Глава 8

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Алгебраические многочлены

Алгебраическим многочленом степени n называется сумма целых неотрицательных степеней переменной x, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами, т. е. выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Для сокращенной записи многочленов употребляют обозначения $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ и т. п.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ считают равными и пишут $f(x) = g(x)$ в том и только в том случае, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Теорема 8.1. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что*

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x), \tag{8.1}$$

причем степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или же $r(x) = 0$. Многочлены $q(x)$ и $r(x)$ определяются однозначно.

Многочлен $q(x)$ называется частным от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$, а $r(x)$ – остатком от этого деления.

Замечание. Формулу (8.1) можно записать так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\varphi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0).$$

Если остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю, то многочлен $\varphi(x)$ называется делителем многочлена $f(x)$; в этом случае говорят, что $f(x)$ делится на $\varphi(x)$ (или нацело делится на $\varphi(x)$).

Многочлен $\varphi(x)$ тогда и только тогда является делителем многочлена $f(x)$, когда существует многочлен $\psi(x)$, удовлетворяющий равенству

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Многочлен $h(x)$ называется общим делителем для многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем каждого из этих многочленов.

Два многочлена называются взаимно простыми, если они не имеют других общих делителей, кроме многочленов нулевой степени (т. е. постоянных).

Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется общий делитель $d(x)$, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обозначается так: $(f(x), g(x))$.

Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно найти с помощью алгоритма Евклида. Если

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g(x)\,q_1(x)+r_1(x),\\ g(x) &= r_1(x)\,q_2(x)+r_2(x),\\ r_1(x) &= r_2(x)\,q_3(x)+r_3(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)\,q_k(x)+r_k(x),\\ r_{k-1}(x) &= r_k(x)\,q_{k+1}(x), \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

то $r_k(x)=(f(x), g(x))$.

Замечание. Наибольший общий делитель многочленов определен с точностью до постоянного множителя: если $d(x)$ – наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $cd(x)$, где c – любое число, отличное от нуля, также является их наибольшим общим делителем.

Пример 8.1. Найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении многочлена $f(x)=x^4-x^2-2$ на многочлен $\varphi(x)=x^3-2x^2+x-2$. Выразить $f(x)$ через $\varphi(x)$ и $r(x)$.

Выполняя деление, находим

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^2-2 & x^3-2x^2+x-2 \\ \hline \underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm x^2 \mp 2x} & x+2 \\ \quad 2x^3-2x^2+2x-2 & \\ \quad \underline{\pm 2x^3 \mp 4x^2 \pm 2x \mp 4} & \\ \qquad 2x^2+2 & \end{array}$$

Итак, $q(x)=x+2$, $r(x)=2x^2+2$, $x^4-x^2-2=(x^3-2x^2+x-2)\times$ $\times(x+2)+2x^2+2$.

Пример 8.2. Найти общий наибольший делитель двух многочленов $f(x)=x^4+2x^2-3$ и $\varphi(x)=x^3-x^2+2x-2$.

Произведя деление $f(x)$ на $\varphi(x)$, получим первое из равенств (8.2): $x^4+2x^4-3=(x^3-x^2+2x-2)(x-1)+(x^2-1)$, так как $q_1(x)=x-1$ и $r_1(x)=x^2-1$. Разделив $\varphi(x)$ на $r_1(x)$, найдем второе из указанных равенств: $x^3-x^2+2x-2=(x^2-1)(x-1)+3x-3$, поскольку $q_2(x)=x-1$ и $r_2(x)=3x-3$.

Остаток $r_1(x)$ нацело делится на остаток $r_2(x)$: $x^2-1=(3x-3)\times$ $\times\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$; $q_3(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

Следовательно, $r_2(x)=3x-3=3(x-1)$ является общим наибольшим делителем данных многочленов. В соответствии с замечанием общим наибольшим делителем будет также $d(x)=x-1$.

