Глава 4

ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Уравнение поверхности. Уравнения линии в пространстве

Уравнением поверхности в фиксированной системе координат называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Из этого определения вытекает способ решения следующей простой задачи: выяснить, лежит ли данная точка на поверхности, определяемой заданным уравнением. Для решения задачи необходимо подставить ее координаты в данное уравнение, если получается числовое равенство, то точка лежит на поверхности, в противном случае точка поверхности не принадлежит.

Всякое уравнение с тремя переменными x, y, z можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{4.1}$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных x, y, z.

Из определения прямоугольных декартовых координат точки в пространстве (см. п. 1.12) следует, что координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy определяются соответственно уравнениями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x = 0$ – уравнение плоскости Oyz и т.д.).

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, поэтому она определяется двумя уравнениями. Пусть l – линия, по которой пересекаются поверхности, определяемые уравнениями $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, т.е. множество общих точек этих поверхностей, тогда координаты любой точки линии l одновременно удовлетворяют обоим уравнениям:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Составить уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(a,b,c)$.

Исходя из определения сферы как множества точек пространства, равноудаленных от данной точки (центра), для произвольной ее точки $M(x, y, z)$ получаем $\rho(C, M) = R$. Так как

$$\rho(C, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \text{ то } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{4.3}$$

Для точки N, не лежащей на данной сфере, равенство $\rho(C, N) = R$ не будет выполнено, поэтому ее координаты не удовлетворяют уравнению (4.3). Следовательно, уравнение (4.3) является уравнением сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$.

В частном случае, когда центр сферы находится в начале координат ($a = b = c = 0$), уравнение (4.3) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) называется каноническим уравнением сферы.

Пример 4.2. Уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z = 0$$

определяют окружность радиуса $R = 5$, лежащую в плоскости Oxy. Действительно, первое уравнение определяет сферу радиуса $R = 5$ с центром в начале координат, второе уравнение – координатную плоскость Oxy.

Пример 4.3. Ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в пространстве определяется уравнениями $y = 0$, $z = 0$.

Действительно, уравнение $y=0$ определяет координатную плоскость Oxz, а уравнение $z=0$ – координатную плоскость Oxy. Ось Ox является линией пересечения координатных плоскостей Oxz и Oxy (см. рис. 1.13).

Отметим, что ось Oy имеет уравнения $x=0$, $z=0$, а ось Oz – уравнения $x=0$, $y=0$.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью n-го порядка. Сфера – поверхность второго порядка, так как ее уравнение (см. (4.3) и (4.4)) является уравнением второй степени относительно декартовых координат.

4.2. Параметрические уравнения линии и поверхности

Параметрическими уравнениями линии в пространстве называются уравнения вида

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t), \tag{4.5}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – функции некоторой переменной t (параметра), если при каждом значении t из конечного или бесконечного промежутка они дают координаты всех точек данной линии и только таких точек.

Параметрические уравнения часто применяются в механике для описания траектории движущейся точки, роль параметра t в таких случаях играет время.

Параметрическими уравнениями поверхности называются уравнения вида

$$x = f_1(u, v),\ y = f_2(u, v),\ z = f_3(u, v), \tag{4.6}$$

где $f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)$ – функции двух переменных u и v (параметров), если при любых значениях u и v (меняющихся в некоторой области) они дают координаты всех точек данной поверхности и только таких точек.

Правые части уравнений (4.6) содержат два параметра, а уравнения (4.5) – только один параметр.

Пример 4.4. Составить параметрические уравнения винтовой линии.

Винтовой линией называется линия, описываемая точкой, равномерно движущейся по образующей кругового цилиндра, который при этом вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

Выберем ось вращения цилиндра в качестве оси Oz декартовой прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 4.1). Обозначим через v постоянную скорость прямолинейного движения точки вдоль образующей, ω – скорость вращательного движения, R – радиус цилиндра. Пусть в начальный момент точка находилась на оси Ox (совпадала с точкой A), а в момент времени t – в положении M. Обозначим буквой N проекцию точки M на плоскость Oxy, буквой P – проекцию точки N на ось Ox, буквой Q – проекцию точки N на ось Oy. Обозначим через φ угол между OP и ON, получаем $x = OP = \cos\varphi$, $y = OQ = R\sin\varphi$, $z = NM = vt$. Поскольку $\varphi = \omega t$, то

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t,\ z = vt. \qquad (4.7)$$

Уравнения (4.7) являются параметрическими уравнениями винтовой линии.

Пример 4.5. Составить параметрические уравнения сферы радиуса R.

Введем в рассмотрение систему декартовых прямоугольных координат с началом в центре сферы и систему сферических координат с началом в той же точке (рис. 4.2). Пусть M – произвольная точка сферы, N – ее проекция на плоскость Oxy. Обозначим угол, образуемый вектором **OM** с осью Oz, через u (широта); угол, образуемый вектором **ON** с осью Ox, через v (долгота). Принимая во внимание определение декартовых координат (или связь между декартовыми и сферице-

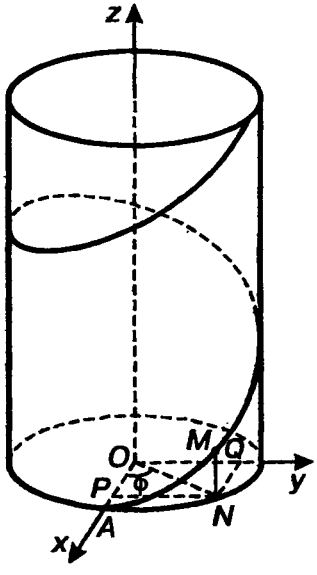

Рис. 4.1

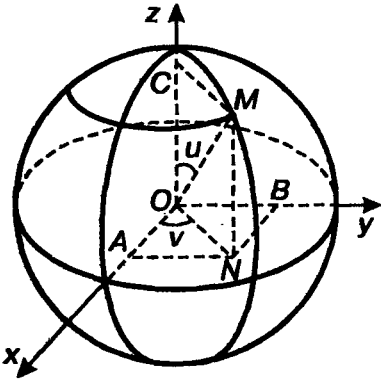

Рис. 4.2

скими координатами, см. 1.13, формулы (1.29)), получаем параметрические уравнения сферы

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u, \tag{4.8}$$

где $0 \le u \le \pi$, $0 \le v < 2\pi$.

Исключив из этих уравнений параметры u и v (для чего нужно возвести в квадрат обе части каждого уравнения и почленно сложить), получим уравнение сферы (4.4).

