Глава 10

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ)

10.1. Линейное преобразование и его матрица

Если указано правило f, по которому каждому вектору $\mathbf{x}$ линейного пространства V ставится в соответствие единственный вектор $\mathbf{y}$ этого пространства, то будем говорить, что в нем задано преобразование (отображение, оператор) f или задано преобразование пространства V в себя, и писать $f: V \to V$. Говорят также, что преобразование f переводит вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$, и пишут $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Вектор $\mathbf{y}$ называют образом вектора $\mathbf{x}$, а $\mathbf{x}$ – прообразом вектора $\mathbf{y}$.

Преобразование, при котором каждый вектор имеет единственный прообраз, называется взаимно однозначным (или биективным).

Преобразование f линейного пространства V называется линейным преобразованием (линейным оператором), если для любых векторов этого пространства $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}$ и любого действительного числа λ выполняются условия

$$1)\ f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2); \quad 2)\ f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

(Если рассматривается комплексное пространство, то λ – любое комплексное число.)

Из этих условий следует, что

$$f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2), \tag{10.1}$$

где α, β – любые числа (действительные или комплексные). Обратно, из равенства (10.1) следуют условия 1) и 2). Итак, линейное преобразование (линейный оператор) определяется равенством (10.1).

Отметим, что линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой, так как, согласно условию 2), $f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{x}) = 0f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Простейшим примером линейного преобразования является тождественное преобразование или преобразование $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, т.е. преобразование, которое каждому вектору линейного пространства ставит в соответствие тот же вектор. Линейное преобразование будет вполне определено, если заданы образы базисных векторов рассматриваемого пространства.

Пусть f – линейное преобразование n-мерного линейного пространства, переводящее базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Каждый из последних векторов разложим по базису:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}_n.
\end{aligned}$$

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

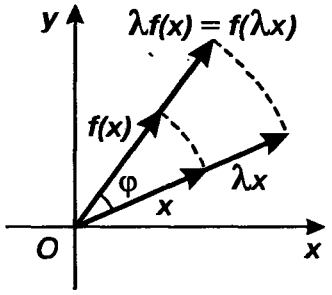

Рис. 10.1

в которой k-й столбец состоит из координат вектора $\mathbf{e}'_k$ $(k=1,2,\dots,n)$, называется матрицей линейного преобразования f в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$; ранг r матрицы A называется рангом преобразования f, а число $(n-r)$ – дефектом этого преобразования. Итак, каждому линейному преобразованию n-мерного линейного пространства соответствует матрица порядка n в данном базисе; и наоборот, каждой матрице порядка n соответствует линейное преобразование n-мерного пространства.

Отметим, что матрица тождественного преобразования в любом базисе будет единичной; обратно, любой единичной матрице n-го порядка соответствует тождественное преобразование линейного n-мерного пространства.

Пример 10.1. В пространстве V_2 всех свободных векторов на плоскости определим преобразование поворота всех векторов вокруг начала координат на угол φ. Каждому вектору $\mathbf{x}$ (рис. 10.1) этой плоскости ставим в соответствие вектор $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, полученный вращением вектора $\mathbf{x}$ на один и тот же угол φ. Это преобразование является линейным, поскольку условия 1) и 2), определяющие линейное преобразование, будут выполнены. Найдем матрицу этого линейного преобразования в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ (рис. 10.2, *а*, *б*). Так как $f(\mathbf{i})=\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=\mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi$, $f(\mathbf{j})=\mathbf{OC}+\mathbf{OD}=-\mathbf{i}\sin\varphi+\mathbf{j}\cos\varphi$, то

$$A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

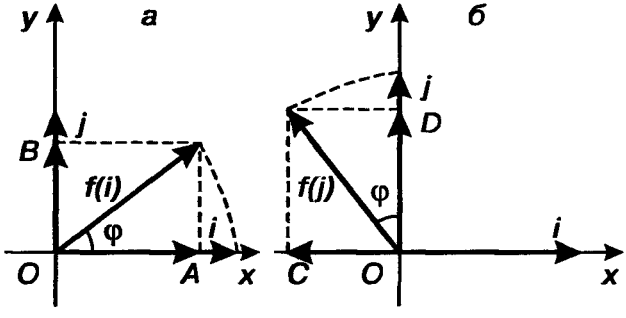

Рис. 10.2

10.2. Линейное преобразование в координатах

Рассмотрим линейное преобразование f n-мерного линейного пространства, заданное в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{10.2}$$

