Глава 11

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

11.1. Квадратичная форма и ее матрица

Квадратичной формой $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма вида

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \tag{11.1}$$

или

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{11.2}$$

где a_{ij} – некоторые числа, называемые коэффициентами. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичная форма называется действительной или комплексной в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты соответственно действительными или комплексными числами. Будем рассматривать действительные квадратичные формы.

Матрицей квадратичной формы называется матрица, составленная из ее коэффициентов. Квадратичной форме (11.1) соответствует единственная симметрическая матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

И наоборот, всякой симметрической матрице (11.3) соответствует единственная квадратичная форма с точностью до обозначения переменных.

Рангом квадратичной формы называют ранг ее матрицы. Квадратичная форма n переменных называется невырожденной, если ее матрица невырожденная, т. е. $r = n$, и вырожденной, если $r < n$.

Квадратичную форму (11.1) n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно записать в матричном виде. Действительно, если X – матрица-столбец из переменных

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, X^{T} – матрица, полученная транспонированием матрицы X, т.е. матрица-строка из тех же переменных, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}} A X, \tag{11.4}$$

где A определяется формулой (11.3).

Пример 11.1. Записать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$ и найти ее ранг.

В данном случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{13} = a_{31} = -4$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{33} = -5$, поэтому

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -35 + 24 + 24 - 112 + 45 - 4 = -58.$$

Так как $\det A \neq 0$, то ранг матрицы равен трем ($r = 3$). Эта квадратичная форма является невырожденной, поскольку $r = n$.

11.2. Преобразование квадратичной формы при линейном однородном преобразовании переменных

Рассмотрим квадратичную форму (11.1). Перейдем к новым переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{aligned} \tag{11.5}$$

или в матричном виде

$$X = BY, \tag{11.6}$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{11.7}$$

В квадратичной форме (11.1) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставим их выражения через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, определяемые формулами (11.5), получим квадратичную

форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n переменных с некоторой матрицей C. В этом случае говорят, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ линейным однородным преобразованием (11.5). Линейное однородное преобразование (11.6) называется невырожденным, если $\det B \neq 0$.

Две квадратичные формы называются конгруэнтными, если существует невырожденное линейное однородное преобразование, переводящее одну форму в другую. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ конгруэнтны, то будем писать $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Свойства конгруэнтности квадратичных форм.

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \sim \psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Теорема 11.1. *Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей A линейным однородным преобразованием $X = BY$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с матрицей $C = B^{\mathrm{T}}AB$.*

Следствие 1. *Определители матриц конгруэнтных невырожденных действительных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.*

Следствие 2. *Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.*

11.3. Приведение действительной квадратичной формы к нормальному виду

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется канонической, если она не содержит произведений различных переменных, т. е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ii} x_i^2 \quad (r \leq n). \tag{11.8}$$

Каноническая квадратная форма называется нормальной (или имеет нормальный вид), если $|\alpha_{ii}| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, т. е. отличные от нуля коэффициенты при квадратах переменных равны $+1$ или -1. Например, квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1^2 + 4x_3^2 - 3x_4^2$, для которой $\alpha_{11} = 6$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = 4$, $\alpha_{44} = -3$, имеет канонический вид; квадратная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_3^2 + x_4^2$ является нормальной, так как $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = -1$, $\alpha_{44} = 1$.

Теорема 11.2. *Любая квадратичная форма некоторым невырожденным линейным преобразованием может быть приведена к каноническому виду*

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – новые переменные.

Некоторые из коэффициентов b_{ii} могут оказаться равными нулю; число отличных от нуля коэффициентов в этой формуле равно рангу r матрицы квадратичной формы φ.

Теорема 11.3. *Любую действительную квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к нормальному виду*

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2 - z_k^2 - \cdots - z_r^2.$$

Число входящих сюда квадратов равно рангу формы.

11.4. Закон инерции квадратичных форм

Закон инерции квадратичных форм выражает

Теорема 11.4. *Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма невырожденным действительным линейным преобразованием, не зависит от выбора преобразования.*

Число положительных квадратов в нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма, называют положительным индексом инерции этой формы, число отрицательных квадратов – отрицательным индексом инерции, разность между положительным и отрицательным индексами инерции – сигнатурой формы f. Если известен ранг формы, то задание любого из трех указанных выше чисел определяет два других.

