Глава 7

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

7.1. Упорядоченные пары действительных чисел и операции над ними

Пару (a, b) действительных чисел a и b называют упорядоченной, если указано, какое из них считается первым, какое – вторым. Примеры упорядоченных пар: $(0, 1)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$. Отметим, что последние две пары различны, хотя и образованы одними и теми же числами.

Каждую упорядоченную пару чисел обозначим одной буквой, введем понятие равенства двух пар, определим действия над ними. Рассмотрим две упорядоченные пары

$$\alpha = (a, b), \quad \beta = (c, d). \tag{7.1}$$

Эти пары называют равными, если $a = c$, $b = d$, т. е.

$$((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow (a = c, b = d). \tag{7.2}$$

Суммой двух пар (7.1) называют упорядоченную пару

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{7.3}$$

а их произведением – упорядоченную пару

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad). \tag{7.4}$$

Из соотношения (7.3) видно, что пара

$$0 = (0, 0) \tag{7.5}$$

обладает тем свойством, что сложение ее с любой другой упорядоченной парой не меняет исходной пары: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$. Пара (7.5) играет роль нуля при сложении упорядоченных пар; назовем ее нуль-парой.

Разностью $\alpha - \beta$ двух упорядоченных пар (7.1) называют такую упорядоченную пару $z = (x, y)$, что $z + \beta = \alpha$.

Вычитание упорядоченных пар (7.1) определяется следующим образом:

$$\alpha - \beta = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \tag{7.6}$$

Частным α/β, где $\beta \neq 0$, двух упорядоченных пар (7.1) называют такую упорядоченную пару $z = (x, y)$, что $z\beta = \alpha$.

Если $\beta \neq 0$, т. е. $c^2 + d^2 \neq 0$, то частное α/β двух упорядоченных пар (7.1)

определяется формулой

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{7.7}$$

Из этой формулы следует, что если $\alpha=\beta$, т. е. $a=c$, $b=d$, то

$$1=\left(\frac{c^2+d^2}{c^2+d^2},\ \frac{dc-cd}{c^2+d^2}\right),\quad 1=(1,0).$$

Значит, роль единицы при делении двух упорядоченных пар выполняет упорядоченная пара

$$1=(1,0). \tag{7.8}$$

Рассмотрим упорядоченные пары

$$a=(a,0),\quad b=(b,0). \tag{7.9}$$

Арифметические действия над упорядоченными парами вида (7.9) производятся так, как и над действительными числами. Действительные числа отождествляются с парами вида (7.9).

7.2. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называют упорядоченную пару (a, b) действительных чисел a и b. Рассмотрим упорядоченную пару

$$i=(0,1). \tag{7.10}$$

Применяя формулу (7.4), получаем $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)= =(-1,0)$. Поскольку $(-1,0)=-1$ (см. формулу (7.9)), то

$$i^2=-1,\quad i=\sqrt{-1}. \tag{7.11}$$

Упорядоченную пару (7.10), удовлетворяющую соотношению (7.11), называют мнимой единицей. С помощью мнимой единицы можно выразить любое комплексное число $\alpha=(a,b)$, т. е. упорядоченную пару действительных чисел. В самом деле, так как $bi=(b,0)(0,1)=(0,b)$, то $(a,b)=(a,0)+(0,b)= =a+bi$, т. е.

$$(a,b)=a+bi. \tag{7.12}$$

Поскольку $(a,b)=a+bi$, $(a,b)=(0,b)+(a,0)=bi+a$, то $a+bi=bi+a$. Значит, в правой части формулы (7.12) можно менять местами слагаемые. Выражение $a+bi$ называют алгебраической формой комплексного числа. Число a называют действительной частью, число b – мнимой частью комплексного числа $a+bi$. Обозначая комплексное число $a+bi$ одной буквой α, записывают $a=\mathrm{Re}\,\alpha$, $b=\mathrm{Im}\,\alpha$, где Re – начальные буквы латинского слова realis (действительный), Im – начальные буквы латинского слова imaginarius (мнимый).