4.3. Различные виды уравнения плоскости

Плоскость в пространстве можно задать различными способами (точкой и вектором, перпендикулярном плоскости, тремя точками и т. д.), в зависимости от этого рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору. Ненулевой вектор **n**, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$ плоскости, то ее уравнение имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.9}$$

В этом уравнении коэффициенты A, B, C являются координатами нормального вектора.

Равенство (4.9) выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов: $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка плоскости (рис. 4.3).

Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени относительно декартовых координат

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.10}$$

где A, B, C одновременно в нуль не обращаются, т.е.

$$A^2 + B^2 + C^2 \ne 0, \tag{4.11}$$

определяет плоскость в пространстве. Уравнение (4.10) называется общим уравнением плоскости. Отметим частные случаи этого уравнения.

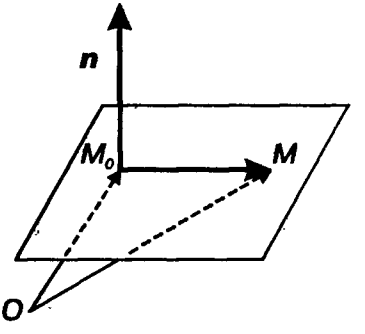

Рис. 4.3

Если $D = 0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0$$

и определяет плоскость, проходящую через начало координат (рис. 4.4, *а*; координаты $x = y = z = 0$ удовлетворяют данному уравнению).

Если $C = 0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax + By + D = 0$$

и определяет плоскость, параллельную оси Oz (рис. 4.4, *б*); нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz, ибо $C = 0$.

Если $C=0$, $D=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax+By=0$$

и определяет плоскость, проходящую через ось Oz (рис. 4.4, *в*; плоскость параллельна оси Oz и проходит через начало координат; в этом случае $A^2+B^2\neq 0$ в силу условия (4.11)).

Если $C=0$, $B=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax+D=0, \text{ или } x=a \quad (a=-D/A)$$

и определяет плоскость, параллельную плоскости Oyz или перпендикулярную оси Ox (рис. 4.4, *г*; нормальный вектор $\mathbf{n}=(A,0,0)$ перпендикулярен плоскости Oyz).

Если $C=0$, $B=0$, $D=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax=0, \text{ или } x=0 \text{ (так как } A\neq 0)$$

и определяет координатную плоскость Oyz.

З а м е ч а н и е. Если в уравнении (4.10) свободный член равен нулю ($D=0$), то плоскость проходит через начало координат; если коэффициент при одной из текущих координат равен нулю, то плоскость параллельна соответствующей координатной оси (например, если $B=0$, то плоскость параллельна оси Oy); если в нуль обращаются свободный член и один из коэффициентов при текущей координате, то плоскость проходит через соответствующую ось (если $D=0$ и $C=0$, то плоскость проходит через ось Oz); если равны нулю два коэффициента при текущих координатах, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости (когда $A=0$, $B=0$, плоскость параллельна плоскости Oxy); если обращаются в нуль свободный член и два коэффициента при текущих координатах, то плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью (когда $D=0$, $A=0$, $C=0$, плоскость совпадает с плоскостью Oxz).

Уравнение плоскости в отрезках, отсекаемых на осях координат. Если все коэффициенты уравнения (4.10) и его свободный член отличны от нуля, то уравнение можно привести к виду

$$x/a+y/b+z/c=1, \tag{4.12}$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$. Числа a, b и c означают величины направ-

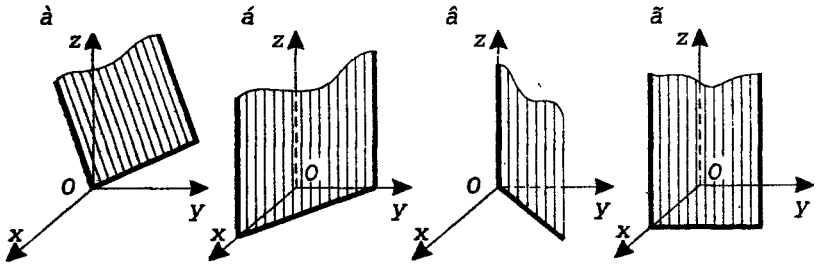

Рис. 4.4

ленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Этим объясняется название данного вида уравнения плоскости.

Нормальное уравнение плоскости. Уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{4.13}$$

где α, β, γ – углы, образованные нормальным вектором плоскости с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, называется нормальным (или нормированным) уравнением плоскости. Чтобы привести общее уравнение плоскости к виду (4.13), необходимо умножить его на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак выбирается противоположным знаку D. После умножения уравнения (4.10) на число μ получаем нормированное уравнение плоскости

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Равенство (4.14) выражает необходимое и достаточное условие (см. (3.36)) компланарности трех векторов $\mathbf{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\mathbf{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости (рис. 4.5).

Уравнение плоскости, проходящей через две точки и параллельной данному вектору. Если задан вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$,

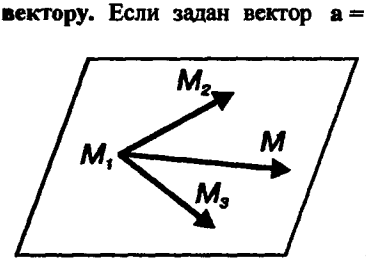

Рис. 4.5

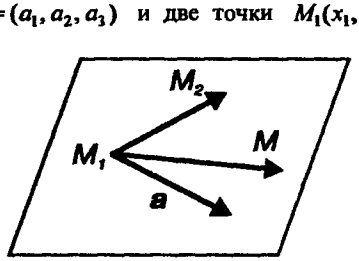

Рис. 4.6

$M_2(x_2, y_2, z_2)$, причем векторы **a** и $\mathbf{M_1M_2}$ неколлинеарны (рис. 4.6), то уравнение плоскости, проходящей через эту точку параллельно вектору **a**, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.15)$$

Равенство (4.15) выражает необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\mathbf{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам. Если даны два неколлинеарных вектора (рис. 4.7) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно векторам **a** и **b**, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.16)$$

Равенство (4.16) выражает необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: **a**, **b**, $\mathbf{M_1M}$, где M – произвольная точка данной плоскости.

Параметрические уравнения плоскости. Если даны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то параметрические уравнения плоскости, проходящей через эту точку параллельно данным векторам, имеют вид

$$x = x_1 + ua_1 + vb_1,\ y = y_1 + ua_2 + vb_2,\ z = z_1 + ua_3 + vb_3. \qquad (4.17)$$

Уравнения (4.17) следуют из равенства $\mathbf{M_1M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, где $M(x, y, z)$ – любая точка плоскости (равенство $\mathbf{M_1M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ означает, что любой вектор $\mathbf{M_1M}$ можно разложить по векторам **a** и **b**).

