

Глава 6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Линейные системы. Основные определения

Системой уравнений называют множество уравнений с n неизвестными ($n \geq 2$), для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n , или линейной системой, называется система вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где a_{ik}, b_i — числа. Числа a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) называются коэффициентами, b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — свободными членами. Коэффициенты обозначены буквой a с двумя индексами i и k : первый (i) указывает номер уравнения, второй (k) — номер неизвестной, к которой относится данный коэффициент. Число уравнений m может быть больше, равно или меньше числа неизвестных n .

Линейная система называется неоднородной, если среди свободных членов имеются отличные от нуля. Если все свободные члены равны нулю, то линейная система называется однородной. Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Решением линейной системы (6.1) называется упорядоченная совокупность n чисел

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \tag{6.3}$$

подстановка которых вместо x_1, x_2, \dots, x_n соответственно ($x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$) обращает в тождество каждое из уравнений этой системы.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а система, не имеющая ни одного решения, — несовместной. Отметим, что однородная система всегда совместна, так как она имеет нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной. Совместная система называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Две системы называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т. е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования: 1) умножение уравнения системы на число, отличное от нуля; 2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на любое число; 3) перестановка местами двух уравнений системы.

При элементарных преобразованиях линейной системы получают систему, равносильную данной.

Выражение «решить линейную систему» означает выяснить, совместна она или несовместна; в случае совместности — найти все ее решения.

6.2. Матричная запись линейной системы

Линейную систему (6.1) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (6.1), называется основной матрицей системы (или матрицей системы). Матрица

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

полученная из основной присоединением столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы (6.1).

Рассмотрим столбцовые матрицы, составленные из неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Поскольку матрица A согласована с матрицей X (число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X), то можно найти произведение

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Элементами этой столбцовой матрицы являются левые части уравнений системы (6.1), поэтому на основании определения равенства матриц

$$AX = B. \quad (6.7)$$

Таким образом, система линейных уравнений (6.1) записана в виде одного матричного уравнения (6.7), где A, X, B определяются формулами (6.4) и (6.6); эта запись системы называется матричной.

Каждой линейной системе (6.1) соответствует единственная пара матриц A, B и обратно: каждой паре матриц – единственная линейная система. Система (6.1) может быть записана и в таком виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Если (c_1, c_2, \dots, c_n) – решение системы (6.1), то матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

называется вектор-решением этой системы. Матрица (6.9) удовлетворяет уравнению (6.7).

Пример 6.1. Представить в матричной форме линейную систему уравнений

$$2x_1 + 3x_2 = 8,$$

$$5x_1 + x_2 = 7.$$

В данном случае формулы (6.4) и (6.6) запишутся так:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

поэтому уравнение (6.7) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Эта система имеет вектор-решение $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Замечание. В соответствии с формулой (6.8) данная система представима в виде

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

6.3. Невырожденные линейные системы

Определителем системы n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (6.10)$$

называется определитель матрицы из коэффициентов уравнений этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.11)$$

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (6.10):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.12)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

Линейная система (6.10) называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля ($\Delta \neq 0$).

Теорема 6.1. Невырожденная линейная система (6.10) имеет единственное решение

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad \dots, \quad x_n = \Delta_n / \Delta, \quad (6.13)$$

где Δ и Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) определены соответственно формулами (6.11) и (6.12).

Эта теорема называется теоремой Крамера, а формулы (6.13) – формулами Крамера.

Следствие из теоремы Крамера. Если однородная линейная система

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0$$

имеет ненулевое решение, то ее определитель Δ равен нулю.

Систему (6.10) n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде

$$AX = B, \quad (6.14)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & 2 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Если система является невырожденной, т. е. $\det A \neq 0$, то она имеет единственное решение

$$X = A^{-1}B, \quad (6.16)$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A , а B определяется третьей из формул (6.15).

Пример 6.2. Решить систему уравнений

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 1,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5,$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4.$$

Составим определитель системы Δ и определители Δ_k ($k = 1, 2, 3$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Определитель системы $\Delta = 21 \neq 0$, т. е. данная система является невырожденной, поэтому применимы теорема 6.1 и формулы (6.13). Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; пользуемся формулами (6.13), полагая в них $n=3$. Так как $\Delta_1 = 42, \Delta_2 = 63, \Delta_3 = 21$, то

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = \frac{42}{21} = 2, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta = \frac{63}{21} = 3, \quad x_3 = \Delta_3 / \Delta = \frac{21}{21} = 1.$$

Пример 6.3. Решить систему уравнений

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9,$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4,$$

$$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18.$$

Данную систему запишем в матричном виде (6.14), где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы A , находим матрицу A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 39, \quad A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix}.$$

По формуле (6.16) получаем решение системы

$$X = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39} \begin{bmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5$.

6.4. Произвольные линейные системы

Рассмотрим линейную систему (6.1), ее основную матрицу A и расширенную \tilde{A} , определяемую формулой (6.5).