8.2. Корни многочлена. Теорема Безу

Значением многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \tag{8.3}$$

при $x=c$ называется число

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\dots+a_{n-1}c+a_n.$$

Число c называется корнем многочлена $f(x)$ или корнем уравнения $f(x)=0$, если $f(c)=0$, т. е.

$$a_0c^n+a_1c^{n-1}+\dots+a_{n-1}c+a_n=0.$$

Теорема 8.2. (Безу). *Остаток r от деления многочлена $f(x)$ на линейный многочлен $x-c$ равен значению $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x=c$, т. е.*

$$r=f(c). \tag{8.4}$$

Следствие. *Число c тогда и только тогда будет корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится на $x-c$.*

Если многочлен $f(x)$ задан формулой (8.3) и

$$f(x)=(x-c)q(x)+r,$$

где

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

то коэффициенты многочлена $q(x)$ определяются формулами

$$b_0=a_0,\ b_k=cb_{k-1}+a_k,\ k=1,2,\dots,n-1, \tag{8.5}$$

а остаток r — по формуле $r=cb_{n-1}+a_n$.

Коэффициенты частного и остаток вычисляются по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_2 & & a_{n-1} & & a_n \\ b_0 & cb_0+a_1=b_1 & & cb_1+a_2=b_2 & & cb_2+a_3=b_3 & \dots & cb_{n-2}+a_{n-1}=b_{n-1} & & cb_{n-1}+a_n=r. \end{array}$$

Эту схему, называемую схемой Горнера, используют также для вычисления значений многочлена, поскольку $f(c)=r$ (см. формулу (8.4)).

Если c – корень многочлена $f(x)$, т. е. $f(c)=0$, то многочлен $f(x)$ делится на $x-c$. Может оказаться, что $f(x)$ делится и на более высокие степени $x-c$. Пусть существует такое натуральное число k, что $f(x)$ нацело делится на $(x-c)^k$, но уже не делится на $(x-c)^{k+1}$. В этом случае $f(x)= =(x-c)^k\varphi(x)$, причем число c не является корнем многочлена $\varphi(x)$. Число k называется кратностью корня c многочлена $f(x)$, а число c – k-кратным корнем этого многочлена. Если $k=1$, то говорят, что число c – простой корень многочлена $f(x)$.

Теорема 8.3. *Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень (действительный или комплексный).*

Эту теорему раньше называли «основной теоремой высшей алгебры».

Следствие. 1. *Всякий многочлен n-й степени единственным образом, с точностью до порядка сомножителей, разлагается в произведение n линейных множителей: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена (8.3), то*

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n). \tag{8.6}$$

Следствие. 2. *Всякий многочлен $f(x)$ степени $n\geq 1$ имеет n корней, считая равные и комплексные.*

Следствие. 3. *Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$, степени которых не превышают n, имеют равные значения более чем при n различных значениях переменной, то $f(x)=\varphi(x)$.*

Если многочлен

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{8.7}$$

для которого $a_0=1$, имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то его коэффициенты выражаются формулами Виета:

$$\begin{aligned}
&a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n);\\
&a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n);\\
&a_n=(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Эти формулы означают следующее: в правой части k-го равенства $(k=1, 2, \ldots, n)$ находится сумма всевозможных произведений по k корней, взятая со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности k.

Последняя из формул (8.8) свидетельствует о том, что корни многочлена (8.7) являются делителями его свободного члена.

Формулы Виета дают возможность найти многочлен по корням.

Теорема 8.4. *Если комплексное число α является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то его корнем будет также и сопряженное число $\overline{\alpha}$.*

Следствие. 1. *Многочлен $f(x)$ в этом случае делится на квадратный трехчлен $\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2+px+q$ с действительными коэффициентами $p=-(\alpha+\overline{\alpha})$, $q=\alpha\overline{\alpha}$.*

Следствие. 2. *Комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.*

Следствие. 3. *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень. Если же действительных корней больше одного, то их будет нечетное число (так как комплексные корни попарно сопряжены).*

Следствие. 4. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить, причем единственным способом (с точностью до порядка множителей), в виде произведения его старшего коэффициента и нескольких многочленов с действительными коэффициентами, линейных вида $x-c$, соответствующих его действительным корням, и квадратных вида x^2+px+q, соответствующих парам его сопряженных комплексных корней.*

Пример 8.3. Разделить многочлен $f(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+5$ на $x-1$.

Коэффициенты многочлена: $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_3=2$, $a_4=-3$, $a_5=5$.

