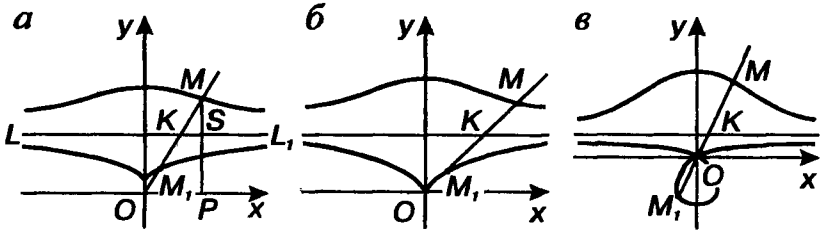

Рис. 2.25

Уравнение конхоиды в полярных координатах

$$\rho = (a/\sin\varphi) \pm l,$$

знак плюс – для верхней ветви, минус – для нижней. Форма конхоиды зависит от соотношения между параметрами l и a. При $l = a$ и $l > a$ линия имеет вид, изображенный на рис. 2.25, *б*, *в*.

В прямоугольных декартовых координатах конхоида имеет уравнение

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0.$$

Линию эту называют конхоидой Никомеда, по имени древнегреческого геометра, впервые открывшего ее.

Улитка Паскаля. Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке C (рис. 2.26). Выберем на данной окружности точку O. Представим себе, что вокруг точки O вращается луч OM. В каждом его положении от точки N пересечения луча и окружности откладываем отрезок $|NM| = l$, где l – заданное положительное число. При повороте луча от 0 до 180° получим множество точек M. При дальнейшем повороте луча от 180 до 360°, откладывая отрезок длины l по направлению луча, мы фактически будем откладывать его в сторону, противоположную

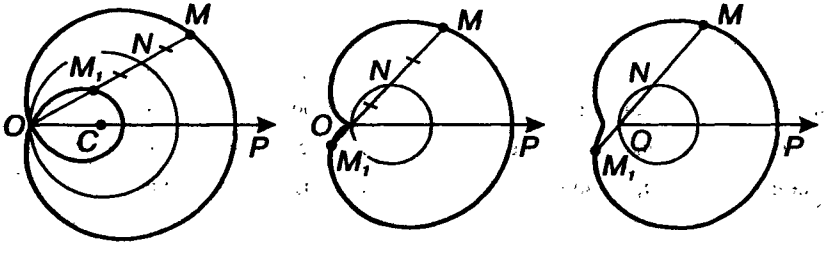

Рис. 2.26 Рис. 2.27 Рис. 2.28

прежней, т. е. $|NM_1| = l$, и получим точки M_1. Множество точек M и M_1 называют улиткой Паскаля.

Уравнения улитки Паскаля:

$$\rho = 2r\cos\varphi \pm l,\ (x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Форма улитки Паскаля зависит от соотношения между параметрами r и l: $l < 2r$ (рис. 2.26), $l = 2r$ (рис. 2.27), $l > 2r$ (рис. 2.28).

Линия названа в честь Этьена Паскаля – французского математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля.

Кардиода – линия, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся по окружности с таким же радиусом (рис. 2.29). Параметрические уравнения кардиоды

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t,\quad y = 2r\sin t - \sin 2t,$$

в полярных координатах

$$\rho = 2r(1 - \cos\varphi),$$

в декартовых координатах

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Уравнение $\rho = 2r(1 + \cos\varphi)$ также определяет кардиоду в полярной системе координат с полюсом в той же точке и противоположно направленной полярной осью.

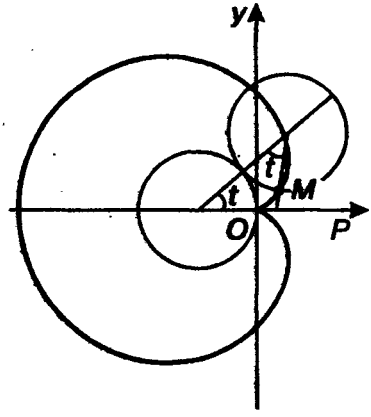

Рис. 2.29

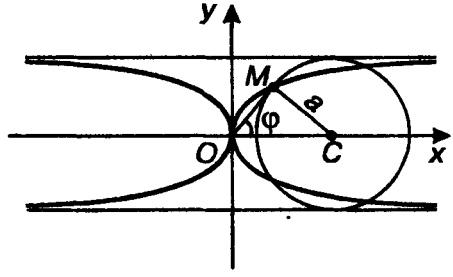

Рис. 2.30

Каппа – линия, представляющая собой множество точек касания касательных, проведенных из данной точки к окружности заданного радиуса, центр которой перемещается по фиксированной прямой, проходящей через эту точку (рис. 2.30).