Теорема 11.5. *Две действительные квадратичные формы от n переменных тогда и только тогда конгруэнтны, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

11.5. Знакоопределенные квадратичные формы

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно-определенной, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2, \tag{11.9}$$

т. е. если ранг и положительный индекс инерции равны числу неизвестных.

Систему значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем нулевой, если $x_1 = x_2 = \ldots = \ = x_n = 0$, и ненулевой, если хотя бы одно из них отлично от нуля.

Теорема 11.6. *Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является положительно-определенной тогда и только тогда, когда она принимает положительные значения при любой ненулевой системе значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Пусть дана квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей $A = (a_{ij})$. Главными минорами квадратичной формы f называются миноры

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

т. е. миноры порядка $1, 2, \ldots, n$ матрицы A, расположенные в левом верхнем углу; последний из них совпадает с определителем матрицы.

Теорема 11.7. *Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с действительной матрицей является положительно-определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.*

Действительная квадратичная форма называется отрицательно-определенной, если она является невырожденной и приводится к нормальному виду, содержащему только отрицательные квадраты всех переменных; эту форму можно привести к виду

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2. \qquad (11.10)$$

Теорема 11.8. *Квадратичная форма является отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры четного порядка положительны, а нечетного – отрицательны.*

Положительно-определенные и отрицательно-определенные квадратичные формы называются знакоопределенными квадратичными формами.

Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются полуопределенными.

Неопределенными называются квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты переменных.

Пример 11.2. Доказать, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ положительно-определенная.

Запишем матрицу A этой квадратичной формы и определитель матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Так как главные миноры матрицы $a_{11} = 6$, $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26$ и $\det A = 162$, т.е. все положительны, то данная квадратичная форма является положительно-определенной.

11.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных

Теорема 11.9. *Если существует ортогональное преобразование с матрицей C, приводящее действительную квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду*

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \qquad (11.11)$$

то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – характеристические числа матрицы A квадратичной формы f.

Теорема 11.10. *Для любой действительной квадратичной формы существует ортогональное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.*

Теорема 11.11. *Для любой действительной симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица T, что $T^{-1}AT$ – диагональная матрица.*

Следствие. *Любая действительная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.*

Теорема 11.12. *Если линейное преобразование действительного линейного пространства имеет действительную симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования.*

Из этих теорем следует правило нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму n переменных к каноническому виду. Это правило состоит в следующем: 1) записать матрицу данной квадратичной формы, найти ее собственные значения и n попарно ортогональных собственных векторов, пронормировать их; 2) составить матрицу из ортонормированных собственных вектор-столбцов; 3) записать искомое ортогональное преобразование с помощью последней матрицы.

Пример 11.3. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму двух переменных x_1, x_2,

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 7x_2^2.$$

Поскольку в данном случае $a_{11} = 5$, $a_{12} = a_{21} = 2\sqrt{6}$, $a_{22} = 7$, то матрица A этой квадратичной формы и ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишутся так:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение $(5-\lambda)(7-\lambda) - 24 = 0$, или $\lambda^2 - 12\lambda + \ +11 = 0$, имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, которые являются собственными значениями матрицы A.

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям. Координаты (s, t) этих векторов определяются из системы уравнений (10.12), которая в данном случае имеет вид

$$(5-\lambda)s + 2\sqrt{6}t = 0, 0$$
$$2\sqrt{6}s + (7-\lambda)t = 0.$$

При $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$ имеем две системы

$$4s + 2\sqrt{6}t = 0, \quad -6s + 2\sqrt{6}t = 0,$$
$$2\sqrt{6}s + 6t = 0, \quad 2\sqrt{6}s - 4t = 0.$$

Из этих систем находим собственные векторы $u = (-(\sqrt{6}/2)t, t)$, $v = ((\sqrt{6}/3)t, t)$, где $t \neq 0$. Положив $t_1 = -2$, $t_2 = 3$, получим $u = (\sqrt{6}, -2)$, $v = (\sqrt{6}, 3)$. Нормировав эти векторы, запишем их координаты в столбцы, составим матрицу B:

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы B записываем искомое ортогональное преобразование

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}y_1 + \sqrt{\frac{2}{5}}y_2, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}y_1 + \sqrt{2}y_2),$$

или

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}y_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}y_2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}y_1 + \sqrt{3}y_2).$$

Это преобразование приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $\varphi(y_1, y_2) = y_1^2 + 11y_2^2$.

