

Глава 9

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

9.1. Линейное пространство. Подпространство

Линейным действительным пространством или векторным действительным пространством называется множество V элементов x, y, z, \dots , для которых определены операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число, удовлетворяющие следующим аксиомам:

- I. $x + y = x + y$,
- II. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- III. Существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$,
- IV. Для каждого $x \in V$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$,
- V. $1 \cdot x = x$,
- VI. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- VII. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- VIII. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Эти аксиомы выполняются соответственно для всех $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Элементы действительного линейного пространства называются векторами.

Замечание. Аналогично определяется комплексное линейное пространство: вместо множества \mathbb{R} действительных чисел рассматривается множество \mathbb{C} комплексных чисел.

Из определения линейного пространства вытекают следующие утверждения.

1. В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.
2. Для любого элемента x линейного пространства существует единственный элемент $-x$.
3. Для элемента $-x$ противоположным будет элемент x .
4. Для любого элемента x произведение $0x = 0$, где 0 – нуль, 0 – нулевой элемент.
5. Для любого элемента x $(-1)x = -x$, где $(-x)$ – элемент, противоположный x .
6. Для любого числа α произведение $\alpha 0 = 0$, где 0 – нулевой элемент.
7. Если $\alpha x = 0$ и $\alpha \neq 0$, то $x = 0$.
8. Если $\alpha x = 0$ и $x \neq 0$, то $\alpha = 0$.

Равенство $\alpha x = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ или $x = 0$.

Замечание. Сумму $x + (-y)$ обозначают $x - y$ и называют разностью элементов x и y .

Примеры линейных пространств.

1. Множество V_3 всех свободных векторов $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$, для которых определены сложение и умножение вектора на число так, как в п. 3.2, является линейным пространством. Отметим, что роль нулевого элемента здесь играет нулевой вектор; для любого вектора \mathbf{a} противоположным является $-\mathbf{a}$. Аксиомы I – VIII выполняются, о чем свидетельствуют формулы п. 3.2.

2. Множество всех матриц размером $m \times n$, для которых определены сложение матриц и умножение матрицы на число соответственно формулами (5.2), (5.4). Роль нулевого элемента здесь играет нулевая матрица; для матрицы $(a_{ik})_{mn}$ противоположной является матрица $(-a_{ik})_{mn}$. Аксиомы I – VIII выполняются (см. п. 5.2, свойства 1 – 8 линейных операций над матрицами).

3. Множество $\{P_n(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n , для которых операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число определены обычными правилами. Нулевой элемент – многочлен, все коэффициенты которого равны нулю; для многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ противоположным будет $-P_n(x) = -a_0x^n - a_1x^{n-1} - \dots - a_{n-1}x - a_n$.

З а м е ч а н и е. Множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу n , не является линейным пространством, так как сумма двух таких многочленов может оказаться многочленом степени ниже n (т. е. не принадлежать рассматриваемому множеству).

4. Множество A_n элементами которого являются упорядоченные совокупности n действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) . Каждый элемент этого множества будем обозначать одним символом, например x, y, \dots , и писать $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, ... Действительные числа x_1, x_2, \dots, x_n называют координатами элемента x . Линейные операции над элементами A_n определяются формулами $x + y = ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots, (x_n + y_n))$, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Отметим, что элемент $0 = (0, 0, \dots, 0)$ является нулевым, элемент $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ – противоположным элементу $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5. Множество $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$. Операции сложения этих функций и умножения функций на число определяются обычными правилами. Нулевым элементом является функция $x(t) = 0$ для всех $t \in [a, b]$. Элементом, противоположным элементу $x(t)$, будет $-x(t)$.

Множество $W \subset V$ называется подпространством линейного пространства V , если выполняются следующие условия: 1. В множестве W определены те же операции, что и в множестве V . 2. Если $x, y \in W$, то $x + y \in W$. 3. Если $x \in W$, то $\alpha x \in W$. Очевидно, всякое подпространство W линейного пространства V является линейным пространством, т.е. в W выполняются аксиомы I – VIII. Прежде всего, в W имеется нулевой элемент 0: если $x \in W$, то $0x = 0 \in W$. Для любого элемента $x \in W$ имеется противоположный элемент $-x$: если $x \in W$, то $(-1)x = -x \in W$.

Отметим, что нулевой элемент 0 линейного пространства U образует подпространство этого пространства, которое называют нулевым подпространством.