Координаты вектора $\mathbf{x}$ и его образа $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ известны:

$$x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,\ f(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n. \tag{10.3}$$

Зависимость между координатами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выражается формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Формулы (10.4) можно записать в матричном виде

$$Y = AX, \tag{10.5}$$

где A определяется формулой (10.2), а X и Y – формулами

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Если переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ связаны с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формулами (10.4), то будем говорить, что задано линейное однородное преобразование переменных с матрицей A, переводящее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Оно обладает теми же свойствами, что и линейное преобразование n-мерного линейного пространства. Линейное однородное преобразование переменных (10.4) или (10.5) называется невырожденным, если $\det A \neq 0$.

Замечание. При рассмотрении линейных преобразований (линейных операторов) пользуются и другими обозначениями. Если $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где f – линейное преобразование (линейный оператор) с матрицей A в некотором базисе, то пишут $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Условия 1) и 2), определяющие линейное преобразование, можно записать в виде $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$, $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$.

10.3. Зависимость между матрицами одного и того же преобразования в различных базисах. Подобные матрицы

В n-мерном линейном пространстве фиксируем два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$; первый из них назовем старым, второй – новым. Предположим, что известно преобразование, переводящие старый базис в новый.

Теорема 10.1. *Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ – два базиса линейного пространства, A – матрица линейного преобразования в старом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то матрица B этого преобразования в новом базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ имеет вид*

$$B = T^{-1}AT. \tag{10.6}$$

где T – матрица перехода от старого базиса к новому.

Следствие. *Если линейное преобразование имеет невырожденную матрицу в некотором базисе, то матрица этого преобразования будет невырожденной в любом другом базисе.*

Матрица B называется подобной матрице A, если существует невырожденная квадратная матрица C, удовлетворяющая равенству $B = C^{-1}AC$.

Две квадратные матрицы A и B порядка n тогда и только тогда являются матрицами одного и того же линейного преобразования пространства V_n в соответствующих базисах, когда матрица B подобна матрице A.

Пример 10.2. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ преобразование f имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования f в базисе $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$.

Так как

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

то по формуле (10.6) получаем

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

10.4. Характеристическое уравнение линейного преобразования

Теорема 10.2. *Если линейное преобразование f в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеет матрицу A и в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ – матрицу B, то*

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E), \tag{10.7}$$

где λ – любое действительное число, E – единичная матрица n-го порядка.

Отметим, что $\det(A-\lambda E)$ является многочленом степени n относительно λ и называется характеристическим многочленом матрицы A или характеристическим многочленом линейного преобразования f.

Замечание. Равенство (10.7) означает, что характеристический многочлен линейного преобразования остается неизменным при переходе к новому базису; матрица линейного преобразования меняется.

Характеристическим уравнением линейного преобразования называется уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{10.8}$$

где A – матрица этого преобразования в некотором базисе. Очевидно, характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса. Уравнение (10.8) называют также характеристическим уравнением матрицы A, а корни уравнения – характеристическими числами линейного преобразования f или характеристическими числами матрицы A.

Если линейное преобразование f в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеет квадратную матрицу n-го порядка $A=(a_{ik})$, то характеристическое уравнение (10.8) запишется так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{10.9}$$

Левая часть равенства (10.9) является характеристическим многочленом матрицы A; обозначим его $P_n(\lambda)$, тогда характеристическое уравнение (10.9) примет вид $P_n(\lambda)=0$.