Линия эта напоминает греческую букву к (каппа), откуда и происходит ее название.

Параметрические уравнения каппы

$$x = a\cos^2\varphi/\sin\varphi,\quad y = a\cos\varphi,$$

в полярных координатах

$$\rho = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi,$$

в декартовых координатах

$$(x^2+y^2)^2\,y^2 = a^2x^2.$$

Роза – линия, заданная полярным уравнением $\rho = a\sin k\varphi$ или уравнением $\rho = a\cos k\varphi$, где a и k – положительные числа. Роза целиком расположена в круге радиуса a ($\rho \le a$), так как $|\sin k\varphi| \le 1$. Роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a. Количество этих лепестков зависит от числа k. Если k – целое число, то роза состоит из k лепестков при нечетном k и из $2k$ лепестков при четном k (рис. 2.31, *а*, *б*). Если k – рациональное число, причем $k = m/n$ ($n > 1$), то роза состоит из m лепестков в случае, когда m и n – нечетные числа, или из $2m$ лепестков, если одно из чисел будет четным. При этом в отличие от предыдущего случая каждый следующий лепесток будет частично покрывать предыдущий (рис. 2.31, *в–е*).

Если число k является иррациональным, то роза состоит из бесконечного множества лепестков, частично накладывающихся друг на друга.

Четырехлепестковой розой (см. рис. 2.31, *б*) называют линию, определяемую полярным уравнением

$$\rho = a\sin 2\varphi.$$

В декартовых координатах линия имеет уравнение

$$(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

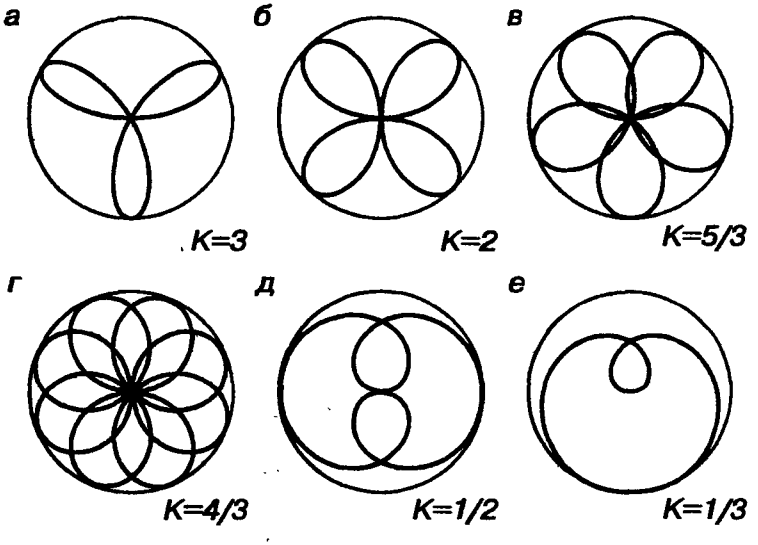

Рис. 2.31

Четырехлепестковая роза образуется множеством оснований перпендикуляров, опущенных из вершины O прямого угла на отрезок постоянной длины, концы которого скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке O.

Трехлепестковой розой (см. рис. 2.31. *а*) называют линию, определяемую уравнением

$$\rho = a\sin 3\varphi.$$

В декартовых координатах линия имеет уравнение

$$(x^2+y^2)^2 = a(3x^2y - y^3).$$

Астроида. Прямоугольник, две стороны которого лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, деформируется так, что его диагональ сохраняет постоянную длину a. Множество точек – оснований перпендикуляров, опущенных из вершины прямоугольника на его диагональ, называют астроидой (рис. 2.32, *а*).

Астроида имеет параметрические уравнения

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Исключив из этих уравнений параметр t, получим уравнение астроиды в прямоугольных координатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Освобождаясь от дробных показателей, находим

$$(x^2+y^2-a^2)^3 + 27x^2y^2a^2 = 0.$$

Астроиду можно рассматривать как траекторию точки окружности радиуса r (рис. 2.32, *б*), катящейся по внутренней стороне другой окружности, радиус R которой в четыре раза больше r ($R = 4r$).