Само линейное пространство V можно рассматривать как подпространство этого пространства. Эти подпространства называются тривиальными, а все другие, если они имеются, — нетривиальными. Приведем примеры нетривиальных подпространств. 1. Множество V_2 всех свободных векторов \mathbf{a} (a_1, a_2), параллельных некоторой плоскости, для которых обычным образом определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, представляет подпространство линейного пространства V_3 . 2. Множество V_1 всех свободных векторов \mathbf{a} (a_1), параллельных некоторой прямой, также является подпространством линейного пространства V_3 . 3. Множество $\{P_{n-1}(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа $n-1$, является подпространством линейного пространства $\{P_n(x)\}$.

9.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов линейного пространства

Рассмотрим векторы (элементы) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ линейного пространства. Вектор $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые числа, называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — коэффициентами этой линейной комбинации. Если все числа α_i ($i=1, 2, \dots, n$) равны нулю, то линейная комбинация называется тривиальной. Если хотя бы одно из чисел α_i отлично от нуля, линейная комбинация называется нетривиальной.

Система векторов

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \quad (9.1)$$

называется линейно зависимой, если существуют числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (9.2)$$

не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \quad (9.3)$$

Если таких чисел не существует, т. е. равенство (9.3) выполняется только в случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0, \quad (9.4)$$

то система векторов (9.1) называется линейно независимой.

Другими словами, векторы (9.1) называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, и линейно независимыми, если только их тривиальная линейная комбинация является нуль-вектором.

Из определения линейной зависимости и линейной независимости векторов вытекают следующие утверждения.

1. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, является линейно зависимой.
2. Если k ($k < n$) векторов системы (9.1) линейно зависимы, то вся система линейно зависима.

- Если из системы линейно независимых векторов x_1, x_2, \dots, x_n отбросить r ($r < n$) векторов, то оставшиеся векторы образуют также линейно независимую систему.
- Если среди векторов системы (9.1) имеются такие векторы x_k и x_m , что $x_k = \lambda x_m$, где λ – некоторое число, то система (9.1) линейно зависима.

Теорема 9.1. Векторы x_1, x_2, \dots, x_n линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией всех остальных.

Эта теорема выражает необходимое и достаточное условие линейной зависимости n векторов x_1, x_2, \dots, x_n .

Два вектора линейного пространства называются коллинеарными, если они линейно зависимы, и неколлинеарными, если они линейно независимы. Три вектора линейного пространства называются компланарными, если они линейно зависимы, и некомпланарными, если они линейно независимы. Введенные понятия коллинеарности и компланарности векторов линейного пространства совпадают с известными из аналитической геометрии понятиями коллинеарности и компланарности обычных векторов.

9.3. Размерность и базис линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств

Число n называется размерностью линейного пространства V , если выполняются следующие условия: 1) в V существует n линейно независимых векторов; 2) любая система $n+1$ векторов из V линейно зависима. Размерность линейного пространства V обозначают $\dim V$ (от французского слова *dimension* – размерность). Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность считают равной нулю. Размерность линейного пространства – это наибольшее возможное количество линейно независимых элементов в нем. Понятие размерности согласуется с наглядным представлением о ней; так, пространство V_3 всех свободных векторов является трехмерным ($\dim V_3 = 3$), пространство V_2 – двумерным, пространство V_1 – одномерным.

Базисом n -мерного линейного пространства V_n называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства. Приведем примеры базисов некоторых линейных пространств. Базис пространства V_3 образует любая тройка некомпланарных векторов, так как эти векторы линейно независимы (см. теорему 3.4), и любая четверка векторов линейно зависима (см. теорему 3.6). Базис пространства V_2 образует два любых неколлинеарных вектора, поскольку они линейно независимы (см. теорему 3.2), и любой вектор плоскости, определяемой двумя векторами, можно разложить по ним (см. теорему 3.3). Базисом линейного пространства V_1 является любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой.

Линейное пространство, в котором имеется базис, состоящий из конечного числа векторов, называется конечномерным. Примерами конечномерных пространств являются пространства V_1, V_2, V_3, A_n .

Линейное пространство A_n является n -мерным, а его базис образует систему векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если при любом натуральном числе m в нем найдется m линейно независимых векторов. Примером бесконечномерного пространства может служить линейное пространство $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Два линейных пространства V и U называются изоморфными, когда между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in U$, то $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \leftrightarrow (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, $\alpha \mathbf{x}_1 \leftrightarrow \alpha \mathbf{y}_1$, где α – действительное число.

Теорема 9.2. Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

В частности, пространство V_3 (всех свободных векторов) и пространство A_3 (всех упорядоченных троек действительных чисел) изоморфны. Отметим также, что каждое конечномерное линейное пространство размерности n изоморфно линейному пространству A_n .