11.7. Упрощение уравнений фигур второго порядка на плоскости

Фигурой второго порядка на плоскости называется множество точек этой плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{11.12}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно в нуль не обращаются. Отметим, что это множество, в частности, может состоять из единственной точки или оказаться пустым.

Первые три члена левой части уравнения (11.12) образуют квадратичную форму двух переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{11.13}$$

с симметрической матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{11.14}$$

По теореме 11.10 эту квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду

$$f_1(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \tag{11.15}$$

с матрицей

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{11.16}$$

где λ_1, λ_2 – характеристические числа матрицы A, т. е. корни характеристического уравнения матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{11.17}$$

При этом ортогональном преобразовании уравнение (11.12) примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{13}x' + a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{11.18}$$

Это уравнение можно привести к каноническому виду путем выделения в левой части полных квадратов.

Фигуру второго порядка, определяемую уравнением (11.12), называют центральной, если $\det A \neq 0$, и нецентральной, когда $\det A = 0$.

Отметим, что при ортогональном преобразовании переменных определитель матрицы квадратичной формы не меняется, т. е. $\det C = \det A$. Так как $\det C = \lambda_1\lambda_2$ (см. (11.16)), то

$$\det A = \lambda_1\lambda_2. \tag{11.19}$$

Пусть уравнение (11.18) определяет центральную фигуру, т. е. $\det A \neq 0$. Здесь возможны два случая: 1) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (числа λ_1 и λ_2 одного знака), фигура называется фигурой эллиптического типа; 2) $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (числа λ_1 и λ_2 имеют разные знаки), фигура называется фигурой гиперболического типа.

Если $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, то уравнение (11.18), выделив в его левой части полные квадраты, можно привести к виду

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 + \lambda_2(y' - h_2)^2 = q$$

или

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = q, \tag{11.20}$$

где

$$X = x' - h_1,\ Y = y' - h_2. \tag{11.21}$$

Формулы (11.21) выражают зависимость между координатами (x', y') и (X, Y) при параллельном переносе координатных осей в точку $O_1(h_1, h_2)$.

В случае $\lambda_1\lambda_2 > 0$ уравнение (11.20) приводится к одному из канонических видов

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, \tag{11.22}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = -1, \tag{11.23}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 0 \tag{11.24}$$

в зависимости от знаков λ_1 и q: 1) $\lambda_1 q > 0$, 2) $\lambda_1 q < 0$, 3) $q = 0$.

Уравнение (11.22) определяет эллипс, уравнению (11.23) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, уравнению (11.24) удовлетворяют координаты одной точки $(X = 0, Y = 0)$.

В случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$ уравнение (11.20) приводится к одному из канонических видов

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1, \tag{11.25}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = -1, \tag{11.26}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 0 \tag{11.27}$$

в зависимости от знаков λ_1 и q: 1) $\lambda_1 q > 0$, 2) $\lambda_1 q < 0$, 3) $q = 0$.

Уравнение (11.25) определяет гиперболу с действительной осью O_1X, уравнение (11.26) – гиперболу с действительной осью O_1Y, уравнение (11.27) – пару пересекающихся прямых, так как оно распадается на два уравнения

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0,\ \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0,\ \text{или}\ Y = \frac{b}{a}X,\ Y = -\frac{b}{a}X.$$

Обратимся к нецентральным фигурам, т.е. к случаю когда $\det A = 0$. В силу (11.19) из равенства $\det A = 0$ следует, что $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Последнее равенство означает, что одно из чисел $\lambda_1\lambda_2$ равно нулю (оба числа λ_1, λ_2 в нуль обратиться не могут, так как это означало бы, что квадратичная форма (11.15) является вырожденной, чего быть не может, поскольку $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$). Если $a'_{23} \neq 0$, то уравнение (11.18) можно привести к виду $\lambda_1(x' - h_1)^2 + a'_{23}y' + q = 0$ и записать так:

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 = -a'_{23}(y' - h_2). \qquad (11.28)$$

Осуществим параллельный перенос репера $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на вектор $\mathbf{OO}_1 = h_1\mathbf{e}'_1 + h_2\mathbf{e}'_2$, получим новую систему координат O_1XY, причем X и Y определяются формулами (11.21). Уравнение (11.28) приведем к виду

$$X^2 = 2pY. \qquad (11.29)$$

Уравнение (11.29) определяет параболу с осью O_1Y.

