III
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 13

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

13.1. Понятие функции. Основные определения

Рассмотрим множество X элементов x и множество Y элементов y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со значениями в множестве Y. Элементы $x \in X$ называются значениями аргумента, а элементы $y \in Y$ – значениями функции. Множество X называют областью определения функции, множество всех значений функции – областью значений этой функции.

Замечание. Функцию, заданную на множестве X со значениями в множестве Y, называют также отображением множества X в множество Y. Если множество Y является множеством значений функции, то рассматриваемую функцию называют отображением множества X на множество Y.

Функцию, заданную на множестве X, называют также оператором, заданным на множестве X, и обозначают символом f.

В случае, когда X и Y – числовые множества, соответствующие функции называются числовыми функциями. Если рассматриваются действительные числа, то функции называют действительными (вещественными) функциями одной действительной (вещественной) переменной.

Употребляются следующие обозначения функции: $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и т. п. Значение, которое функция $y = f(x)$ принимает при $x = a$, обозначается через $f(a)$.

Функция и аргумент могут обозначатся также другими буквами, например $s = f(t)$, $u = f(v)$, $r = r(t)$, $x = x(t)$ и т. д.

К простейшим областям определения функции относятся отрезок, интервал, полуинтервалы или совокупность указанных промежутков. Например, для функции $y = -\sqrt{9 - x^2}$ областью определения является отрезок $[-3, 3]$, а областью ее значений – отрезок $[-3, 0]$; для функции $y = x^3$ область определения и область значений совпадают с интервалом $(-\infty, +\infty)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости, т. е. точек $M(x, f(x))$. Например, графиком функции $y = -\sqrt{16 - x^2}$ является полуокружность радиуса $R = 4$ с центром в начале координат, расположенная ниже оси Ox.

К традиционным основным способам задания функции относятся: аналитический (с помощью одной или нескольких формул); графический (с помощью графика); табличный (с помощью таблицы значений).

Функция заданная формулой

$$y = f(x), \tag{13.1}$$

правая часть которой не содержит y, называется явной функцией.

Функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{13.2}$$

называется функцией, заданной неявно, или неявной функцией.

Отметим, что одно уравнение вида (13.2) может определять несколько функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ определяет две функции $y_1 = f_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = f_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Обратимся к функции (13.1). Каждому $x \in X$ по определенному закону ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$. С другой стороны, каждому $y \in Y$ соответствует одно или несколько значений $x \in X$.

В случае, когда каждому $y \in Y$ по некоторому закону φ соответствует только одно значение $x \in X$, получаем функцию

$$x = \varphi(y), \tag{13.3}$$

заданную на множестве Y со значениями в множестве X. Функцию (13.3) называют обратной функцией по отношению к функции (13.1). Функции (13.1) и (13.3) в этом случае называются взаимно обратными. Для взаимно обратных функций выполняются тождества:

$$\varphi(f(x)) \equiv x, \ x \in X; \ f(\varphi(y)) \equiv y, \ y \in Y.$$

Примеры взаимно обратных функций: $y = 3^x$, $x = \log_3 y$; $y = 2x - 3$, $x = (y + 3)/2$.

Если придерживаться стандартных обозначений (y – функция, x – аргумент), то обратную функцию (13.3) следует писать в виде $y = \varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y = 3^x$, $y = \log_3 x$ взаимно обратные.

Функцию, обратную к функции $y = f(x)$, удобно обозначать символом $x = f^{-1}(y)$.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции f содержит область значений φ, то каждому x из области определения функции φ соответствует y такое, что $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием

$$y = f(\varphi(x)),$$

называется функцией от функции или сложной функцией. (Применяются также и другие названия: композиция функций φ и f, суперпозиция функций φ и f.) Например, если $y=u^3$, $u=\cos x$, то $y=(\cos x)^3=\cos^3 x$.

Рассматривают также функции, являющиеся композициями более чем двух функций. Так, функция $w=\sin\lg(1+x^2)$ представляет собой композицию следующих функций: $w=\sin u$, $u=\lg v$, $v=1+z$, $z=x^2$.

Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любых x и $-x$ из области ее определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Функция $y=\varphi(x)$ называется нечетной, если для любых x и $-x$ из области ее определения выполняется равенство $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. Например, $y=x^2$, $y=\cos x$ – четные функции, $y=x^3$, $y=\sin x$ – нечетные функции.

Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует число $T\neq 0$ такое, что при всех x и $x+T$ из области ее определения выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Число T в этом случае называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Говоря о периоде функции $y=f(x)$ ($f(x)\not\equiv \text{const}$), обычно имеют в виду наименьший положительный период: так, периодом функции $y=\sin x$ является число 2π, периодом функции $y=\operatorname{tg} x$ – число π.

Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если существует такое число $C>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leq C$.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, функции $y=x^a$ ($a=\text{const}$), $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$), $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) называются основными элементарными функциями.

Элементарными функциями называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции $y=\lg\cos x$, $y=x^3+\sin x$, $y=2^{\lg\sin x+\cos x}$ и т. д. являются элементарными.

Термин «функция» впервые появился в 1673 г. в одной из работ Лейбница. Под функциями Лейбниц понимал некоторые отрезки прямых. И. Бернулли дал определение функции как аналитического выражения, состоящего из переменной и постоянных величин (1718), он же применил обозначение φx (без скобок). Обозначение $f(x)$ впервые предложил Эйлер в 1734 г.

13.2. Предел последовательности

Числовой последовательностью (или последовательностью) называется функция

$$x_n=\varphi(n),\ n=1,2,3,\ldots,$$

определенная на множестве натуральных чисел. Каждое значение x_n ($n=1,2,3,\ldots$) называется элементом последовательности, а число n – его номером.

Числовую последовательность с элементом x_n обозначают либо x_n, $n=1,2,3,\ldots$, либо $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, либо (x_n).

Примеры числовых последовательностей: 1) $(c)=(c,c,c,\ldots)$; 2) $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)=\left(1,-\frac{1}{4},\frac{1}{9},-\frac{1}{16},\ldots\right)$; 3) $(\cos\pi n)=(-1,1,-1,1,\ldots)$.

Числовая последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов; среди них могут быть равные (см. примеры 1) и 3)).

Число a называется пределом последовательности (x_n), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Предел последовательности (x_n) обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$; $x_n\to a$ при $n\to\infty$ (читается: x_n стремится к a, когда n стремится к бесконечности).

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, у которой нет предела, называется расходящейся.

Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки a и обозначается $O(a,\varepsilon)$.

Определение предела имеет следующий геометрический смысл: число а является пределом последовательности (x_n), если в любой его ε-окрестности содержатся почти все члены (x_n), или вне этой окрестности находится лишь конечное число членов данной последовательности.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной $\lim\limits_{n\to\infty} c=c$ ($c=\text{const}$), поскольку в данном случае $x_n=c$, $a=c$, $|x_n-a|=0<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Из определения следует также, что последовательность может иметь только один предел.

Последовательность (x_n) называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число A, что $x_n\le A$ (соответственно $x_n\ge A$) для всех номеров n.

Последовательность (x_n), ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.

Очевидно, последовательность (x_n) ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число $C>0$, что $|x_n|\le C$ для всех номеров n.

Например, последовательности $(1/n)$, $(1/n^2)$, $(\cos(\pi n/2))$ ограничены, последовательность (n^2) ограничена снизу, но не ограничена сверху, последовательность $(n\cos\pi n)$ не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

Теорема 13.1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Число a называется верхней гранью последовательности (x_n), если: 1) $x_n\le a$ при всех n; 2) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что $x_N>a-\varepsilon$. Верхняя грань последовательности (x_n) обозначается $\sup(x_n)$ или $\sup x_n$.

Аналогично определяется нижняя грань последовательности (x_n) и обозначается $\inf(x_n)$ или $\inf x_n$.

В качестве примеров отметим, что $\sup\left(\frac{n-1}{n}\right)=1$, $\inf\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$, $\inf(n^2)=1$, $\sup(n^2)=\infty$.

Последовательность (x_n) называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$) при всех n. Монотонно возрастающие или монотонно убывающие последовательности называются просто монотонными.

Теорема 13.2. *Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (монотонно убывающая) последовательность (x_n) имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup(x_n)$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf(x_n)$).*

Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то пределы их суммы, разности, произведения, частного существуют и находятся по формулам

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ (\lim_{n\to\infty}b_n\ne 0). \tag{13.7}$$

Пример 13.1. Последовательность $(8+1/n)$ сходится и имеет предел $a=8$.

Действительно, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется такое натуральное число N, что $|x_n-a|=|(8+1/n)-8|=1/n<\varepsilon$, $1/n<\varepsilon$ для $n>N$; неравенство $(1/n)<\varepsilon$ будет выполнено при всех $n>N$, если $N>1/\varepsilon$, т. е. в качестве N можно взять большее из двух последовательных натуральных чисел, между которыми заключено число $1/\varepsilon$. Например, если $\varepsilon_1=0{,}1$, то $N_1=10$; если $\varepsilon_2=0{,}01$, то $N_2=100$ и т. д.

Замечание. Одновременно показано, что последовательность $(1/n)$ имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \tag{13.8}$$

Пример 13.2. Последовательность $(\cos\pi n)$ является расходящейся.