Коэффициенты частного $q(x)=b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$ и остаток r находим по схеме Горнера, считая $c=1$:

c	1	0	−2	2	−3	5
1	1	$1\cdot1+0=1$	$1\cdot1-2=-1$	$1\cdot(-1)+2=1$	$1\cdot1-3=-2$	$1\cdot(-2)+5=3$

Следовательно, частное $q(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$, а остаток $r=3$.

Пример 8.4. Вычислить значение многочлена $f(x)=2x^5-4x^4+$ $+5x^3-26x^2-17x+9$ при $x=3$.

По схеме Горнера находим:

c	2	−4	5	−26	−17	9
3	2	$3\cdot2-4=2$	$3\cdot2+5=11$	$3\cdot11-26=7$	$3\cdot7-17=4$	$3\cdot4+9=21$

Итак, $r=21$; поскольку $f(c)=r$, то $f(3)=21$.

Пример 8.5. Показать, что число $x=4$ является корнем многочлена $f(x)=3x^4-2x^3-47x^2+30x-8$.

С помощью схемы Горнера находим, что $r=f(4)=0$:

c	3	−2	−47	30	−8
4	3	$4\cdot3-2=10$	$4\cdot10-47=-7$	$4(-7)+30=2$	$4\cdot2-8=0$

Так как $r=0$, то $f(4)=0$, $x=4$ – корень многочлена.

Пример 8.6. Найти многочлен третьей степени, корни которого $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=3$.

Воспользуемся формулами Виета. При $n=3$ многочлен (8.7) и формулы (8.8) принимают соответственно вид

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3;\ a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\ a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Подставляя в последние три формулы значения корней, получаем $a_1=$ $=-(1-2+3)=-2$, $a_2=1\cdot(-2)+1\cdot 3+(-2)3=-5$, $a_3=-1(-2)3=6$. Следовательно, $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

Пример 8.7. Найти многочлен четвертой степени, имеющий корни $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=4$, $\alpha_4=5$.

При $n=4$ многочлен (8.7) и формулы (8.8) запишутся так:

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$
$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4,$$
$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4),$$
$$a_4=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

По эти формулам находим $a_1=-10$, $a_2=27$, $a_3=-2$, $a_4=-40$. Итак, $f(x)=x^4-10x^3+27x^2-2x-40$.

8.3. Квадратные уравнения

Алгебраическим уравнением n-й степени с одной переменной x называется уравнение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{8.9}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные числа, называемые коэффициентами.

Корнем алгебраического уравнения (8.9) называется такое значение переменной $x=c$, при котором оно обращается в тождество, т.е. a_0c^n+ $+a_1c^{n-1}+\cdots a_{n-1}c+a_n=0$.

Выражение «решить уравнение» означает найти все его корни.

Квадратным называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{8.10}$$

Корни уравнения (8.10) вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{8.11}$$

Выражение

$$D=b^2-4ac$$

называется дискриминантом квадратного уравнения (8.10).

Если a, b, c – действительные числа, то квадратное уравнение (8.10) при $D>0$ имеет два различных действительных корня, при $D=0$ – два равных действительных корня, при $D<0$ – два комплексно-сопряженных корня.

Отметим, что коэффициенты квадратного уравнения (8.10) могут быть и комплексными числами. Его корни также вычисляются по формулам (8.11). В этом случае дискриминант будет комплексным числом.

Уравнение (8.10) можно привести к виду

$$x^2+px+q=0. \tag{8.12}$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \tag{8.13}$$

которая является частным случаем формулы (8.11).

Пример 8.8. Решить уравнение $x^2-4x+13=0$.

По формуле (8.13) получаем $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}$. Это уравнение имеет корни $x_1=2+3i$, $x_2=2-3i$, где $i=\sqrt{-1}$.

Пример 8.9. Решить уравнение $x^2-(4+6i)x-5+10i=0$ с комплексными коэффициентами.

По формуле (8.13) находим $x_{1,2}=(2+3i)\pm\sqrt{(2+3i)^2-(-5+10i)}=$ $=(2+3i)\pm\sqrt{4+12i+9i^2+5-10i}=(2+3i)\pm\sqrt{2i}=(2+3i)\pm(1+i)$; $x_1=3+4i$, $x_2=1+2i$.