Кроме этих обозначений, употребляют и другие, например: $a = R(\alpha)$, $b = I(\alpha)$, где $\alpha = a + bi$.

Отметим частные случаи формулы (7.12). Если $b = 0$, то $(a, 0) = a$ – действительное число; если $a = 0$, то

$$(0,\ b) = bi. \tag{7.13}$$

Число bi называют чисто мнимым или просто мнимым.

Два комплексных числа $a + bi$, $c + di$ называют равными, когда $a = c$, $b = d$:

$$(a + bi = c + di) \Leftrightarrow (a = c, b = d).$$

Комплексное число равно нулю, когда равны нулю его действительная и мнимая части:

$$(a + bi = 0) \Leftrightarrow (a = 0, b = 0).$$

Если дано комплексное число $\alpha = a + bi$, то число $a - bi$, отличающееся от α только знаком при мнимой части, называют числом, сопряженным числу α, и обозначают $\overline{\alpha}$. Числом, сопряженным $\overline{\alpha}$, будет, очевидно, число α, поэтому говорят о паре сопряженных чисел. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Обозначение i для мнимой единицы $(i = \sqrt{-1})$ ввел Эйлер в 1777 г.

7.3. Геометрическое изображение комплексных чисел

На плоскости выберем систему прямоугольных декартовых координат (рис. 7.1). Комплексному числу $(a, b) = a + bi$ сопоставим точку $M(a, b)$ этой плоскости с координатами (a, b). Если $b = 0$, то получим действительное число $(a, 0) = a$, которое изображается точкой $A(a, 0)$ на оси Ox. Вследствие этого ось Ox называют действительной осью (точками оси абсцисс изображаются действительные числа). Если $a = 0$, то получаем чисто мнимое число bi, которое изображается точкой $B(0, b)$, лежащей на оси Oy. По этой причине ось ординат называют мнимой осью (точками этой оси изображаются чисто мнимые числа). Отметим, что мнимая единица i изображается точкой $(0, 1)$, расположенной на положительной полуоси ординат и отстоящей от начала координат на расстояние, равное единице. Число $(-i)$ изображается на оси ординат точкой $(0, -1)$, симметричной точке $(0, 1)$. Любое комплексное число $\alpha = (a, b)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, изображается точкой, не лежащей на осях координат. Обратно, любой точке $M(a, b)$ плоскости соответствует комплексное число $(a, b) = a + bi$. Таким образом, между множеством ком-

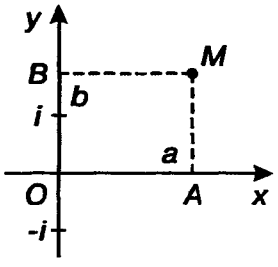

Рис. 7.1

плексных чисел и множеством точек плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называют комплексной плоскостью.

Рассматривают также комплексную переменную $z = x + iy$, где x, y – действительные переменные, i – мнимая единица. Значения этой переменной – комплексные числа, изображаемые точками комплексной плоскости. Вследствие этого комплексную плоскость называют также плоскостью комплексной переменной.

7.4. Действия над комплексными числами

Из определения комплексного числа (как упорядоченной пары действительных чисел) и определения арифметических действий над упорядоченными парами (см. формулы (7.3), (7.4), (7.6), (7.7)) следует, что

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i, \tag{7.14}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i, \tag{7.15}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)\,i, \tag{7.16}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i \quad (c^2+d^2\neq 0). \tag{7.17}$$

Формула (7.14) определяет правило сложения двух комплексных чисел: чтобы сложить два комплексных числа, необходимо сложить отдельно их действительные и мнимые части. Формула (7.15) означает, что при вычитании одного комплексного числа из другого необходимо вычесть отдельно их действительные и мнимые части.

Отметим, что сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел $\alpha = a + bi$, $\overline{\alpha} = a - bi$ являются действительными числами: $\alpha + \overline{\alpha} = 2a$, $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$.