Пример 10.3. Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с определением характеристического многочлена получаем

$$P_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P_n(\lambda)=(4-\lambda)(1-\lambda)^2+4+2+2(1-\lambda)+2(1-\lambda)-2(4-\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6.$$

Приравнивая этот многочлен нулю, находим характеристическое уравнение $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$ или $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$. Разлагая левую часть этого

уравнения на множители $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+5\lambda+6\lambda-6=$ $=\lambda^2(\lambda-1)-5\lambda(\lambda-1)+6(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$, приводим данное уравнение к виду $(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$, откуда $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Эти корни – характеристические числа данной матрицы.

10.5. Собственные векторы линейного преобразования

Ненулевой вектор **x** линейного пространства называется собственным вектором линейного преобразования f этого пространства, если существует число k такое, что

$$f(\mathbf{x})=k\mathbf{x}, \tag{10.10}$$

причем k – действительное число для действительного линейного пространства и комплексное число в случае комплексного пространства. Число k называется собственным значением вектора **x** относительно преобразования f. Равенство (10.10) можно записать в матричном виде

$$AX=kX, \tag{10.11}$$

где A – матрица преобразования f в некотором базисе, X – матрица-столбец из координат собственного вектора **x** в том же базисе. Ненулевая матрица-столбец X, удовлетворяющая уравнению (10.11), называется собственным вектором-столбцом матрицы A с собственным значением k.

Собственные векторы и собственные значения обладают следующими свойствами.

1. Собственный вектор линейного преобразования имеет единственное собственное значение k.

2. Если **x** – собственный вектор линейного преобразования f с собственным числом k и λ – любое, отличное от нуля число, то $\lambda\mathbf{x}$ – также собственный вектор преобразования f с собственным значением k

3. Если **x** и **y** – линейно независимые собственные векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным значением k, то $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ – также собственный вектор этого преобразования с собственным значением k.

4. Если **x** и **y** – собственные векторы линейного преобразования f с собственными числами k и m, причем $k\neq m$, то **x** и **y** линейно независимы.

Следствие. *Если $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m$ – линейно независимые собственные векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным значением k, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором этого преобразования с собственным значением k.*

Теорема 10.3. *В комплексном линейном пространстве все корни характеристического уравнения и только они являются собственными значениями линейного преобразования.*

Координаты собственного вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-k)\,x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\
&a_{21}x_2+(a_{22}-k)\,x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-k)\,x_n=0.
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю (см. следствие из теоремы Крамера), т. е.

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k
\end{vmatrix}=0. \tag{10.13}$$

Это означает, что число k является корнем характеристического уравнения.

Замечания. 1. Уравнение (10.13) является алгебраическим уравнением n-й степени относительно k. Такое уравнение имеет ровно n корней, считая равные и комплексные. Среди корней этого уравнения может не оказаться действительных.

2. Собственными значениями линейного преобразования действительного пространства являются только действительные корни характеристического уравнения.

Собственные значения линейного преобразования называются также собственными значениями матрицы этого преобразования. Собственное значение называется m-кратным, если оно является m-кратным корнем характеристического уравнения.

Теорема 10.4. *Корни характеристического уравнения действительной симметрической матрицы являются действительными числами.*

Следствие. *Действительная симметрическая матрица имеет только действительные собственные векторы.*

Система (10.12) для определения координат собственного вектора в этом случае имеет только действительные решения, так как a_{ij} и k – действительные числа.

Теорема 10.5. *Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Пример 10.4. Найти действительные собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение матрицы A

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7\\ 1 & -4-\lambda & 9\\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^3-5\lambda^2+17\lambda-13=0.$$

Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 13\lambda - 13 = \lambda^2(\lambda - 1) - 4\lambda(\lambda - 1) + 13(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Уравнение принимает вид $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 - 3i$, $\lambda_3 = 2 + 3i$. Следовательно, линейное преобразование с данной матрицей имеет только одно действительное собственное значение $\lambda = 1$.