8.4. Кубические уравнения

Кубическим называется уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \tag{8.14}$$

Это уравнение с помощью формулы $x=z-a/3$ можно привести к виду

$$z^3+pz+q=0. \tag{8.15}$$

Корни кубического уравнения (8.15) вычисляются по формуле $z=u+v$, где

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{8.16}$$

или

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{8.17}$$

Все три корня уравнения (8.15) определяются следующими формулами:

$$z_1=u_1+v_1,\ z_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2,\ z_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon, \tag{8.18}$$

где u_1 – любое из трех значений u, определяемых первой из формул (8.16), v_1 – то из трех значений v, которое соответствует u_1 на основании равенства

$$3uv+p=0, \tag{8.19}$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{8.20}$$

– кубические корни из единицы.

Дискриминантом уравнения (8.15) называется выражение

$$D=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

Уравнение (8.15) при $D<0$ имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня: при $D=0$ – три действительных корня, причем два равных; при $D>0$ – три различных действительных корня.

Замечание. Третий случай ($D>0$) называется неприводимым. В этом случае все корни уравнения (8.15) с действительными коэффициентами являются действительными, однако для нахождения их по формуле (8.17) следует извлекать кубические корни из комплексных чисел.

Формула (8.17) называется формулой Кардано. Правило, соответствующее этой формуле, впервые опубликовано в книге итальянского ученого Д. Кардано «Великое искусство или о правилах алгебры» (1545). Это правило решения кубического уравнения было получено ранее (1535) другим итальянским математиком Н. Тартальей.

Пример 8.10. Решить уравнение $z^3-6z+9=0$. Это уравнение вида (8.15), для которого $p=-6$, $q=9$. Составим выражение

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{9^2}{4}+\frac{(-6)^3}{3^3}=\frac{81}{4}-8=\frac{49}{4}.$$

По формулам (8.16) находим u и v:

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{-1}=-1,$$

$$v_1=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{-8}=-2.$$

Следовательно, $u_1=-1$, $v_1=-2$, равенство (8.19) выполняется. По формулам (8.18) с учетом формул (8.20) находим

$$z_1=u_1+v_1=-3,$$

$$z_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2=(-1)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-2)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Замечание. Корни z_2 и z_3 можно найти и другим способом. Так как $z_1=-3$ – корень уравнения, то многочлен z^3-6z+9 делится на $(z+3)$. Произведя это деление, получим $z^3-6z+9=(z+3)(z^2-3z+3)$. Данное уравнение примет вид $(z+3)(z^2-3z+3)=0$, откуда $z+3=0$, $z^2-3z+3=0$. Последнее уравнение имеет корни

$$z_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 8.11. Решит уравнение $x^3-5x^2+8x-6=0$.

Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $x^3-5x^2+8x-6=x^3-3x^2-2x^2+6x+2x-6=x^2(x-3)-2x(x-3)+2(x-3)=$ $=(x-3)(x^2-2x+2)$. Данное уравнение примет вид $(x-3)(x^2-2x+2)=0$ и распадается на два уравнения: $x-3=0$, $x^2-2x+2=0$, которые имеют корни $x_1=3$, $x_2=1+i$, $x_3=1-i$.

8.5. Уравнения четвертой степени

Алгебраическое уравнение четвертой степени

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

с помощью подстановки $x=z-a/4$ можно привести к уравнению

$$z^4+pz^2+qz+r=0, \tag{8.21}$$

в котором коэффициент при z^3 равен нулю.

Это уравнение можно записать так:

$$(z^2+p/2+\alpha)^2-(2\alpha z^2-qz+(\alpha^2+p\alpha-r+p^2/4))=0, \tag{8.22}$$

где α – вспомогательный параметр. Значение параметра выберем так, чтобы вычитаемый многочлен был полным квадратом. В этом случае многочлен имеет два равных корня, так как его дискриминант равен нулю, т. е.

$$q^2-4\cdot 2\alpha(\alpha^2+p\alpha-r+p^2/4)=0. \tag{8.23}$$

Уравнение (8.22) принимает вид

$$\left(z^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(z-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0, \tag{8.24}$$

где α_0 – отличный от нуля корень уравнения (8.23).

Уравнение (8.24) распадается на два квадратных уравнения:

$$z^2-\sqrt{2\alpha_0}z+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{\alpha_0}}\right)=0,$$

$$z^2+\sqrt{2\alpha_0}z+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{\alpha_0}}\right)=0. \qquad (8.25)$$

Корни этих уравнений будут корнями уравнения (8.21).