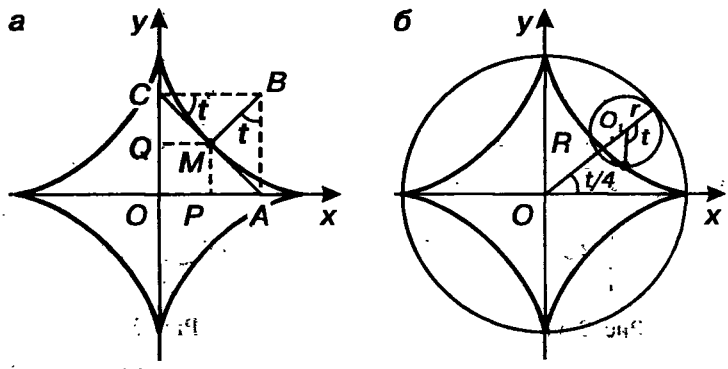

Рис. 2.32

Параметрическое уравнение астроиды в этом случае

$$x = \frac{3}{4}R\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}R\cos\frac{3t}{4}, \qquad y = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4} - \frac{1}{4}R\sin\frac{3t}{4}.$$

Гипоциклоида – плоская линия, описанная фиксированной точкой окружности радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R внутри ее (рис. 2.33, где M – вычерчивающая точка, A – ее исходное положение, t – угол поворота окружности, AM – дуга линии).

Параметрические уравнения гипоциклоиды

$$x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt),$$

$$y = (R - mR)\sin mt - mR\sin(t - mt),$$

где $m = r/R$. Форма кривой зависит от значения m. Если $m = p/q$ (p и q – взаимно простые числа), тогда M после q полных оборотов окружности возвращается в исходное положение и гипоциклоида – замкнутая линия, состоящая из q ветвей с q точками возврата при $m < 1/2$ (рис. 2.34); при $m > 1/2$ вместо q точек возврата линия имеет q других точек (рис. 2.35). При $m = 1/2$ линия вырождается в диаметр неподвижной окружности, при $m = 1/4$ является астроидой (см. рис. 2.32). При иррациональном m число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается. Обобщением гипоциклоиды является гипотрохоида.

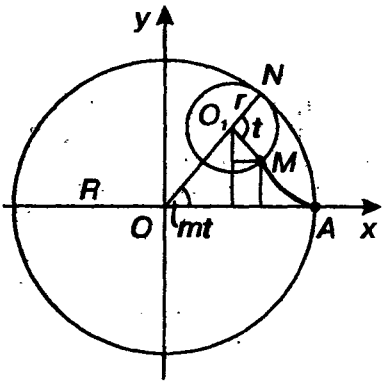

Рис. 2.33

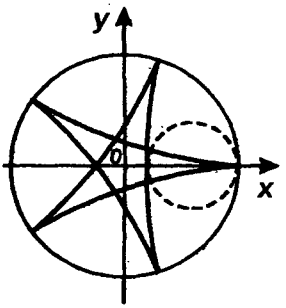

Рис. 2.34

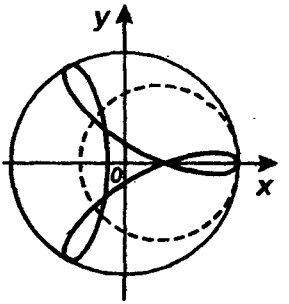

Рис. 2.35

Гипотрохоида – плоская линия – траектория точки, жестко связанной с окружностью радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R внутри ее, причем вычерчивающая точка M находится на расстоянии h от центра окружности радиуса r. При $h > r$ кривая называется удлиненной гипоциклоидой (рис. 2.36, $m = 1/4$), при $h < r$ – укороченной (рис. 2.37, $m = 1/4$). Параметрические уравнения гипотрохоиды

$$x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt),$$

$$x = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt),$$

где $m = r/R$. При $R = 2r$ линия является эллипсом, при $h = R + r$ – розой (см. рис. 2.31).