9.4. Координаты вектора линейного пространства

Теорема 9.3. Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис линейного n -мерного пространства V_n , то любой вектор \mathbf{x} этого пространства линейно выражается через базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, т. е.

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n. \quad (9.5)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ этого разложения определяются однозначно.

Выражение (9.5) называется разложением вектора \mathbf{x} по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Координатами вектора \mathbf{x} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называют коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в разложении этого вектора по данному базису, т. е. в формуле (9.5). Если вектор \mathbf{x} в некотором базисе имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то пишут $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, или $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Операции над векторами сводятся к операциям над их координатами на основании следующих свойств.

1. Вектор является нулевым вектором линейного пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.
2. Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме соответствующих координат данных векторов в том же базисе.
3. Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат на это число (в одном и том же базисе).
4. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе.
5. Вектор \mathbf{y} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ тогда и

только тогда, когда каждая координата вектора у является такой же линейной комбинацией соответствующих координат этих векторов в одном и том же базисе.

Пример 9.1. Пусть A_4 – четырехмерное линейное пространство с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Найти координаты векторов \mathbf{e}_3 и $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4$ в этом базисе.

Представим каждый из векторов \mathbf{e}_3 и \mathbf{x} в виде (9.5). Так как $\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4$, то вектор \mathbf{e}_3 имеет координаты $(0, 0, 1, 0)$. Поскольку $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4$, то вектор \mathbf{x} имеет координаты $(3, 0, -5, 7)$.

Пример 9.2. В некотором базисе даны векторы $\mathbf{x}(1, 2, -2, -1, 3)$, $\mathbf{y}(4, -3, -2, 1, -1)$. Найти координаты вектора $5\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$.

Так как $5\mathbf{x} = (5, 10, -10, -5, 15)$, $-3\mathbf{y} = (-12, 9, 6, -3, 3)$, то вектор $5\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 5\mathbf{x} + (-3\mathbf{y})$ имеет координаты $(-7, 19, -4, -8, 18)$.

9.5. Ранг системы векторов линейного пространства

Рассмотрим систему m векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{a}_m &= (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}) \end{aligned} \tag{9.6}$$

линейного n -мерного пространства, координаты которых заданы в одном и том же базисе. Системе векторов (9.6) поставим в соответствие матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{9.7}$$

в k -м столбце которой записаны координаты вектора \mathbf{a}_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Матрицу (9.7) называют матрицей системы векторов (9.6) в данном базисе, а ранг этой матрицы – рангом системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$. Обратно, если дана матрица (9.7), то ей можно поставить в соответствие систему (9.6) m векторов линейного n -мерного пространства. Согласно свойству 5 п. 9.4, будем говорить, что столбцы матрицы (9.7) линейно зависимы, если векторы (9.6) линейно зависимы и обратно.

Теорема 9.4. Для того чтобы m векторов n -мерного линейного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен m .

Следствие 1. Система n векторов n -мерного линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда матрица этой системы векторов является невырожденной.

Следствие 2. Если ранг матрицы системы t векторов линейного пространства равен r , то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно r .

Пример 9.3. Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $a_1(1, 1, -1, -1)$, $a_2(1, 2, 3, 4)$, $a_3(8, 7, 6, 5)$, $a_4(-1, -1, 1, 1)$.

Матрица данной системы векторов имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен 3 (см. пример 5.16), то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно 3.

Теорема 9.5. Максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т. е. равно рангу этой матрицы.

9.6. Преобразование координат вектора при изменении базиса

В линейном n -мерном пространстве V_n фиксируем два базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \quad (9.8)$$

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n. \quad (9.9)$$

Матрицей перехода от базиса (9.8) к базису (9.9) называется матрица системы векторов (9.9) в базисе (9.8). Каждый вектор системы (9.9) можно разложить по базису (9.8). Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1n}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2n}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned} \quad (9.10)$$

тогда матрица перехода от базиса (9.8) к базису (9.9) имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

Матрица перехода от одного базиса к другому невырожденная (так как базисные векторы линейно независимы). Всякую невырожденную матрицу n -го порядка можно рассматривать как матрицу перехода от одного базиса n -мерного линейного пространства к другому базису этого пространства. Очевидно, матрица T^{-1} , обратная матрице (9.11), является матрицей перехода от базиса (9.9) к базису (9.8).