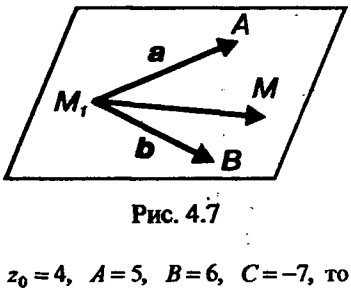

Рис. 4.7

Пример 4.6. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -3, 4)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n} = (5, 6, -7)$.

Так как в данном случае $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 4$, $A = 5$, $B = 6$, $C = -7$, то уравнение (4.9) принимает вид

$$5(x-2) + 6(y+3) - 7(z-4) = 0, \text{ или } 5x + 6y - 7z + 36 = 0.$$

Пример 4.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, -3, 2)$ параллельно векторам $\mathbf{a} = (5, -4, 8)$, $\mathbf{b} = (6, -1, 7)$.

Данные векторы неколлинеарны, так как их координаты не пропорциональны.

В соответствии с уравнением (4.16) получаем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, находим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-20(x-1)+13(y+3)+19(z-2)=0,\ 20x-13y-19z-21=0.$$

Пример 4.8. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $3x-4y+5z-60=0$.

Разделив обе части уравнения на 60 и преобразовав его, получим

$$\frac{x}{20}-\frac{y}{15}+\frac{z}{12}=1, \text{ или } \frac{x}{20}+\frac{y}{-15}+\frac{z}{12}=1.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.12), заключаем, что $a=20$, $b=-15$, $c=12$. Таковы величины отрезков, отсекаемых плоскостью соответственно на осях Ox, Oy, Oz.

Пример 4.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(9,-11,5)$, $M_2(7,4,-2)$, $M_3(-7,13,-3)$.

В соответствии с уравнением (4.14) получаем

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ 7-9 & 4+11 & -2-5 \\ -7-9 & 13+11 & -3-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -16 & 24 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-9)\begin{vmatrix} 15 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+11)\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} -2 & 15 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6(x-9)+12(y+11)+24(z-5)=0,\ (x-9)+2(y+11)+4(z-5)=0,$$

$$x+2y+4z-7=0.$$

4.4. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать различными способами (точкой и вектором, параллельной ей; двумя точками и т. п.), в связи с чем рассматривают различные виды ее уравнений.

Векторно-параметрическое уравнение прямой. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ прямой (рис. 4.8), то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, t – переменная величина (параметр). Уравнение (4.18) называется векторно-параметрическим уравнением прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a}$. Равенство (4.18) следует из определения суммы векторов и необходимого и достаточного условия коллинеарности двух векторов.

Параметрические уравнения прямой. Переходя от векторного соотношения (4.18) к координатным, получаем

$$x = x_0 + a_1 t,\ y = y_0 + a_2 t,\ z = z_0 + a_3 t. \tag{4.19}$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Канонические уравнения прямой. Выражая параметр t из уравнений (4.19) и приравнивая полученные выражения, находим, что

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{4.20}$$

Уравнения (4.20) называются каноническими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве ее направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, поэтому уравнения (4.20) примут вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.21}$$

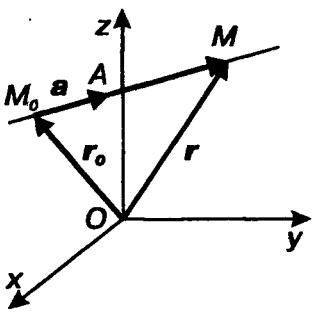

Рис. 4.8

Пример 4.10. Записать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (7, –9, 8) параллельно вектору $\mathbf{a} = (4, 3, -2)$.

Так как в данном случае $x_0 = 7, y_0 = -9, z_0 = 8, a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = -2$,

параметрические уравнения (4.19) принимают вид

$$x = 7 + 4t, \quad y = -9 + 3t, \quad z = 8 - 2t,$$

а канонические уравнения (4.20) запишутся так:

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y+9}{3} = \frac{z-8}{-2}.$$

Пример 4.11. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(6, -5, 4)$, $M_2(8, -7, 9)$. Привести эти уравнения к параметрическому виду.

Поскольку $x_1=6$, $y_1=-5$, $z_1=4$, $x_2=8$, $y_2=-7$, $z_2=9$, то уравнения (4.21) примут вид

$$\frac{x-6}{8-6} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z-4}{9-4}, \text{ или } \frac{x-6}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-4}{5}.$$

Обозначая равные отношения буквой t, получаем параметрические уравнения данной прямой:

$$x = 6 + 2t, \; y = -5 - 2t, \; z = 4 + 5t.$$

4.5. Задачи, относящиеся к плоскостям

Взаимное расположение двух плоскостей. Даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4.22}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4.23}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности этих плоскостей выражается равенствами

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}, \tag{4.24}$$

а их совпадения – равенствами

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \tag{4.25}$$

Другими словами, плоскости параллельны тогда и только тогда, когда пропорциональны их коэффициенты при текущих координатах; например, плоскости $x + 2y - 3z - 1 = 0$, $3x + 6y - 9z + 7 = 0$ параллельны. Плоскости совпадают тогда и только тогда, когда пропорциональны коэффициенты при текущих координатах и свободные члены; например, плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$, $4x - 6y + 2z - 8 = 0$ совпадают.

Если условие (4.24) не выполняется, то плоскости (4.22) и (4.23) пересекаются.

Угол между двумя плоскостями. Косинус угла между плоскостями (4.22) и (4.23) определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.26}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей (4.22) и (4.23) выражается равенством

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.27}$$

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.28)$$

Пример 4.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,3,-5)$ и параллельной плоскости $x-2y+4z-1=0$.

Это уравнение будем искать в виде $x-2y+4z+D=0$, где D – неизвестный свободный член (в формуле (4.24) полагаем отношение равным единице).

Так как плоскость проходит через точку M_0, то ее координаты должны удовлетворять последнему уравнению: $2-2\cdot 3+4\cdot(-5)+D=0$. $2-6-20+\ +D=0$, $D=24$. Следовательно, $x-2y+4z+24=0$ – искомое уравнение.

Пример 4.13. Найти угол между двумя плоскостями $11x-8y-7z+$ $+6=0$; $4x-10y+z-5=0$.