Арифметические действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами. Если $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\gamma = e + fi$ – любые комплексные числа, то верны следующие равенства: 1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; 2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; 3) $\alpha\beta=\beta\alpha$; 4) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$; 5) $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Полагая $a = 1$, $b = 0$ в формуле (7.17), получаем

$$\frac{1}{c+di}=\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}\,i. \tag{7.18}$$

Формулой (7.18) определяется число β^{-1}, обратное комплексному числу $\beta = c + di$ ($\beta \neq 0$, т. е. $c^2 + d^2 \neq 0$).

Натуральные степени мнимой единицы i принимают лишь четыре значения: -1, $-i$, 1, i, определяемые формулами

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i, \tag{7.19}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

При возведении комплексного числа $\alpha = a + bi$ в степень n (n – натуральное число) пользуются формулой бинома Ньютона:

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}(bi) + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(bi)^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}(bi)^3 + \dots + (bi)^n. \qquad (7.20)$$

В правой части этого равенства заменяют степени мнимой единицы по формулам (7.19) и приводят подобные члены, в результате получают некоторое комплексное число $c + di$.

Квадратным корнем из комплексного числа называют комплексное число, квадрат которого равен данному комплексному числу:

$$\sqrt{a+bi} = u + iv, \text{ если } (u+iv)^2 = a + bi. \qquad (7.21)$$

Числа u и v определяются из равенств

$$u^2 = (a + \sqrt{a^2+b^2})/2, \quad v^2 = (-a + \sqrt{a^2+b^2})/2, \qquad (7.22)$$

причем u и v будут действительными, так как при любых a и b выражения $a + \sqrt{a^2+b^2}$ и $-a + \sqrt{a^2+b^2}$ являются положительными. Знаки u и v выбирают так, чтобы выполнялось равенство $2uv = b$. Извлечение квадратного корня из комплексного числа $a + bi$ всегда возможно и дает два значения $u_1 + iv_1$, $u_2 + iv_2$, различающихся лишь знаком.

Пример 7.1. Даны два комплексных числа $5 + i$ и $2 + 3i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

В соответствии с формулами (7.14) – (7.17) получаем

$$(5+i)+(2+3i) = (5+2)+(1+3)i = 7+4i,$$
$$(5+i)-(2+3i) = (5-2)+(1-3)i = 3-2i,$$
$$(5+i)(2+3i) = 10+15i+2i+3i^2 = 7+17i,$$
$$\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{13-13i}{13} = 1-i.$$

Пример 7.2. Возвести в указанные степени данные комплексные числа: $(3+4i)^2$, $(1+2i)^3$, $(2+i)^4$.

Применяя формулы (7.19) и (7.20) при $n=2$, $n=3$, $n=4$, получаем

$$(3+4i)^2 = 3^2 + 2\cdot 12i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i,$$
$$(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i,$$
$$(2+i)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 i + 6\cdot 4i^2 + 4\cdot 2i^3 + i^4 = 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i.$$

Пример 7.3. Извлечь корень квадратный из числа $\alpha = 9+40i$.

Обозначим $\sqrt{9+40i} = u+iv$. Поскольку в данном случае $a=9$, $b=40$, то формулы (7.22) примут вид

$$u^2 = (9+\sqrt{9^2+40^2})/2 = (9+41)/2 = 25;$$

$$v^2 = (-9+\sqrt{9^2+40^2})/2 = (-9+41)/2 = 16.$$

Так как $u^2 = 25$, $v^2 = 16$, то $u_1 = -5$, $u_2 = 5$, $v_1 = -4$, $v_2 = 4$. Получено два значения корня: $u_1 + v_1 i = -5-4i$ и $u_2 + v_2 i = 5+4i$.

Пример 7.4. Найти значение выражения $z^3 - 2z^2 + 5z$ при $z = 1-i$.

Поскольку $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$, $(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2i+2i^2 = -2-2i$, то $z^3 - 2z^2 + 5z = -2-2i-2(-2i)+5(1-i) = 3\text{-}3i$.