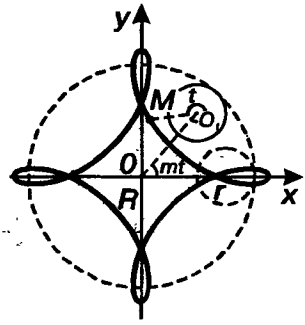

Рис. 2.36

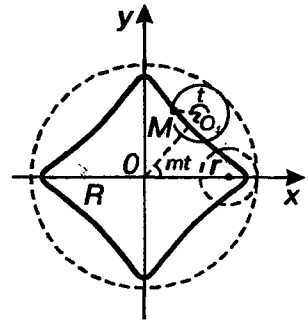

Рис. 2.37

Эпициклоида – плоская линия – траектория фиксированной точки окружности радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R вне ее (рис. 2.38, где M – вычерчивающая точка, A – ее исходное положение, t – угол поворота окружности, AM – дуга кривой).

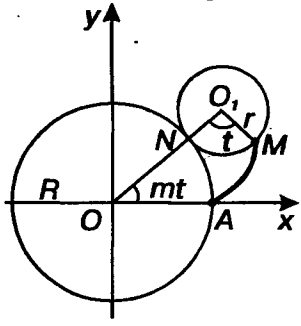

Рис. 2.38

Параметрические уравнения эпициклоиды

$$x = (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt),$$

$$y = (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt),$$

где $m = r/R$. Форма кривой зависит от значения m (рис. 2.39, *а*; $m = 1/3$, рис. 2.39, *б*; $m = 2/3$). Если $m = p/q$ (p и q – взаимно простые числа), точка M после q полных оборотов окружности возвращается в исходное положение и эпициклоида – замкнутая линия, состоящая из q ветвей с q точками возврата. При $m = 1$ кривая является кардиодой (см. рис. 2.29). При иррациональном m число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается. Обобщением эпициклоиды является эпитрохоида.

Эпитрохоида – плоская кривая – траектория точки, жестко связанной с производящей окружностью радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R вне ее, причем вычерчивающая точка M находится на расстоянии h от центра производящей окружности. При $h > r$ линия называется удлиненной эпициклоидой (рис. 2.40, *а*; $m = 1/4$), при $h < r$ – укороченной эпициклоидой (рис. 2.40, *б*; $m = 1/4$). Параметрические уравнения эпитрохоиды

$$x = (R + mR)\cos mt - h\cos(t + mt),$$

$$y = (R + mR)\sin mt - h\sin(t + mt),$$

где $m = r/R$. При $r = R$ линия является улиткой Паскаля (см. рис. 2.27, 2.28), при $h = R + r$ – розой (см. рис. 2.31).

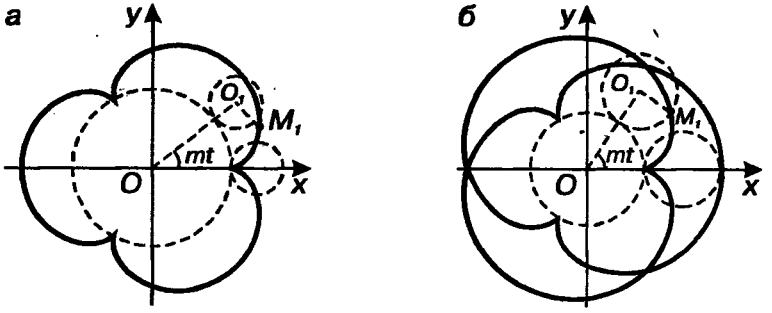

Рис. 2.39

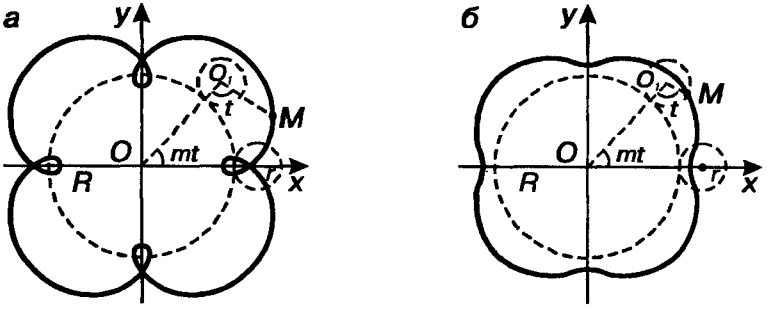

Рис. 2.40

2.11. Некоторые трансцендентные линии

Трансцендентной называется линия, уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах не является алгебраическим. Простейшими примерами трансцендентных линий могут служить графики функций $y = a^x$, $y = \lg x$, $y = \sin x$ и других тригонометрических функций.