Косинус угла найдем по формуле (4.26), подставив в нее значения $A_1=11$, $B_1=-8$, $C_1=-7$, $A_2=4$, $B_2=-10$, $C_2=1$:

$$\cos\varphi=\frac{11\cdot 4+(-8)\cdot(-10)+(-7)\cdot 1}{\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}}=\frac{44+80-7}{\sqrt{234}\sqrt{117}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.14. Вычислить расстояние от точки $M_0(4,3,6)$ до плоскости $2x-y-2z-8=0$.

Подставив в формулу (4.28) значения $x_0=4$, $y_0=3$, $z_0=6$, $A=2$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-8$, получим

$$d=\frac{|2\cdot 4-3-2\cdot 6-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|-15|}{3}=5.$$

Пример 4.15. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x+2y-2z-1=0$, $x+2y-2z+5=0$.

Это расстояние равно расстоянию любой точки одной плоскости до другой. Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0=1$, $z_0=1$, из уравнения $x+2y-2z-1=0$ найдем $x_0=1$. По формуле (4.28) находим расстояние от точки $M_0(1,1,1)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$:

$$d=\frac{|1+2-2+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

4.6. Задачи, относящиеся к прямым в пространстве

Угол между двумя прямыми – угол между направляющими векторами этих прямых. Косинус угла между двумя прямыми

$$x = x_1 + a_1 t,\ y = y_1 + a_2 t,\ z = z_1 + a_3 t; \tag{4.29}$$

$$x = x_2 + b_1 t,\ y = y_2 + b_2 t,\ z = z_2 + b_3 t \tag{4.30}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4.31}$$

Равенство $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых (4.29), (4.30). Необходимое и достаточное условие параллельности этих прямых выражается равенствами $\mathbf{b}_1 = \alpha\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \alpha\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3 = \alpha\mathbf{a}_3$, или

$$b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3. \tag{4.32}$$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Для исследования взаимного расположения прямых (4.29) и (4.30) рассматривается смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Если $\mathbf{abM_1M_2} \neq 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4.33}$$

то прямые являются скрещивающимися. Неравенство (4.33) означает, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{M_1M_2}$ некомпланарны.

Прямые (4.29) и (4.30) лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\mathbf{abM_1M_2} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.34}$$

Эти прямые пересекаются, если первые две строки определителя не пропорциональны, т.е. не выполнено условие (4.32). Прямые параллельны, когда первые две строки определителя пропорциональны. Прямые совпадают, если пропорциональны все строки определителя (4.34).

Замечание. Чтобы найти точку пересечения прямых (4.29) и (4.30), необходимо решить систему их уравнений; при этом целесообразно параметры обозначить различными буквами (так как одна и та же точка пересечения прямых получается, как правило, при различных значениях параметра в уравнениях данных прямых).

Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (4.29) вычисляется по формуле

$$\mathbf{d} = \frac{\left|[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}]\right|}{|\mathbf{a}|}, \tag{4.35}$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ – радиусы-векторы точек M_0 и M_1, $\mathbf{a}$ – направляющий вектор прямой (рис. 4.9).

Расстояние между двумя прямыми. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми (4.29) и (4.30) определяется формулой

$$\mathbf{d} = \frac{\left|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}\right|}{\left|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right|}, \tag{4.36}$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – радиусы-векторы точек M_1, M_2; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – направляющие векторы данных прямых (рис. 4.10).

Пример 4.16. Найти угол между двумя прямыми $x = 3 + 2t$, $y = 4 + 7t$, $z = -5 + 8t$; $x = 2 + 8t$, $y = 6 - 11t$, $z = -8 - 7t$.

Первая прямая имеет направляющий вектор $\mathbf{a} = (2, 7, 8)$, вторая – $\mathbf{b} = (8, -11, -7)$. По формуле (4.31) находим

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 8 + 7\cdot(-11) + 8\cdot(-7)}{\sqrt{2^2 + 7^2 + 8^2}\,\sqrt{8^2 + (-11)^2 + (-7)^2}} = \frac{-117}{\sqrt{117}\,\sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 135°$.

Пример 4.17. Доказать, что прямые $x = 7 + 5t$, $y = -5 - 7t$, $z = -2 - 3t$ и $x = t$, $y = t$, $z = -3 + 2t$ пересекаются. Найти точку их пересечения.

Рассмотрим векторы $\mathbf{M_1M_2} = (0 - 7, 0 - (-5), -3 - (-2)) = (-7, 5, -1)$, $\mathbf{a} = (5, -7, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ и их смешанное произведение

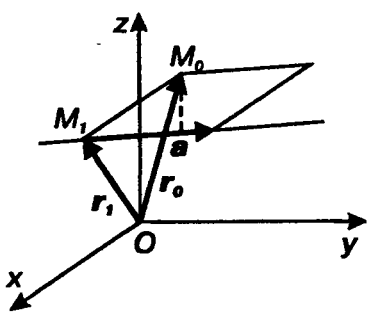

Рис. 4.9

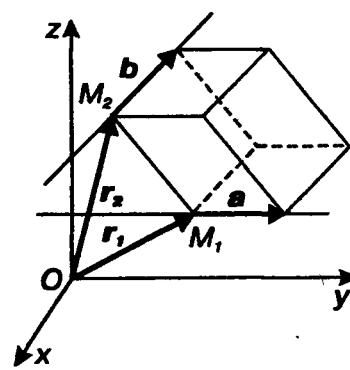

Рис. 4.10

$$\mathbf{abM_1M_2} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -12 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку смешанное произведение трех векторов равно нулю, то векторы компланарны; значит, данные прямые лежат в одной плоскости. Так как направляющие векторы **a** и **b** этих прямых неколлинеарны (их координаты не пропорциональны), то прямые пересекаются.

Чтобы найти точку пересечения, приравняем выражения для координат, предварительно обозначив параметр буквой s в уравнениях второй прямой:

$$7+5t=s, \quad -5-7t=s, \quad -2-3t=-3+2s.$$

Из первых двух уравнений следует, что $7+5t=-5-7t$, откуда $t=-1$; следовательно, $s=2$. При этих значениях t и s третье уравнение обращается в тождество. Подставляя значение $t=-1$ в уравнения первой прямой (или $s=2$ в уравнения второй прямой $x=s$, $y=s$, $z=-3+2s$), находим $x=2$, $y=2$, $z=1$. Итак, $M(2,2,1)$ – точка пересечения данных прямых.

Пример 4.18. Найти расстояние от точки $M_0(2,-3,5)$ до прямой: $x=5+2t$, $y=-4-t$, $z=6-2t$.