Для отыскания соответствующего собственного вектора используем систему уравнений (10.12), которая принимает вид

$$\begin{aligned} (4-\lambda)x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - (4+\lambda)x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + (5-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

при $\lambda = 1$. Решая полученную систему, находим $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем собственный вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$.

Замечание. Собственный вектор линейного преобразования определяется с точностью до произвольного множителя (см. свойство 2 собственного вектора).

10.6. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду

Теорема 10.6. *Матрица* линейного преобразования имеет диагональный вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10.14}$$

тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого преобразования.

Матрица A называется приводимой к диагональному виду, если существует невырожденная матрица T такая, что матрица $T^{-1}AT = B$ является диагональной. Следовательно, если матрица A приводима к диагональному виду, то

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – характеристические числа матрицы A.

Теорема 10.7. *Матрица* A линейного преобразования f n-мерного линейного пространства приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис этого пространства, состоящий из собственных векторов данного преобразования.

Если все собственные числа матрицы A попарно различны, то матрица приводится к диагональному виду.

10.7. Действия над линейными преобразованиями

Произведение преобразований. Рассмотрим преобразование f, переводящие вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$, т. е. $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$. К вектору $\mathbf{y}$ применим преобразование g, переводящие вектор $\mathbf{y}$ в вектор $\mathbf{z}$, т. е. $\mathbf{z}=g(\mathbf{y})$. Так как $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, то имеем преобразование $\mathbf{z}=g(f(\mathbf{x}))$, переводящее вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{z}$, причем $\mathbf{z}$ получен в результате последовательного применения преобразований f и g. Преобразование, заключающееся в последовательном применении преобразований f и g, называется произведением преобразования f на преобразование g или композицией этих преобразований и обозначается $g\circ f$ (или просто gf); отметим, что справа записывается первое преобразование. Таким образом,

$$g\circ f(x)=g(f(x)). \tag{10.15}$$

Произведение линейных преобразований является линейным преобразованием.

Теорема 10.8. *Если в некотором базисе линейные преобразования f и g имеют соответственно матрицы A и B, то их произведение gf в том же базисе имеет матрицу BA.*

Сумма преобразований. Суммой преобразований f и g некоторого пространства называется преобразование h такое, что для любого вектора $\mathbf{x}$ этого пространства

$$h(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}). \tag{10.16}$$

Сумму преобразований f и g будем обозначать $f+g$. Очевидно $f+g=g+f$.

Теорема 10.9. *Если линейные преобразования f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы A и B, то преобразование $f+g$ в том же базисе имеет матрицу $A+B$.*

Пример 10.5. Даны два линейных преобразования

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1+4x_3, & x_1'' &= x_2'-6x_3', \\ x_2' &= 4x_2-9x_3, & x_2'' &= 3x_1'+7x_3', \\ x_3' &= 3x_1+x_2, & x_3'' &= x_1'+x_2'-x_3'. \end{aligned}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Первое преобразование задано матрицей A, второе – матрицей B, где

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Искомое преобразование в соответствии с теоремой 10.8. имеет матрицу BA. Умножив матрицу B на матрицу A, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -2 & -9 \\ 42 & 7 & 12 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, искомое преобразование определяется формулами $x_1'' = -18x_1 - 2x_2 - 9x_3$, $x_2'' = 42x_1 + 7x_2 + 12x_3$, $x_3'' = 4x_1 + 3x_2 - 5x_3$.

10.8. Невырожденные линейные преобразования. Преобразование, обратное данному

Линейное преобразование называется невырожденным, если его матрица является невырожденной; в противном случае линейное преобразование называется вырожденным.