Спираль Архимеда – траектория точки M, равномерно движущейся по прямой, которая равномерно вращается вокруг фиксированной точки O (рис. 2.41).

Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах

$$\rho = a\varphi,$$

в декартовых координатах

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{arctg}\,(y/x).$$

Циклоида – траектория фиксированной точки окружности, которая без скольжения катится по прямой (см. пример 1.17, уравнения (1.21)).

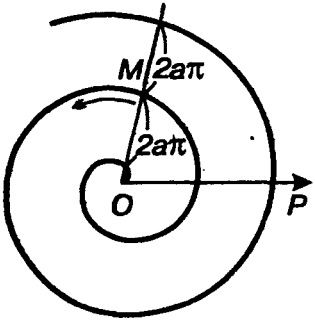

Рис. 2.41

Рассмотрим траекторию точки, жестко связанной с окружностью, катящейся по прямой, но находящуюся не на самой окружности, а на расстоянии d от ее центра. При $d < R$ вычерчивающая точка находится внутри окружности, ее траекторию называют укороченной циклоидой (рис. 2.42, *а*). Если $d > R$, то вычерчивающая точка находится вне окружности; ее траекторию называют удлиненной циклоидой (рис. 2.42, *б*). Эти линии определяются параметрическими уравнениями

$$x = Rt - d\sin t, \quad y = R - d\cos t.$$

Алгебраическая спираль – линия, определяемая алгебраическим уравнением $f(\rho, \varphi) = 0$ относительно полярных координат. К алгебраическим спиралям отно-

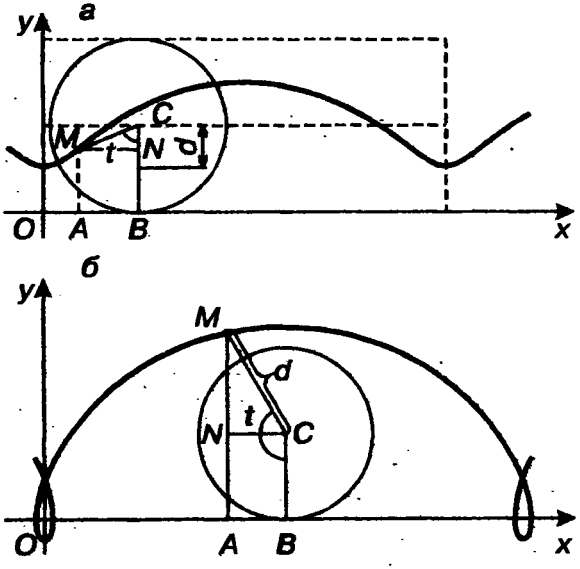

Рис. 2.42

сится спираль Архимеда, так как ее уравнение $\rho = a\varphi$ является алгебраическим уравнением первой степени относительно ρ и φ. Другими простейшими алгебраическими спиралями являются линии, определяемые уравнениями:

$\rho = a/\varphi$ (гиперболическая спираль, рис. 2.43);

$\rho = (a/\varphi) + l$, где $l > 0$ (конхоида гиперболической спирали, рис. 2.44);

$\rho = a\varphi^2$ (спираль Галилея, рис. 2.45);

$\rho^2 = a^2\varphi$ (спираль Ферма, рис. 2.46);

$\rho = a\sqrt{\varphi} + l$, где $l > 0$ (параболическая спираль, рис. 2.47);

$\rho = a/\sqrt{\varphi}$ (жезл, рис. 2.48);

Логарифмической спираль (рис. 2.49) — линия, определяемая уравнением

$$\rho = a^{\varphi} \ (a > 0, a \neq 1).$$

Логарифмическая спираль пересекает полярные радиусы всех своих точек под одним и тем же углом. На этом свойстве основано ее применение в технике. Так, в различных режущих инструментах и машинах вращающиеся ножи имеют профиль, очерченный по дуге логарифмической спирали. В силу этого угол резания остается постоянным. Логарифмическая спираль применяется в теории механизмов при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом (т.е. отношением их угловых скоростей). В природе некоторые раковины очерчены по логарифмической спирали (рис. 2.50).

Логарифмическая спираль впервые упоминается в письме Декарта к Мерсенну от 12 сентября 1638 г. (опубликовано в 1657 г.). Независимо от Декарта логарифмическая спираль была открыта Торричелли, который выполнил ее спрямление и квадратуру. Название «логарифмическая спираль» для данной линии предложил Лопиталь, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению.