Если в уравнении (11.18) $a'_{23} = 0$ (и $\lambda_2 = 0$), то, выделив полный квадрат, его можно записать так:

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 + q = 0. \qquad (11.30)$$

Осуществив параллельный перенос репера $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на вектор $\mathbf{OO}_1 = h\mathbf{e}_1$, т.е. выполнив преобразование $X = x' - h_1$, $Y = y'$, получим новую систему координат O_1XY, в которой уравнение (11.30) принимает один из видов:

$$X^2 = a^2,\ X^2 = -a^2,\ X^2 = 0 \qquad (11.31)$$

в зависимости от соотношения знаков чисел λ_1 и q: $\lambda_1 q > 0$, $\lambda_1 q < 0$, $q = 0$. Первое из уравнений (11.31) определяет пару параллельных прямых $X = a$, $X = -a$, второму уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, третье уравнение определяет пару совпавших прямых $X = 0$, $X = 0$.

Операция перехода от уравнения (11.12) к уравнению (11.18) называется отнесением фигуры к главным осям. Новые оси координат параллельны осям симметрии фигуры. Главными направлениями фигуры, заданной уравнением (11.12), называют направления ортогональных собственных векторов матрицы квадратичной формы, соответствующей этому уравнению.

Из теорем п. 11.6 следует, что существует декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение (11.12) принимает канонический вид. Чтобы выбрать эту систему координат, необходимо сделать следующее.

1. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму, соответствующую данному уравнению.
2. С помощью этого преобразования определить главные направления фигуры, т. е. векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ – ортонормированные собственные векторы матрицы указанной квадратичной формы.
3. Найти уравнение фигуры в репере $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$.
4. Выделить полные квадраты в полученном уравнении.
5. Совершить параллельный перенос системы $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на соответствующий вектор $\mathbf{OO}_1$ и составить каноническое уравнение фигуры в репере $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$.

Пример 11.4. Какую линию на плоскости определяет уравнение $5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2=22$?

С помощью теории квадратичных форм приведем это уравнение к каноническому виду. Левая часть уравнения – квадратичная форма $f(x,y)=5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2$, которая с точность до обозначений переменных ($x_1=x$, $x_2=y$, $y_1=x'$, $y_2=y'$) (см. п. 11.6, пример 11.3) приведена к каноническому виду $\varphi(x',y')=x'^2+11y'^2$ посредством ортогонального преобразования $x=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')$.

Это преобразование данное уравнение переводит в уравнение

$$5\left(\frac{1}{5}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')^2\right)+\frac{4\sqrt{6}}{5}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')+$$

$$+\frac{7}{5}(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')^2=22, \text{ или } x'^2+11y'^2=22.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=\sqrt{22}$, $b=\sqrt{2}$.

11.8. Упрощение уравнений фигур второго порядка в пространстве

Фигурой второго порядка в пространстве называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0, \tag{11.32}$$

где $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$.

Сумма первых шести членов левой части уравнения (11.32) представляет собой квадратичную форму трех переменных, x, y, z:

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \tag{11.33}$$

с симметрической матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{11.34}$$

Фигура второго порядка называется центральной, если $\det A\neq 0$, и нецентральной, если $\det A=0$.

С помощью ортогонального преобразования квадратичную форму (11.33) можно привести к каноническому виду $\varphi(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$, где

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$. Матрица квадратичной формы $\varphi=\varphi(x', y', z')$ принимает вид

$$C=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \qquad (11.35)$$

Указанное ортогональное преобразование приводит уравнение (11.32) к виду

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+a'_{14}x'+a'_{24}y'+a'_{34}z'+a'_{44}=0. \qquad (11.36)$$

Центральные фигуры. Если $\det A\neq 0$, то $\det C=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$, так как $\det A=\det C$. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения (11.36), можно привести его к виду

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2=\mu, \qquad (11.37)$$

где $X=x'-h_1$, $Y=y'-h_2$, $Z=z'-h_3$.

Поскольку $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$, то ни одно из чисел не равно нулю, все эти числа могут иметь один знак $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0)$ или только два из них одного знака.

1. Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака, то уравнение (11.37) можно привести к одному из следующих канонических видов:

$$X^2/a^2+Y^2/b^2+Z^2/c^2=1, \qquad (11.38)$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2+Z^2/c^2=-1, \qquad (11.39)$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2+Z^2/c^2=0 \qquad (11.40)$$

в зависимости от λ_1 и μ: $\lambda_1\mu>0$, $\lambda_1\mu<0$, $\mu=0$.