Пример 7.5. Показать, что комплексное число $z = 1-i$ является корнем уравнения $z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = 0$.

Так как $z^2 = (1-i)^2 = -2i$, $z^3 = (1-i)^3 = -2-2i$, то $z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = -2-2i+2(-2i)-6(1-i)+8 = 0$, т. е. $(1-i)$ – корень уравнения.

7.5. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $\alpha = a+bi$, заданное в алгебраической форме, можно представить и в другом виде. Изобразим число α точкой $M(a, b)$ комплексной плоскости. Рассмотрим радиус-вектор этой точки (рис. 7.2). Модулем комплексного числа $\alpha = a+bi$ называют длину r радиуса-вектора **OM** точки $M(a, b)$, изображающей данное число. Модуль комплексного числа α обозначают символом $|\alpha|$. Следовательно, по определению

$$r = |\mathbf{OM}|,\ r = |\alpha|,\ |\alpha| \geq 0. \tag{7.23}$$

Так как $|\mathbf{OM}| = \sqrt{a^2+b^2}$ (см. рис. 7.2), то

$$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2},\ |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},\ r = \sqrt{a^2+b^2}, \tag{7.24}$$

т.е. модуль комплексного числа равен арифметическому значению корня квадратного из суммы квадратов его действительной и мнимой частей. Если $b=0$, т. е. число α является действительным, причем $\alpha = a$, то формула (7.24) принимает вид $|a| = \sqrt{a^2}$.

Аргументом комплексного числа $\alpha = a+bi$ называют величину угла φ наклона радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ точки $M(a, b)$ к положительной полуоси Ox. Аргумент комплексного числа α обозначают символом $\operatorname{Arg}\alpha$. Угол φ может принимать

любые действительные значения. Аргумент комплексного числа α имеет бесконечное множество значений, отличающихся одно от другого на число, кратное 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0, модуль которого равен нулю. Среди значений аргумента комплексного числа $\alpha \neq 0$ существует одно и только одно, заключенное между $-\pi$ и π, включая последнее значение. Его называют главным значением и обозначают $\arg\alpha$. Итак, аргумент комплексного числа удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad -\pi < \arg\alpha \leq \pi.$$

С помощью модуля и аргумента комплексное число $\alpha = a + bi$ можно представить в другой форме. Поскольку

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi, \tag{7.25}$$

то

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r \geq 0), \tag{7.26}$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = a\big/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = b\big/\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7.27}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (7.26), называют тригонометрической формой комплексного числа. Отметим особенности тригонометрической формы: 1) первый множитель – неотрицательное число, $r \geq 0$; 2) записаны косинус и синус одного и того же аргумента; 3) мнимая единица умножена на $\sin\varphi$.

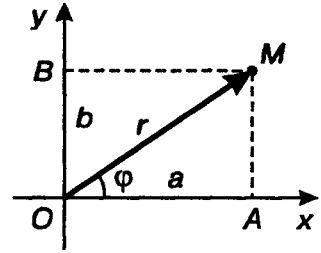

Рис. 7.2

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π. Следовательно, если

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{7.28}$$

то

$$r_1 = r_2, \; \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{7.29}$$

и обратно, из равенств (7.29) следует формула (7.28).

Если комплексное число $\alpha = a + bi$ задано в тригонометрической форме $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то комплексно-сопряженное число $\overline{\alpha} = a - bi$ записывается в форме $\overline{\alpha} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$; поэтому $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$, $\arg\overline{\alpha} = -\arg\alpha$ (рис. 7.3).

Пример 7.6. Комплексное число $\alpha = 2\sqrt{2}/(1 - i)$ записать в алгебраической и тригонометрической форме.