Квадратриса. Дан отрезок AD длины $2a$, середина которого находится в точке O (рис. 2.51, *а*). Отрезок OA равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = \pi/2T$, а прямая KC, перпендикулярная AD, одновременно начинает равномерно двигаться от точки A к точке D со скоростью $v = a/T$, оставаясь параллельной исходному направлению. Точка M пересечения вращающегося отрезка и движущейся прямой описывает линию, которую называют квадратрисой.

Уравнение квадратрисы в декартовых координатах

$$y = x \cdot \mathrm{ctg}\,(\pi x/2a),$$

в полярных координатах

$$\rho = a\,(\pi - 2\varphi)/\pi\cos\varphi.$$

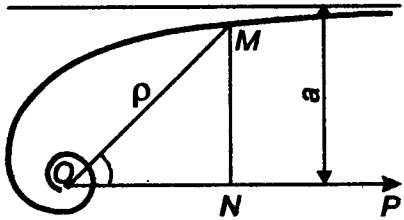

Рис. 2.43

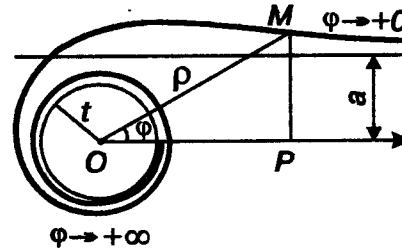

Рис. 2.44

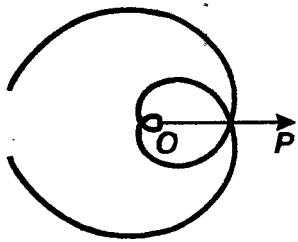

Рис. 2.45

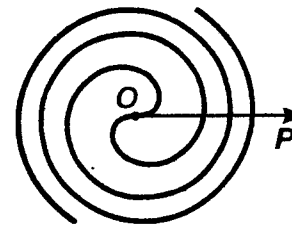

Рис. 2.46

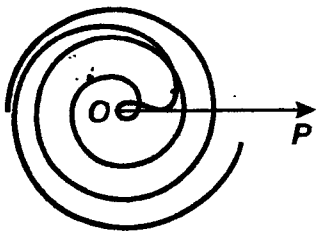

Рис. 2.47

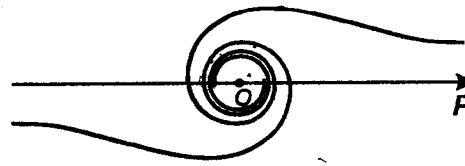

Рис. 2.48

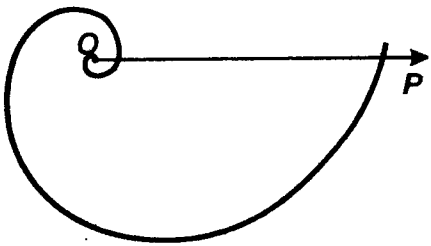

Рис. 2.49

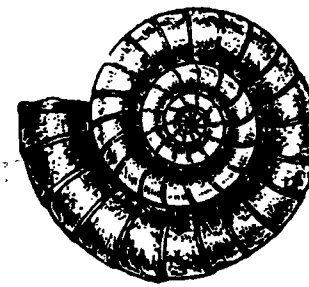

Рис. 2.50

Линия имеет бесконечное множество точек пересечения с осью ординат, так $\operatorname{ctg}(\pi x/2a)=0$ при $x=\pm a$, $x=\pm 3a$, $x=\pm 5a,\ldots$ Квадратриса изображена на рис. 2.51, *б*, а на рис. 2.51, *а* указана та часть линии, которая соответствует значениям аргумента x: $-a \le x \le a$. Название линии дал Лейбниц.