Уравнение (11.38) определяет эллипсоид, уравнению (11.39) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства, уравнению (11.40) удовлетворяют координаты единственной точки $(X=0, Y=0, Z=0)$.

2. Пусть знак одного из этих чисел противоположен знаку двух других: предположим, что $\lambda_1\lambda_2>0$. Уравнение (11.37) можно привести к одному из канонических видов

$$X^2/a^2+Y^2/b^2-Z^2/c^2=1, \qquad (11.41)$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2-Z^2/c^2=-1, \qquad (11.42)$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2-Z^2/c^2=0 \qquad (11.43)$$

в зависимости от λ_1 и μ: $\lambda_1\mu>0$, $\lambda_1\mu<0$, $\mu=0$.

Уравнения (11.41) – (11.43) определяют соответственно однополосный гиперболоид, двуполостный гиперболоид и конус второго порядка.

Нецентральные фигуры. Если $\det A = 0$, или $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, то одно или два из этих чисел равны нулю.

1. Пусть $\lambda_3 = 0, a'_{34} \neq 0$, тогда уравнение (11.36) приводится к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \mu Z = 0. \tag{11.44}$$

Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1\mu < 0$, то имеем

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 2Z; \tag{11.45}$$

в случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\lambda_1\mu < 0$ получаем

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 2Z. \tag{11.46}$$

Уравнения (11.45) и (11.46) определяют соответственно эллиптический и гиперболический параболоиды.

2. Пусть $\lambda_3 = 0, a'_{34} = 0$, тогда имеем уравнение

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \nu = 0, \tag{11.47}$$

которое приводится к одному из следующих канонических видов:

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, \tag{11.48}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = -1, \tag{11.49}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1, \tag{11.50}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = -1, \tag{11.51}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 0. \tag{11.52}$$

Уравнение (11.48) определяет эллиптический цилиндр, каждое из уравнений (11.51), (11.50) – гиперболический цилиндр, уравнение (11.52) – пару пересекающихся плоскостей; уравнению (11.49) не удовлетворяют координаты ни одной точки.

3. Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $a'_{24} \neq 0$, то уравнение (11.36) приводится к виду $\lambda_1 X^2 + \mu Y = 0$ или

$$X^2 = 2pY \tag{11.53}$$

и определяет параболический цилиндр.

4. Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $a'_{24} = 0$, то имеем уравнение $\lambda_1 X^2 + \nu = 0$, которое приводится к одному из канонических видов

$$X^2 = a^2,\ X^2 = -a^2,\ X^2 = 0. \tag{11.54}$$

Первое из уравнений (11.54) определяет пару параллельных плоскостей ($X = a$, $X = -a$), третье уравнение – пару совпавших плоскостей; второму уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Пример 11.5. Какую поверхность определяет уравнение $6x^2+5y^2+$ $+7z^2-4xy+4xz=18$?

Это уравнение вида (11.32), для которого $a_{11}=6$, $a_{22}=5$, $a_{33}=7$, $a_{12}=-2$, $a_{13}=2$, $a_{23}=0$, $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$, $a_{44}=-18$. Левая часть данного уравнения является квадратичной формой $f(x,y,z)=6x^2+5y^2+7z^2-4xy+$ $+4xz$ трех переменных x, y, z $(x=x_1, y=x_2, z=x_3)$. Составим матрицу A этой квадратичной формы и характеристическое уравнение матрицы A:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Характеристическое уравнение $(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-4(5-\lambda)-$ $-4(7-\lambda)=0$, или $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$ имеет корни $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$, (так как $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=\lambda^3-3\lambda^2-15\lambda^2+45\lambda+54\lambda-162=\lambda^2\times$ $\times(\lambda-3)-15\lambda(\lambda-3)+54(\lambda-3)=(\lambda-3)(\lambda^2-15\lambda+54)$).

Следовательно, квадратичную форму $f(x,y,z)$ можно привести к виду $\varphi(X,Y,Z)=3X^2+6Y^2+9Z^2$. В новых координатах X, Y, Z данное уравнение имеет вид $3X^2+6Y^2+9Z^2=18$, или

$$X^2/6+Y^2/3+Z^2/2=1,$$

оно определяет эллипсоид с полуосями $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$.