Пример 8.12. Решить уравнение $z^4-5z^2+4=0$.

Это уравнение вида (8.21), для которого $p=-5$, $q=0$, $r=4$. Уравнение (8.23) в данном случае сводится к квадратному уравнению относительно параметра $\alpha: \alpha^2-5\alpha-4+25/4=0$, или $\alpha^2-5\alpha+9/4=0$, которое имеет корни $\alpha_1=9/2$, $\alpha_2=1/2$. При $\alpha_0=1/2$ уравнения (8.25) запишутся так: $z^2-z-2=0$, $z^2+z-2=0$. Первое из них имеет корни $z_1=-1$, $z_2=2$, а второе – $z_1=1$, $z_2=-2$. Эти числа являются и корнями исходного уравнения.

Пример 8.13. Решить уравнение $x^4+4x^3+7x^2-4x-8=0$. Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $x^4+4x^3+7x^2-4x-8=(x^4-x^2)+(4x^3-4x)+(8x^2-8)=x^2(x^2-1)+4x(x^2-1)+$ $+8(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+4x+8)$.

Следовательно, уравнение примет вид $(x^2-1)(x^2+4x+8)=0$, откуда $x^2-1=0$, $x^2+4x+8=0$; $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2+2i$; $x_4=-2-2i$.

8.6. Решение алгебраических уравнений способом разложения многочлена на множители

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+$ $+a_{n-1}x+a_n$, то уравнение (8.9) можно записать так:

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=0.$$

Если α и $\overline{\alpha}$ – сопряженные комплексные корни, то $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=$ $=x^2+px+q$, где p и q – действительные числа ($p=-(\alpha+\overline{\alpha})$, $q=\alpha\overline{\alpha}$).

Предположим, что левая часть уравнения (8.9) разложена на множители вида $x-c$ и x^2+px+q. Приравнивая нулю каждый множитель, получаем уравнения, каждое из которых является линейным или квадратным. Корни этих уравнений будут корнями уравнения (8.9).

Пример 8.14. Решить уравнение $x^3-2x-4=0$.

Разлагаем на множители многочлен в левой части уравнения:

$$x^3-2x-4=x^3-2x^2+2x^2-4x+2x-4=$$

$$=x^2(x-2)+2x(x-2)+2(x-2)=(x-2)(x^2+2x+2).$$

Данное уравнение принимает вид $(x-2)(x^2+2x+2)=0$ и распадается на два уравнения: $x-2=0$, $x^2+2x+2=0$; первое из них имеет корень $x_1=2$, а второе – два комплексно-сопряженных корня $x_2=-1-i$, $x_3=-1+i$.

Пример 8.15. Решить уравнение $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$.

Так как $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=x^4-5x^3+5x^2+5x-5-1=(x^4-1)+(-5x^3+5x^2)+(5x-5)=$ $=(x^2-1)(x^2+1)-5x^2(x-1)+5(x-1)=(x^2-1)(x^2+1)-5(x-1)(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1-5(x-1))=$ $(x^2-1)(x^2-5x+6)$, то $(x^2-1)(x^2-5x+6)=0$, откуда $x^2-1=0$, $x^2-5x+6=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Пример 8.16. Решить уравнение $x^4+2x^3-2x^2-8x-8=0$.

При разложении на множители используется результат примера 8.14. Поскольку $x^4+2x^3-2x^2-8x-8=x^4+2x^3-2x^2-4x-4x-8=x^3(x+2)-$ $-2x(x+2)-4(x+2)=(x+2)(x-2)(x^2+2x+2)=0$, откуда $x+2=0$, $x-2=0$, $x^2+2x+2=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-1-i$, $x_4=-1+i$.

Пример 8.17. Решить уравнение $x^5-x^4-81x+81=0$. Так как x^5- $-x^4-81x+81=x^4(x-1)-81(x-1)=(x-1)(x^4-81)=(x-1)(x^2-9)(x^2+9)$, то $(x-1)(x^2-9)(x^2+9)=0$, откуда $x-1=0$, $x^2-9=0$, $x^2+9=0$; $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=3$, $x_4=-3i$, $x_5=3i$.