Теорема 9.6. Если x_1, x_2, \dots, x_n – координаты вектора \mathbf{x} в базисе e_1, e_2, \dots, e_n ; x'_1, x'_2, \dots, x'_n – координаты того же вектора в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n , то

$$X = TX', \quad (9.12)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad (9.13)$$

T – матрица, определяемая формулой (9.11).

Замечание. Теорема 9.6 выражает старые координаты x_1, x_2, \dots, x_n вектора \mathbf{x} через его новые координаты. Чтобы получить формулы, выражающие новые координаты через старые, умножим слева равенство (9.12) на матрицу T^{-1} , обратную матрице T , получим $T^{-1}X = T^{-1}TX'$, $T^{-1}X = X'$ или $X' = T^{-1}X$.

Пример 9.4. В пространстве V_2 рассмотрим базис $e_1 = i$, $e_2 = j$, где i , j – орты, и базис $e'_1 = i'$, $e'_2 = j'$, где i' , j' – орты, причем i' образует с i угол φ (рис. 9.1). В данном случае $i' = i \cos \varphi + j \sin \varphi$, $j' = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$. Матрица перехода от базиса i, j к базису i', j' имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Если вектор a имеет координаты x, y в базисе i, j ; x', y' – в базисе i', j' , то $x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$, $y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$.

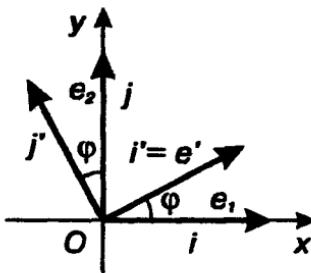


Рис. 9.1

9.7. Евклидово пространство

Определение евклидова пространства. В линейном действительном пространстве V , кроме операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число, введем еще одну операцию, которую назовем скалярным умножением векторов. Каждой упорядоченной паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ поставим в соответствие действительное число, которое назовем их скалярным произведением и обозначим (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Потребуем, чтобы для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнялись следующие аксиомы: I. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, II. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, III. $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, IV. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} = 0$.

Очевидно, скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой: $(0, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, 0) = 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{x}) вектора \mathbf{x} на себя называется скалярным квадратом этого вектора и обозначается \mathbf{x}^2 , т. е.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2. \quad (9.14)$$

Евклидовым пространством называется линейное действительное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая аксиомам I – IV. Если n -мерное линейное пространство является евклидовым, то будем называть его евклидовым n -мерным пространством, а базис этого линейного пространства – базисом евклидова пространства.

Примеры евклидовых пространств. 1. В линейном пространстве V_3 скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} определим так, как в п. 3.6; аксиомы I – IV для него будут выполнены (см. свойства скалярного произведения и определение скалярного квадрата вектора).

Следовательно, линейное пространство V_3 всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения является евклидовым пространством.

2. Рассмотрим n -мерное линейное пространство A_n упорядоченных совокупностей n действительных чисел. Скалярное произведение двух его элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ по аналогии с формулой (3.21) определим соотношением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (9.15)$$

Легко видеть, что все аксиомы I – IV скалярного произведения при этом выполняются. Таким образом, рассматриваемое линейное пространство со скалярным произведением (9.15) является евклидовым пространством, его обозначают E_n .

3. В бесконечномерном линейном пространстве $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, скалярное произведение двух его функций $x(t)$, $y(t)$ определим формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b x(t) y(t) dt. \quad (9.16)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что аксиомы I – IV скалярного произведения будут выполнены, в частности $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \int_a^b x^2(t) dt > 0$ при $x(t) \neq 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ при $x(t) = 0$.

Следовательно, линейное пространство $C[a, b]$ с указанным определением скалярного произведения любых двух его элементов является евклидовым пространством.

Норма вектора евклидова пространства. Нормой вектора евклидова пространства называется арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого вектора. Норму вектора \mathbf{x} обозначим $\|\mathbf{x}\|$, тогда по определению

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^2}. \quad (9.17)$$

Норма вектора обладает следующими свойствами: 1) $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда,

когда $x = 0$; 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α – действительное число; 3) $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$;

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Неравенством Коши – Буняковского называют неравенство

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (9.18)$$

а неравенством треугольника – неравенство

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (9.19)$$

Запишем норму и неравенства (9.18), (9.19) для векторов (элементов) каждого из рассмотренных выше евклидовых пространств.

В евклидовом пространстве V_3 с обычным определением скалярного произведения норма вектора совпадает с его длиной, т. е. $\|a\| = |a|$; это следует из формул $a^2 = |a|^2$ и (9.17). Неравенства (9.18) и (9.19) принимают соответственно вид $|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$. Отметим, что неравенство $|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$ следует из формулы (3.18). Неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$ следует из определений суммы векторов и длины вектора; оно имеет простой геометрический смысл (в треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны).