Умножая числитель и знаменатель данной дроби на число, сопряженное знаменателю, получаем

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}(1+i)}{1-i^2} = \frac{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

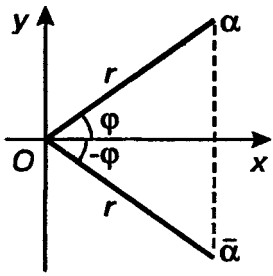

Рис. 7.3

Это – алгебраическая форма данного числа: $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Применяя формулы (7.27), находим $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$, $\sin\varphi = b/r = \sqrt{2}/2$, $\cos\varphi = a/r = \sqrt{2}/2$, откуда главное значение $\varphi = \pi/4$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $\alpha = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.

7.6. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Произведение двух комплексных чисел

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \tag{7.30}$$

где $r = |z_1|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z_1$, $\rho = |z_2|$, $\psi = \operatorname{Arg} z_2$ находится по формуле

$$z_1 z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)). \tag{7.31}$$

Из этой формулы следует, что

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ \varphi + \psi = \operatorname{Arg}(z_1 z_2),$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей множителей, а сумма аргументов множителей является аргументом их произведения.

Если $z_2 \neq 0$, т. е. $\rho \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)), \tag{7.32}$$

откуда

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ \varphi - \psi = \operatorname{Arg}(z_1/z_2).$$

Эти формулы означают, что модуль частного равен модулю делимого, деленному на модуль делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного двух комплексных чисел.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $r \neq 0$, то

$$z^{-1} = 1/z = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \tag{7.33}$$

откуда

$$|z^{-1}| = |z|^{-1},\ \arg z^{-1} = -\arg z,$$

т. е. модуль комплексного числа z^{-1}, обратного числу z, равен обратной величине модуля числа z, а его главное значение аргумента отличается от главного значения аргумента z лишь знаком.

Если n – натуральное число и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{7.34}$$

откуда $|z^n| = |z|^n$, $n\varphi = \operatorname{Arg} z^n$.

Формула (7.34) называется формулой Муавра. При $r = 1$ она принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число α, что $\alpha^n = z$.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ всегда возможно и дает n различных значений:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\ \alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),\\ &\alpha_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right),\ldots,\\ &\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right),\end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{7.36}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Из формул видно, что все n значений корня n-й степени из комплексного числа z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке нуль и делят эту окружность на n равных частей.

Отметим, что корень n-й степени из действительного числа также имеет n различных значений. Среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от знака a и четности n. Корень n-й степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю ($\sqrt[n]{0} = 0$).

Корни n-й степени из единицы определяются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \tag{7.37}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 7.7. Найти значения квадратного корня из числа $z = i$.

Представим сначала это число в тригонометрической форме: $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. В соответствии с формулой (7.36) имеем

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi/2+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{2},\ k = 0, 1.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\alpha_0.$$

Пример 7.8. Найти все значения корня 6-й степени из числа -64.

Представим данное число в тригонометрической форме: $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. Формула (7.36) принимает вид

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ k = 0, 1, ..., 5.$$

Замечая, что $\sqrt[6]{64} = 2$ и придавая k указанные значения, находим шесть искомых значений:

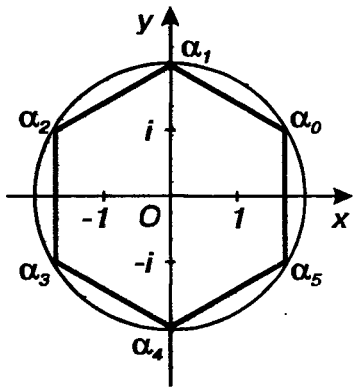

Рис. 7.4

$$\alpha_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\alpha_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$\alpha_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$\alpha_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$\alpha_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i,$$

$$\alpha_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Эти значения изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ (рис. 7.4.).

Пример 7.9. Решить уравнение $z^3 - 2\sqrt{2}/(1-i) = 0$.

Так как $2\sqrt{2}/(1-i) = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$, то

$$z = \sqrt[3]{2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))}.$$

Применяя формулу (7.36), получаем

$$\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2k\pi}{3} + i\sin\frac{(\pi/4)+2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Полагая в этой формуле $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, находим

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2\pi}{3} + i\sin\frac{(\pi/4)+2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$