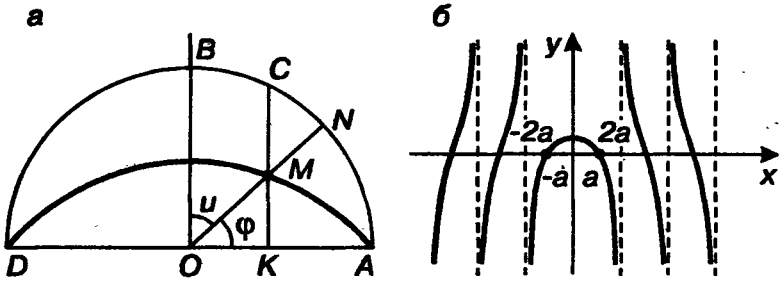

Рис. 2.51

Квадратрису впервые открыл Гиппий из Эллиды (древнегреческий софист, живший в V в. до н.э.) в поисках решения задачи о трисекции угла. К задаче о квадратуре круга эту линию применил древнегреческий геометр Динострат IV в. до н.э. В связи с этим линию называют квадратрисой Динострата.

Трактриса – линия, у которой длина касательной является постоянной величиной. Под длиной касательной понимают длину отрезка *MT*, касательной между точкой касания *M* и точкой *T* пересечения с осью *Ox* (рис. 2.52). Трактриса имеет параметрические уравнения

$$x = a\ln\operatorname{tg}(t/2) + a\cos t, \quad y = a\sin t;$$

ее уравнение в прямоугольных декартовых координатах

$$x = \pm\left(a\ln\left(\left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)/y\right)+\sqrt{a^2-y^2}\right).$$

Трактриса применяется в одной из частей механизма карусельного токарного станка (рис. 2.53). Линия вертикального профиля антифрикционной пяты этого механизма обладает тем свойством, что длина ее касательной постоянна.

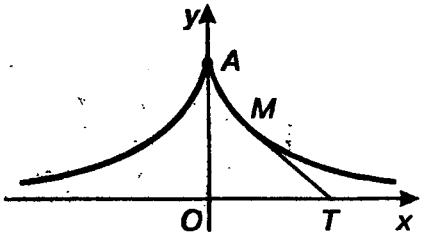

Рис. 2.52

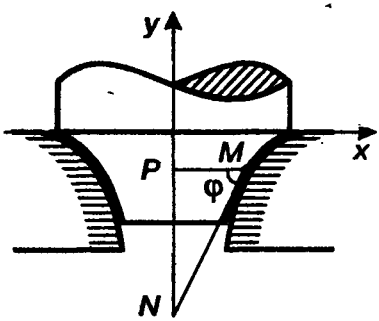

Рис. 2.53

Трактриса сыграла выдающуюся роль в истории математики в связи с открытием Н.И. Лобачевским новой геометрии и последующим развитием учения о неевклидовых геометриях. Геометрия Лобачевского реализуется на псевдосфере, полученной вращением трактрисы вокруг ее асимптоты.

Трактриса была открыта в XVII в. Ее название происходит от латинского слова *tracto* – тащу, влеку.

Цепная линия – кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести нить с закрепленными концами (рис. 2.54). В прямоугольных декартовых координатах цепная линия имеет уравнение

$$y=(a/2)(e^{x/a}+e^{-x/a}).$$

Длина дуги цепной линии от ее вершины до заданной точки равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в этой точке (рис. 2.55, $s=MN$). Проекция ординаты произвольной точки цепной линии на нормаль в этой точке является величиной постоянной, равной параметру a цепной линии ($a=ML$).

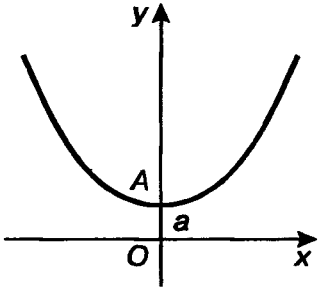

Рис. 2.54

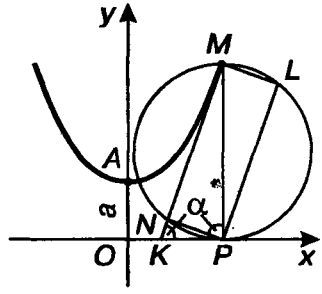

Рис. 2.55

Свойства цепной линии применяются в строительстве и технике. Они используются в расчетах, связанных с провисанием нитей-проводов, тросов и т.д. В строительной технике применяется также линия свода, определяемая уравнением

$$y=c(e^{x/a}+e^{-x/a}).$$

Вопрос о форме линии провисания впервые рассмотрел Галилей (1638). Он полагал, что линия провисания является параболой. Против этого позже возражал Гюйгенс. Окончательное теоретическое решения вопроса о форме линии провисания дали Лейбниц, Гюйгенс, Я. Бернулли.