В евклидовом пространстве $C[a, b]$ норма элемента $x(t)$ определяется формулой

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt},$$

неравенства (9.18) и (9.19) принимают вид

$$\int_a^b x(t) y(t) dt \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b y^2(t) dt},$$

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) + y(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t) dt}.$$

В евклидовом пространстве E_n со скалярным произведением (9.15) норма элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

а неравенства (9.18) и (9.19) принимают вид

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Угол между двумя векторами евклидова пространства. Углом между двумя векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} евклидова пространства называется угол ϕ , для которого

$$\cos\phi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \quad (0 \leq \phi < 2\pi). \quad (9.20)$$

Отметим, что в пространстве V_3 всех свободных векторов введенное понятие угла совпадает с понятием угла, рассматриваемого в векторной алгебре.

Два вектора евклидова пространства называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. В пространстве V_3 ортогональность векторов означает их перпендикулярность.

Из определений следует, что несущевые векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} ортогональны тогда и только тогда, когда $\cos\phi = 0$.

Равенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad (9.21)$$

выполняется тогда и только тогда, когда \mathbf{x} и \mathbf{y} коллинеарны ($\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$). Другими словами, в формуле (9.18) равенство достигается лишь в случае коллинеарности векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Ортонормированный базис. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называется ортогональной, если эти векторы ортогональны, т. е. $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = 0$ при $i \neq k$.

Теорема 9.7. Ортогональная система несущевых векторов линейно независима.

Вектор \mathbf{a} называется нормированным или единичным, если $\|\mathbf{a}\| = 1$. Если \mathbf{a} – несущевой вектор, то каждый из векторов

$$\mathbf{a}_1^{\circ} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \mathbf{a}_2^{\circ} = -\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (9.22)$$

будет нормированным. Нахождение для данного вектора нормированного вектора по формулам (9.22) называется нормированием данного вектора, а множитель $\mu = 1/\pm\|\mathbf{a}\|$ – нормирующим множителем.

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, т. е.

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq k, \\ 1, & \text{при } i = k, \end{cases} \quad (9.23)$$

где $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Базис n -мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если базисные векторы образуют ортонормированную систему.

Теорема 9.8. Во всяком евклидовом n -мерном пространстве ($n \geq 2$) существует ортонормированный базис.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве фиксирован ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и даны векторы этого пространства

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n. \quad (9.24)$$

Скалярное произведение этих векторов выражается формулой

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \quad (9.25)$$

Отсюда следует, что

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

9.8. Унитарное пространство

Комплексное линейное пространство U называется унитарным пространством, если каждой паре векторов $x, y \in U$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое (x, y) и называемое скалярным произведением векторов x и y , причем выполняются следующие аксиомы: I. $(x, y) = (\bar{y}, x)$, II. $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$, III. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$, IV. $(x, x) > 0$ если $x \neq 0$, для всех $x, y, z \in U$ и всех $\alpha \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} – множество комплексных чисел).

Замечание. Черта означает комплексную сопряженность: (\bar{y}, x) – комплексное число, сопряженное комплексному числу (y, x) .

Из аксиом скалярного произведения в унитарном пространстве вытекают следующие свойства:

- 1) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ для любых $x, y, z \in U$;
- 2) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y)$ для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$;
- 3) $(0, x) = (x, 0) = 0$ для любого $x \in U$;
- 4) $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^l \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_i \bar{\beta}_j (x_i, y_j).$

Примером унитарного пространства является множество C_n упорядоченных систем n комплексных чисел

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \dots,$$

для которых скалярное произведение определено формулой

$$(x, y) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{\beta}_n,$$

где $\bar{\beta}_k$ – комплексное число, сопряженное числу β_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Унитарным преобразованием комплексного линейного пространства называется линейное преобразование, сохраняющее положительно определенную эрмитову форму $x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n$, где x_1, x_2, \dots, x_n – координаты вектора пространства. В ортонормированном базисе относительно эрмитова произведения, задаваемого этой формой, унитарное преобразование записывается унитарной матрицей. Унитарной матрицей называется квадратная невырожденная матрица A , удовлетворяющая условию $A^{-1} = \bar{A}^T$, где A^{-1} – обратная матрица, \bar{A}^T – транспонированная и комплексно-сопряженная матрица. Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице. Все характеристические корни унитарной матрицы по модулю равны единицам. Всякая (действительная) ортогональная матрица есть в то же время унитарная матрица.