Теорема 6.2. (Кронекера – Капелли). Для совместности системы (6.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Теорема 6.3. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 6.4. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу этой матрицы. Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен r , назовем r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем свободными.

Из теорем 6.2 – 6.4 следует, что решение системы линейных уравнений можно производить следующим образом:

1. Находят ранг r матрицы A системы и ранг \tilde{r} расширенной матрицы \tilde{A} . Если $r \neq \tilde{r}$, то система несовместна.

2. Если $r = \tilde{r}$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные. Исходную систему уравнений заменяют эквивалентной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

Отметим, что в случае, когда число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Если число базисных неизвестных меньше числа всех неизвестных, то из соответствующей системы находят выражения базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Пример 6.4. Решить систему уравнений

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5,$$

$$5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8.$$

Поскольку

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r=2;$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r} = 2; \quad r = \tilde{r},$$

то система совместна. В матрице A минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, ему соответствует система уравнений $x_1 - 3x_2 = 1 - 2x_3$, $2x_1 + x_2 = 5 + 4x_3$, в которой x_1 , x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$x_1 = (10x_3 + 16)/7, \quad x_2 = (8x_3 + 3)/7,$$

где x_3 может принимать любые действительные значения.

6.5. Метод Гаусса

Пусть дана система (6.1) m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n .

Метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса, применяемый для решения системы (6.1), состоит в следующем.

Предполагая, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать сменой нумерации уравнений), умножая первое уравнение системы (6.1) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавляя ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в нуль. Умножая первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавляя к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с x_1 . Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего придем к системе, эквивалентной исходной системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\
 a'_{32}x_2 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\
 &\dots \\
 a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m,
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

где a'_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 2, 3, \dots, n$) – некоторые новые коэффициенты.

Полагая $a'_{22} \neq 0$ и оставляя неизменными первые два уравнения системы (6.17), преобразуем ее так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (6.17) можно привести к одной из следующих систем:

$$\begin{aligned}
 c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\
 c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\
 c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n &= d_3, \\
 &\dots \\
 c_{nn}x_n &= d_n,
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

где $c_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), c_{ii} – некоторые коэффициенты, d_i – свободные члены;

$$\begin{aligned}
 c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\
 c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\
 &\dots \\
 c_{kk}x_k + \dots + c_{kn}x_n &= d_k,
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

где $k < n$;

$$\begin{aligned}
 c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\
 c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\
 &\dots \\
 0 \cdot x_n &= d_k,
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

где $k \leq n$.

Система (6.18) имеет единственное решение, значение x_n находится из последнего уравнения, x_{n-1} – из предпоследнего, x_1 – из первого.

Система (6.19) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$), входящих в это уравнение. Из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т. д. В полученных формулах, выраждающих $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, последние неизвестные могут принимать любые значения.

Система (6.20) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Итак, метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

Пример 6.5. Решить систему уравнений

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2,$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5.$$

Составляем матрицу и преобразуем ее:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \end{array} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -14 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{array} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

Последней матрице соответствует совместная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$2x_3 - x_4 = -10,$$

$$-x_4 = -4.$$

Решая эту систему, находим $x_4 = 4$, $2x_3 = -10 + x_4 = -10 + 4 = -6$, $x_3 = -3$, $x_2 = 3 - x_3 - x_4 = 3 - (-3) - 4 = 2$, $x_1 = 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 = 2 \cdot 2 + 3(-3) + 4 + 2 = 1$

Следовательно, исходная система имеет решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$.

Пример 6.6. Решить систему уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 6.$$

Записывая соответствующую матрицу и совершая преобразования, получаем

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{array} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & 21 \end{array} \right]. \end{array}$$

Третья матрица получена из предыдущей переменой местами последних трех строк. Последней матрице соответствует система уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$-x_2 + x_3 - 9x_4 = -9,$$

$$0x_4 = -1,$$

$$-2x_3 + 23x_4 = 21.$$

Эта система несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворить ее третьему уравнению.

Следовательно, исходная система также несовместна.

Пример 6.7. Решить систему уравнений

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0,$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4,$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6.$$

Преобразуя матрицу, получаем

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Таким образом, данная система сводится к системе двух уравнений относительно четырех неизвестных:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$

$$-3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -4,$$

общее решение которой определяется формулами

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4, \quad x_2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}x_3 - 2x_4,$$

где x_3, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Пример 6.8. Решить систему уравнений

$$x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8,$$

$$6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3.$$

Составляем матрицу и преобразуем ее:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Последняя матрица получена в результате сложения третьей, умноженной на (-1) , и четвертой строк. Этой матрице соответствует система уравнений

$$x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$-x_2 - 6x_3 = -3,$$

$$-45x_3 + 9x_4 = -18,$$

$$8x_3 = 0,$$

имеющая решение $x_3 = 0, x_4 = -2, x_2 = 3, x_1 = 1$.