Замечание. Алгебраические уравнения n-й степени ($n\geq 5$) в общем случае в радикалах не решаются, т. е. не существует формул, которые давали бы возможность вычислить корни уравнения по его коэффициентам. Это впервые доказал норвежский математик Н.Х Абель. Однако имеются частные виды уравнений любой степени, разрешимые в радикалах (например, $x^n=a$). Вопрос о том, каково необходимое и достаточное условие для того, чтобы алгебраическое уравнение решалось в радикалах, исследовал французский математик Э. Галуа.

8.7. Разложение дробной рациональной функции в сумму элементарных дробей

Целой рациональной функцией называют алгебраический многочлен. Дробной рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}. \qquad (8.26)$$

Если $m>n$, то рациональная дробь называется правильной.

Элементарными дробями называются рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-c)^n},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

где n, m – натуральные числа; c, p, q, A, B, C – действительные числа; $(p^2/4)-q<0$ (корни трехчлена x^2+px+q являются комплексными).

Всякую правильную рациональную дробь можно разложить в сумму элементарных дробей на основании следующей теоремы.

Теорема 8.5. *Если дана правильная рациональная дробь* (8.26) *и*

$$Q(x)=(x-c_1)^{n_1}\dots(x-c_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $c_i\ (i=1,2,\dots,r)$ *– попарно различные действительные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* n_i; $x^2+p_kx+q_k=(x-\alpha_k)(x-\tilde{\alpha}_k)$, *где* α_k *и* $\tilde{\alpha}_k$ $(k=1,2,\dots,s)$ *– попарно различные при разных* k *корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* m_k, *то существуют действительные числа*

$$A_j^n\ (j=1,2,\dots,r;\ n=1,2,\dots,n_i),\ B_k^m,\ C_k^m\ (k=1,2,\dots,s;\ m=1,2,\dots,m_k)$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^1}{x-c_1}+\frac{A_1^2}{(x-c_1)^2}+\dots+\frac{A_1^{n_1}}{(x-c_1)^{n_1}}+\dots$$

$$\dots+\frac{A_r^1}{x-c_r}+\frac{A_r^2}{(x-c_r)^2}+\dots+\frac{A_r^{n_r}}{(x-c_r)^{n_r}}+$$

$$\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{B_1^{m_1}x+C_1^{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\dots$$

$$\dots+\frac{B_s^1x+C_s^1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{B_s^2x+C_s^2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\dots+\frac{B_s^{m_s}x+C_s^{m_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}.$$

Отметим, что каждому действительному корню c кратности l соответствует сумма l элементарных дробей вида $A/(x-c)^n$:

$$\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\dots+\frac{A_l}{(x-c)^l},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней α и $\overline{\alpha}$ (таких, что $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2+px+q$) кратности m – сумма дробей вида $(Bx+C/(x^2+px+q)^n$:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Пример 8.18. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь $(7x^2-x+1)/(x^3+1)$.

Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, то искомое разложение имеет вид

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

где коэффициенты A, B, C пока не определены.

Приводя к общему знаменателю правую часть и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{x^3+1},$$

$$7x^2-x+1=(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C),$$

$$A+B=7,\ B+C-A=-1,\ A+C=1.$$

Из этой системы уравнений находим $A=3$, $B=4$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-x+1}.$$

Пример 8.19. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь $(x^2+x+1)/(x^3-3x+2)$.

Разлагая знаменатель на множители, получаем $x^3-3x+2=x^3-x-2x-2=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x(x+1)-2)=(x-1)(x^2-1)+(x-1)=(x-1)^2(x+2)$.

Данную рациональную дробь представим в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}, \qquad \text{(I)}$$

откуда

$$x^2+x+1=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2), \qquad \text{(II)}$$

или

$$x^2+x+1=(A+B)x^2+(B+C-2A)x+(A-2B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнения $A+B=1$, $B+C-2A=1$, $A-2B+2C=1$, из которых находим $A=1/3$, $B=2/3$, $C=1$.

Следовательно, разложение (I) примет вид

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Замечание. Коэффициенты A, B, C разложения (I) можно получить и другим способом. Полагая в тождестве (II) $x=1$, получаем $3=C\cdot 3$, $C=1$. Положив в этом тождестве $x=-2$, получим $3=A(-3)^2$, откуда $A=1/3$. Аналогично при $x=0$ находим $1=A-2B+2C$, $B=2/3$.