Найдем сначала векторное произведение, входящее в формулу (4.35):

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=\mathbf{M_0M_1}=(5-2,-4-(-3),6-5)=(3,-1,1), \quad \mathbf{a}=(2,-1,-2),$$

$$[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\mathbf{a}]=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)=(3,8,-1).$$

По формуле (4.35) получаем

$$\mathbf{d}=\frac{\sqrt{3^2+8^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{74}}{3}.$$

4.7. Задачи на прямую и плоскость

Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями (4.22) и (4.23). Если условие (4.24) не выполнено (т. е. коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2), то плоскости пересекаются по прямой, определяемой уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{4.37}$$

Эти уравнения приводятся к параметрическому виду

$$x=x_0+\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}t, \quad y=y_0-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}t, \quad z=z_0+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}t. \tag{4.38}$$

Данная прямая имеет направляющий вектор

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right), \tag{4.39}$$

где $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой может быть выбрана произвольно; для этого необходимо в системе (4.37) зафиксировать значение одной переменной (например, $z = z_0$), из полученной системы уравнений найти значения двух других переменных ($x = x_0$, $y = y_0$).

Пучок плоскостей – множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (4.37), имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α и β – любые действительные числа, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Это уравнение можно привести к виду

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{4.40}$$

где $\lambda = \beta/\alpha$, $\alpha \neq 0$. Уравнение (4.40) определяет все плоскости пучка, за исключением той, которой соответствует $\alpha = 0$, т.е. за исключением плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол между прямой и плоскостью. Синус угла между прямой

$$x = x_0 + a_1t,\ y = y_0 + a_2t,\ z = z_0 + a_3t \tag{4.41}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.42}$$

определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{4.43}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости. Прямая (4.41) и плоскость (4.42) пересекаются, если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0; \tag{4.44}$$

перпендикулярны, когда

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}; \tag{4.45}$$

параллельны, если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \tag{4.46}$$

совпадают, когда

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{4.47}$$

Координаты точки пересечения прямой (4.41) и плоскости (4.42) находятся из системы их уравнений.

Неравенство (4.44) означает, что нормальный вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ плоскости (4.42) и направляющий вектор $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ прямой (4.41) не перпендикулярны, т.е. прямая и плоскость не параллельны.

Равенства (4.45) означают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т.е. прямая (4.41) и плоскость (4.42) перпендикулярны.

Соотношения (4.46) показывают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны, т.е. прямая и плоскость параллельны, но точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой (4.41) не принадлежит плоскости (4.42).

Равенства (4.47) означают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой принадлежит плоскости (прямая лежит в плоскости).

Пример 4.19. Уравнения прямой $x+2y+4z-7=0$, $2x+y-z-5=0$ привести к параметрическому виду.

Поскольку в этих уравнениях коэффициенты при текущих координатах непропорциональны, то плоскости, определяемые данными уравнениями, пересекаются. Данные уравнения определяют прямую. Выберем на прямой точку. Полагая в этих уравнениях, например, $z_0=2$, получаем

$$x+2y=-1,\ 2x+y=7,$$

откуда x_0=5, y_0=-3. На прямой зафиксирована точка $M_0(5,-3,2)$. По формуле (4.39) найдем направляющий вектор прямой. Так как $\mathbf{n}_1=(1,2,4)$, $\mathbf{n}_2=(2,1,-1)$, то

$$\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=\left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-6, 9, -3).$$

Параметрические уравнения (4.38) данной прямой принимают вид $x=5-6t$, $y=-3+9t$, $z=2-3t$.

Замечание. В качестве направляющего вектора можно взять $\frac{1}{3}\mathbf{a}=(-2,3,-1)$, тогда $x=5-2t$, $y=-3+3t$, $z=2-t$.

Пример 4.20. Найти угол между прямой $x=-3-t$, $y=5-t$, $z=-4+2t$ и плоскостью $2x-4y+2z-9=0$.

Применяя формулу (4.43) для случая a_1=-1, a_2=-1, a_3=2, A=2, B=-4, C=2, находим

$$\sin\varphi=\frac{|2(-1)-4(-1)+2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},\ \varphi=30^\circ.$$

Пример 4.21. Найти проекцию точки $M(1,-2,4)$ на плоскость $5x-3y+6z+35=0$.

Этой проекцией является точка пересечения перпендикуляра к плоскости, проходящей через точку M. Для прямой, перпендикулярной плоскости, направляющим вектором будет $\mathbf{n}=(5,-3,6)$. Параметрические уравнения

прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку M, примут вид $x=1+5t$, $y=-2-3t$, $z=4+6t$.

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, находим:

$$5(1+5t)-3(-2-3t)+6(4+6t)+35=0,\ 70t+70=0,\ t=-1.$$

При этом значении t из уравнений прямой получаем: $x=1-5=-4$, $y=-2+3=1$, $z=4-6=-2$. Следовательно, точка $N(-4,1,-2)$ – искомая проекция.

Пример 4.22. Вершины пирамиды находятся в точках $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$, $A_4(7,5,9)$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения прямой A_1A_4; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Найдем сначала координаты векторов $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$ и координаты векторного произведения $[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]$. По формуле (3.15) получаем

$$\mathbf{A_1A_2}=(6-4,9-6,4-5)=(2,3,-1);\ \mathbf{A_1A_3}=(2-4,10-6,10-5)=(-2,4,5);$$

$$\mathbf{A_1A_4}=(7-4,5-6,9-5)=(3,-1,4).$$

С помощью формулы (3.26) находим

$$[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right)=(19,-8,14).$$

1. Длина ребра A_1A_2 равна расстоянию между точками A_1 и A_2, которое вычислим по формуле (1.26):

$$\rho(A_1, A_2)=\sqrt{(6-4)^2+(9-6)^2+(4-5)^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74.$$

Тот же результат можно получить, найдя модуль вектора $\mathbf{A_1A_2}$ по формуле (3.11).

2. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 равен углу φ между векторами $\mathbf{A_1A_2}=\mathbf{a}$, $\mathbf{A_1A_3}=\mathbf{b}$. В соответствии с формулой (3.22) получаем

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{2(-2)+3\cdot 4-1\cdot 5}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+5^2}}=\frac{3}{3\sqrt{70}}=\frac{1}{\sqrt{70}}.$$

$$\cos\varphi\approx 0{,}1195,\ \varphi\approx 83°31'.$$

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника $A_1A_2A_3$, которую вычислим по формуле (3.29), использовав формулу (3.11) для модуля вектора и координаты вектора $[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]$:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}=\frac{\sqrt{621}}{2},\ S\approx 12{,}46.$$

4. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем по формуле (3.35):

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\\ 7-4 & 5-6 & 9-5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\frac{121}{6}=20\frac{1}{6}.$$

5. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ как плоскости, проходящей через три точки (см. (4.14)), принимает вид

$$\begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}=0,$$

$$19(x-4)-8(y-6)+14(z-5)=0,\ 19x-18y+14z-98=0. \qquad \text{(I)}$$

6. Уравнения прямой A_1A_4 как прямой, проходящей через две точки (см. (4.21)), запишутся так:

$$\frac{x-4}{7-4}=\frac{y-6}{5-6}=\frac{z-5}{9-5},\quad \frac{x-4}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{4},$$

или

$$x=4+3t,\ y=6-t,\ z=5+4t. \qquad \text{(II)}$$

7. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ равен углу φ между плоскостью (I) и прямой (II). По формуле (4.43) находим

$$\sin\varphi=\frac{|19\cdot 3-8\cdot(-1)+14\cdot 4|}{\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{121}{\sqrt{621}\sqrt{26}},$$

$$\sin\varphi\approx 0{,}9522,\ \varphi\approx 72°13'.$$

8. Уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, можно записать как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 и перпендикулярной плоскости (I), имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}=(19,-8,14)$, который для этой прямой будет направляющим вектором. Уравнения (4.19) в данном случае принимают вид $x=7+19t,\ \ y=5-8t,\ \ z=9+14t.$

4.8. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения

Цилиндрической называется поверхность, описываемая прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и остающейся параллельной исходному направлению (рис. 4.11). Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, имеет вид

$$F(x,y)=0. \qquad (4.48)$$

Особенность уравнения (4.48) состоит в том, что оно не содержит переменной z. Если уравнение $F(y, z) = 0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Ox. Если уравнение $F(x, z) = 0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oy.

Поверхность, образованная вращением линии l

$$x = f(z),\ y = \varphi(z) \tag{4.49}$$

вокруг оси Oz (рис. 4.12), определяется уравнением

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + \varphi^2(z). \tag{4.50}$$

Поверхность, образованная вращением линии $x = f_1(y)$, $z = f_2(y)$ вокруг оси Oy, имеет уравнение $x^2 + z^2 = f_1^2(y) + f_2^2(y)$.

Поверхность, образованная вращением линии $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$ вокруг оси Ox, определяется уравнением $y^2 + z^2 = \varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)$.

Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, полученная вращением линии второго порядка вокруг ее оси.

Эллипсоидом вращения называется поверхность, полученная вращением эллипса вокруг одной из его осей. Уравнение эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oz, имеет вид $x^2/b^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

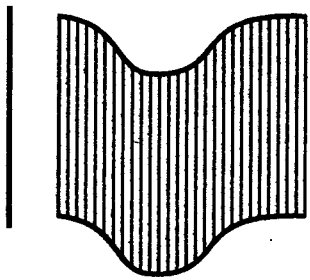

Рис. 4.11

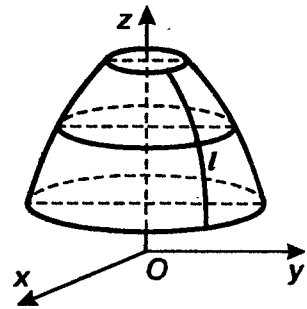

Рис. 4.12

Однополосным гиперболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси. Однополосный гиперболоид вращения, полученный вращением гиперболы $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oz, имеет уравнение

$$x^2/b^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1.$$

Двуполостным гиперболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси. Двуполостный гиперболоид, полученный вращением гиперболы $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$,

$x = 0$ вокруг оси Oz, определяется уравнением

$$x^2/b^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Параболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением параболы вокруг ее оси. Уравнение параболоида вращения, полученного вращением параболы $y^2 = 2pz$, $x = 0$ вокруг оси Oz, имеет вид

$$\frac{x^2}{p} = \frac{y^2}{p} = 2z.$$

Пример 4.23. Составить уравнение поверхности, полученной вращением линии $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 0$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

Данные уравнения определяют пару пересекающихся прямых в плоскости Oxz, проходящих через начало координат (являющихся пересечением плоскостей $x/a - z/c = 0$, $x/a + z/c = 0$ с плоскостью Oxz). Приведем эти уравнения к виду (4.49):

$$x = \pm (a/c)\, z,\ y = 0.$$

В соответствии с уравнением (4.50) получаем

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением конуса вращения, получающегося при вращении указанных прямых вокруг оси Oz.

4.9. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (эллипсоид, рис. 4.13); (4.51)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (однополосный гиперболоид, рис. 4.14); (4.52)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$ (двуполостный гиперболоид, рис. 4.15); (4.53)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ (конус, рис. 4.16); (4.54)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$ (эллиптический параболоид, рис. 4.17); (4.55)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$ (гиперболический параболоид, рис. 4.18); (4.56)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (эллиптический цилиндр, рис. 4.19); (4.57)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (гиперболический цилиндр, рис. 4.20); (4.58)

$x^2 = 2py$ (параболический цилиндр, рис. 4.21); (4.59)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ (пара пересекающихся плоскостей); (4.60)

$x^2/a^2 = 1$ (пара параллельных плоскостей); (4.61)

$x^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей). (4.62)