Теорема 10.10. *Линейное преобразование является невырожденным тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.*

Следствие. *Линейное невырожденное преобразование ненулевой вектор переводит в ненулевой; обратно также верно: если линейное преобразование ненулевой вектор переводит в ненулевой, то оно будет невырожденным.*

Теорема 10.11. *Произведение двух линейных невырожденных преобразований есть невырожденное линейное преобразование. Преобразование* φ *называется обратным преобразованию* f, *если для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$f\varphi(\mathbf{x}) = \varphi f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \tag{10.17}$$

т. е. произведение этих преобразований является тождественным преобразованием. Из определения следует, что если φ – преобразование, обратное преобразованию f, то f – преобразование, обратное φ. Преобразования f и φ, удовлетворяющие условию (10.17), называются взаимно обратными.

Линейное преобразование имеет обратное преобразование тогда и только тогда, когда оно является невырожденным.

Для любого невырожденного линейного преобразования с матрицей A в некотором базисе существует единственное обратное преобразование с матрицей A^{-1} в том же базисе.

Пример 10.6. Найти линейное преобразование, обратное преобразованию $y_1 = 2x_1 - x_3$, $y_2 = -3x_1 + x_2 + x_3$, $y_3 = 2x_1 - x_2$.

Это преобразование имеет матрицу A, определитель которой отличен от нуля, поэтому для него существует обратное преобразование с матрицей A^{-1}. Так как

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

то обратное преобразование выражается формулами $x_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $x_2 = 2y_1 + 2y_2 + y_3$, $x_3 = y_1 + 2y_2 + 2y_3$.

10.9. Ортогональные матрицы

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

называется ортогональной, если соответствующая ей система векторов

$$\mathbf{a}_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}),\ \mathbf{a}_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}),\ \dots,\ \mathbf{a}_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) \tag{10.19}$$

является ортонормированной.

Векторы (10.19) будут ортонормированными (см. п. 9.7), если

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{10.20}$$

для любых i, j $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что единичная матрица любого порядка является ортогональной.

Теорема 10.12. *Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A выражается равенством*

$$A^{\mathrm{T}}A = E, \tag{10.21}$$

где A^{T} – матрица, полученная из матрицы A транспонированием, E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Следствие 1. *Модуль определителя ортогональной матрицы равен единице.*

Следствие 2. *Ортогональная матрица является невырожденной матрицей.*

Следствие 3. *Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.*

Следствие 4. *Равенство $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$ выражает необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A.*

Следствие 5. *Матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы, является ортогональной.*

Следствие 6. *Матрица, обратная ортогональной матрице, является ортогональной.*

Замечания. 1. Из условия $\det A = \pm 1$ не следует, что A – ортогональная матрица. Например, матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, для которой $\det A = 1$, не является ортогональной, так как $A^{\mathrm{T}} A \neq E$.

2. Сумма ортогональных матриц не является ортогональной матрицей.

3. Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A можно выразить равенством $AA^{\mathrm{T}} = E$.

Теорема 10.13. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.*

10.10. Ортогональные преобразования

Линейное преобразование евклидова пространства называется ортогональным, если в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Теорема 10.14. *Линейное преобразование евклидова пространства является ортогональным тогда и только тогда, когда оно ортонормированный базис переводит в ортонормированный.*

Теорема 10.15. *Ортогональное преобразование не меняет скалярного произведения векторов.*

Следствие 1. *При ортогональном преобразовании f остается неизменной норма вектора, т. е.* $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\|$.

Следствие 2. *При ортогональном преобразовании f остается неизменным угол между векторами, т. е.*

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{\|f(\mathbf{x})\| \cdot \|f(\mathbf{y})\|}.$$

Ортогональные преобразования обладают следующими свойствами.

1. Ортогональное преобразование является невырожденным.

2. Для любого ортогонального преобразования существует обратное преобразование, являющееся ортогональным.

3. Если ортогональное преобразование имеет матрицу A, то обратное ему преобразование имеет матрицу A^{T}.

4. Произведение двух ортогональных преобразований является ортогональным преобразованием.