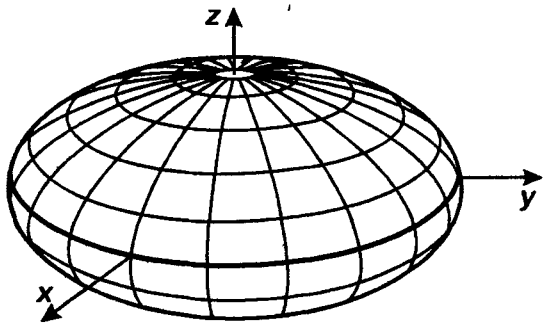

Рис. 4.13

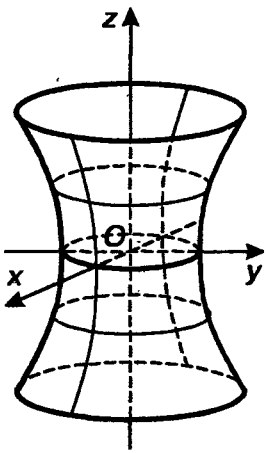

Рис. 4.14

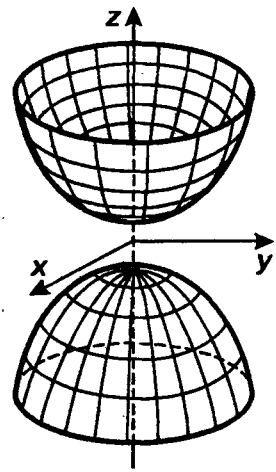

Рис. 4.15

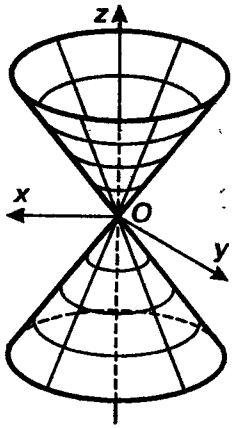

Рис. 4.16

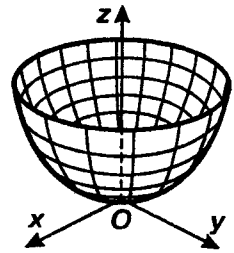

Рис. 4.17

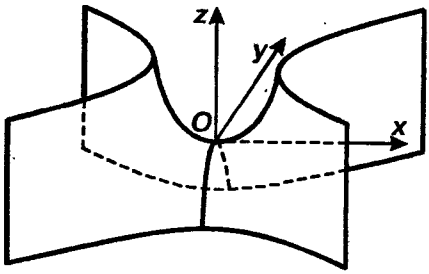

Рис. 4.18

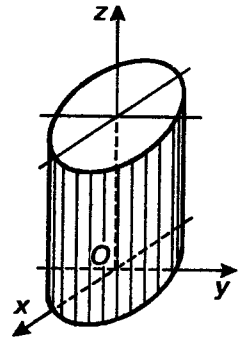

Рис. 4.19

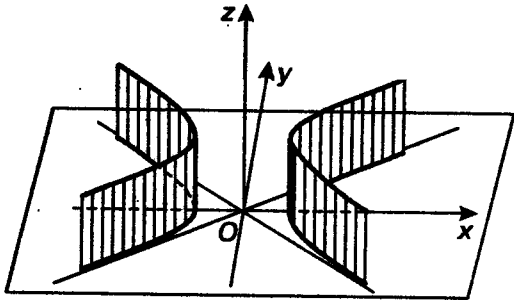

Рис. 4.20

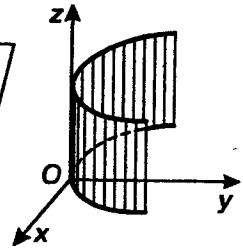

Рис. 4.21

Замечание 1. Уравнение (4.51) при $a=b=c=R$ принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{4.63}$$

и определяет сферу радиуса R с центром в начале координат.

Общее уравнение второй степени относительно x, y, z может быть приведено к одному из уравнений (4.51) – (4.63) или к одному из следующих уравнений:

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=-1; \tag{4.64}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0; \tag{4.65}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2=-1; \tag{4.66}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2=0; \tag{4.67}$$

$$x^2/a^2=-1. \tag{4.68}$$

Уравнениям (4.64), (4.66) и (4.68) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства; уравнению (4.65) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0,0,0)$; уравнению (4.67) удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой $x=0$, $y=0$.

Замечание 2. Если уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+F=0 \tag{4.69}$$

(т.е. уравнение, у которого коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а коэффициенты при произведениях координат равны нулю) определяет некоторую поверхность, то этой поверхностью является сфера. Уравнение (4.69) в этом случае может быть приведено к виду

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{4.70}$$

Уравнение (4.70) является уравнением сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$.

Прямые, целиком лежащие на некоторой поверхности, называются прямолинейными образующими данной поверхности.

Однополосный гиперболоид (4.52) имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Гиперболический параболоид (4.56) также имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\beta z,\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\alpha,$$

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\beta,\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\alpha z.$$

Пример 4.24. Определить вид и параметры поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0.$$

Преобразуем это уравнение, выделив в левой части полные квадраты:

$$3(x^2-2x+1)+4(y^2+4y+4)+6(z^2-6z+9)-3-16-54+49=0,$$

$$3(x-1)^2+4(y+2)^2+6(z-3)^2=24.$$

Введем новые координаты по формулам (3.17):

$$X=x-1,\ Y=y+2,\ Z=z-3, \qquad \text{(I)}$$

тогда уравнение примет вид

$$3X^2+4Y^2+6Z^2=24, \text{ или } X^2/8+Y^2/6+Z^2/4=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипсоид (см. (4.51)), для которого $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$. Центр эллипсоида находится в точке $O_1(1,-2,3)$; в новой системе координат центром является точка с координатами $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Из этих равенств и формул (I) находим $x=1$, $y=-2$, $z=3$, т.е. координаты точки O_1.

Пример 4.25. Определить вид и параметры поверхности

$$2x^2+3y^2-6z^2-8x+6y+12z-1=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$2(x^2-4x+4)+3(y^2+2y+1)-6(z^2-2z+1)-8-3+6-1=0,$$

$$2(x-2)^2+3(y+1)^2-6(z-1)^2=6.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-2$, $Y=y+1$, $Z=z-1$, получаем

$$2X^2+3Y^2-6Z^2=6, \text{ или } X^2/3+Y^2/2-Z^2/1=1.$$

Это уравнение определяет однополостный гиперболоид (см. (4.52)), для которого $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$, с центром в точке $O_1(2,-1,1)$.

Пример 4.26. Доказать, что уравнение $z=xy$ определяет гиперболический параболоид.

Введем новые координаты по формулам $x=X-Y$, $y=X+Y$, $z=Z$, тогда уравнение примет вид

$$Z=(X-Y)(X+Y),\ Z=X^2-Y^2.$$

Полученное уравнение является уравнением вида (4.56), для которого $2a^2=1$, $2b^2=1$; оно определяет гиперболический параболоид.

Пример 4.27. Доказать что уравнение $x^2=yz$ определяет конус.

Переходя к новым координатам по формулам $x=X$, $y=Z-Y$, $z=Z+Y$, получаем $X^2=(Z-Y)(Z+Y)$, $X^2=Z^2-Y^2$, или $X^2+Y^2-Z^2=0$.

Полученное уравнение является уравнением вида (4.54), для которого $a=b=c=1$, оно определяет конус.

4.10. Некоторые другие поверхности

В плоскости Oxz (y=0) задана линия l_1 своими параметрическими уравнениями

$$x = f(u),\ z = \varphi(u), \tag{4.71}$$

не пересекающая ось Oz. Рассмотрим поверхность, полученную вращением этой линии вокруг оси Oz.

Параметрические уравнения рассматриваемой поверхности вращения имеют вид

$$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = \varphi(u). \tag{4.72}$$

Тор – поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости данной окружности и не пересекающей ее. Эта поверхность напоминает спасательный круг, камеру автомобильной шины (рис. 4.22).

Рассмотрим тор, полученный вращением вокруг оси Oz окружности, заданной параметрическими уравнениями

$$x = a + b\cos u,\ y = 0,\ z = b\sin u \quad (b < a).$$

Эта окружность лежит в плоскости Oxz $(y = 0)$ и определяется уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a + b\cos u$, $\varphi(u) = b\sin u$.

В соответствии с(4.72) получаем параметрические уравнения тора

$$x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u. \tag{4.73}$$

Катеноид – поверхность, полученная вращением цепной линии вокруг ее оси (рис. 4.23). Рассмотрим катеноид, полученный вращением вокруг оси Oz цепной линии, заданной параметрическими уравнениями

$$x = a\,\mathrm{ch}\,(u/a),\ y = 0,\ z = u.$$

Эта линия расположена в плоскости Oxz $(y = 0)$. Она определена уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)$, $\varphi(u) = u$. В соответствии с (4.72) находят

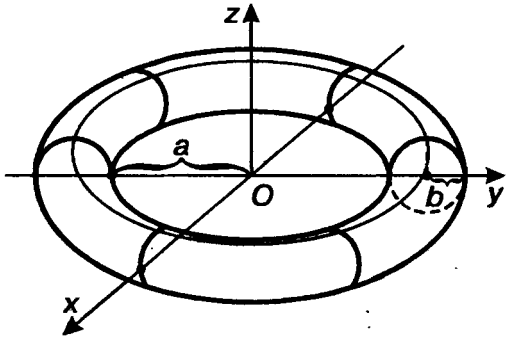

Рис. 4.22

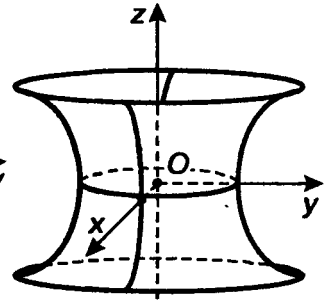

Рис. 4.23

параметрические уравнения катеноида

$$x = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\sin v,\ z = u.$$

Исключая из этих уравнений параметры u, v, получаем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (a/2)(e^{z/a} + e^{-z/a}). \qquad (4.74)$$

Катеноид является единственной минимальной поверхностью среди поверхностей вращения. Минимальные поверхности возникли при решении следующей задачи: среди всех поверхностей, проходящих через данную замкнутую пространственную линию, найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности, ограниченной данной линией. Отсюда происходит и название такой поверхности. Бельгийский физик Плато предложил простой экспериментальный способ получения минимальных поверхностей посредством мыльных пленок, натянутых на проволочный каркас.

Катеноид обладает следующим свойством. Рассмотрим две окружности, полученные пересечением катеноида (4.74) соответственно плоскостями $z = -c$, $z = c$. Любая поверхность, края которой совпадают с этими окружностями, имеет площадь большую, чем часть катеноида, расположенная между указанными окружностями. Мыльная пленка, соединяющая данные окружности под действием сил внутреннего натяжения, принимает форму катеноида.

Геликоид – поверхность, описанная прямой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, пересекает ось под постоянным углом α и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha = 90°$ геликоид называют прямым (рис. 4.24, *а*), при $\alpha \neq 90°$ геликоид называют косым (рис. 4.24, б).

Рассмотрим прямой геликоид, описанный прямой, перпендикулярной оси Oz (см. рис. 4.24, *а*). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности, P – ее проекция на плоскость Oxy, Q, L – проекции точки P соответственно на оси Ox, Oy. Обозначим через u расстояние точки M до оси Oz ($|MN| = |OP| = u$), а через v – угол, образуемый отрезком OP с осью Ox.

Параметрические уравнения геликоида имеют вид

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av,$$

где a – некоторая постоянная.

Наглядное представление о положении отдельных прямых (лучей) при $v = \mathrm{const}$ дают ступени винтовой лестницы.

Представление о геликоиде можно составить, например, наблюдая движение винта вертолета при его вертикальном взлете. Отметим, что первоначально вертолеты называли геликоптерами, винтокрылыми. Первый эскиз геликоида был нарисован еще Леонардо да Винчи.

Разнообразные геликоиды широко применяются на практике. Это объясняется следующим: геликоид образован сложением двух самых распространенных видов

равномерного движения – прямолинейного и вращательного. Вследствие этого геликоид можно применить там, где необходимо перейти от одного из указанных видов движения к другому, что имеет место практически в любой машине.

Псевдосфера – поверхность, полученная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 4.25). Рассмотрим псевдосферу, полученную вращением вокруг оси Oz трактрисы

$$x = a\sin u,\ y = 0,\ z = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Эта трактриса лежит в плоскости Oxz $(y = 0)$, ось Oz служит ее асимптотой. Линия задана параметрическими уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a\sin u$,

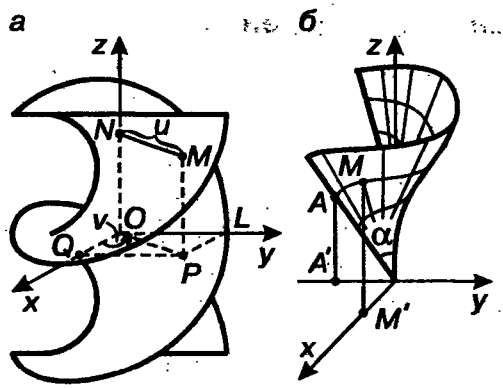

Рис. 4.24

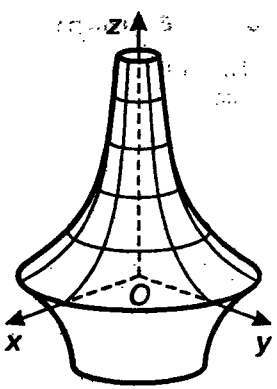

Рис. 4.25

$\varphi(u) = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$. В соответствии с (4.72) получены параметрические уравнения псевдосферы

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Важность псевдосферы состоит в том, что на ней частично реализуется плоская неевклидова геометрия Лобачевского. Этот удивительный факт установил итальянский математик Эудженио Бельтрами в 1868 г., уже после смерти Н.И. Лобачевского.