В самом деле, каково бы ни было число a, вне его ε-окрестности, например при $0<\varepsilon<1$, заведомо лежит бесконечное множество элементов данной последовательности (хотя среди них и много равных между собой); это означает, что a не является ее пределом.

Пример 13.3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+5}{6n^2+4n-9}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на n^2 и применив формулы (13.4) – (13.8), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{6n^2+4n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n+5/n^2}{6+4/n-9/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-3/n+5/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(6+4/n-9/n^2)}=\frac{1}{3}.$$

13.3. Предел функции

Постоянная b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$ (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0<|x-a|<\delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, обозначают:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b;\ f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Рассматривают также односторонние пределы функций: предел слева $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b_1$ (x стремится к a, оставаясь меньше a; $x<a$) и предел справа $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b_2$ (x стремится к a, оставаясь больше a; $x>a$). Если односторонние пределы равны: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$, то предел функции $f(x)$ в точке a существует и равен b: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Если односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в соответствующей точке.

Если c – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a}c=c$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x), \tag{13.9}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\varphi(x))=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}\varphi(x), \tag{13.10}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\ (\lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0). \tag{13.11}$$

Из (13.10) следует, что

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)\ (c=\text{const}), \tag{13.12}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^m = (\lim_{x\to a} f(x))^m, \tag{13.13}$$

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m, \tag{13.14}$$

где m – натуральное число.

Если $\sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}. \tag{13.15}$$

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к $-\infty$ или $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать положительное число N, такое, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x|>N$, выполнялось неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пример 13.4. Найти $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)$.

Применяя формулы (13.9), (13.12), (13.14), получаем

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) = \lim_{x\to 3}(2x^2) - \lim_{x\to 3}(5x) + \lim_{x\to 3} 4 = 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = 7.$$

Пример 13.5. Найти $\lim_{x\to 2}\dfrac{6x^2-9x+7}{3x^2-8x+5}$.

С помощью формулы (13.11) и формул, указанных в примере 13.4, находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-9x+4}{3x^2-8x+6} = \frac{\lim_{x\to 2}(6x^2-9x+4)}{\lim_{x\to 2}(3x^2-8x+6)} = \frac{6\cdot 2^2-9\cdot 2+4}{3\cdot 2^2-8\cdot 2+6} = 5.$$

Пример 13.6. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}$.

При $x=1$ числитель и знаменатель дроби равны нулю, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, предварительно преобразуем данную дробь, разложив многочлены на множители:

$$\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1} = \frac{x^3(x-1)+(x-1)(x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)-2x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)((x+1)(x^2+1)-2x^2)} = \frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1} = \frac{3}{2}.$$

Пример 13.7. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$.

При $x=4$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, предварительно преобразуем дробь:

$$\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{5+x-9}=$$

$$=\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{x-4}=-(x+4)(\sqrt{5+x}+3).$$

Переходя к пределу с использованием формулы (13.15), находим

$$\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=-\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{5+x}+3)=-8\cdot 6=-48.$$

13.4. Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ (или при $x\to\infty$), если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0\ \ (\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0).$$

Например, функция $\alpha(x)=(x-5)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 5$, так как $\lim\limits_{x\to 5}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 5}(x-5)^2=0$; функция $\alpha(x)=1/x$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Принимая во внимание определение предела функции, определение бесконечно малой функции можно сформулировать следующим образом.

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если, задав любое число $\varepsilon>0$, можно указать такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Свойства бесконечно малых выражаются следующими теоремами.

Теорема 13.3. *Если функция $y=y(x)$ имеет предел b при $x\to a$, то*

$$y(x)=b+\alpha(x),\ \ y=b+\alpha, \tag{13.16}$$

где $\alpha=\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$. Обратное также верно: если выполнено равенство (13.16), то $\lim\limits_{x\to a}y(x)=b$.

Теорема 13.4. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$.*

Теорема 13.5. *Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.*

Следствие 1. *Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на постоянную есть бесконечно малая функция.*

13.5. Сравнение бесконечно малых функций

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются величинами одного порядка, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c, \text{ или } \lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{c} \quad (c \neq 0).$$

В этом случае пишут: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$ (читается: $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$ при $x \to a$).

Например, $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = 3x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x)/\beta(x) = 1/3$, $\sin x = O(3x)$ при $x \to 0$.

Если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$ при $x \to a$ равен нулю $(c = 0)$, то величина $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$ (величина $\beta(x)$ – бесконечно малая низшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$). В данном случае применяется обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$ (читается: $\alpha(x)$ есть o малое от $\beta(x)$ при $x \to a$). Например, $x^2 = o(\sin x)$ при $x \to 0$, поскольку

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Функция $\beta(x)$ называется бесконечно малой k-го порядка относительно функции $\alpha(x)$, если $\beta(x)$ и $(\alpha(x))^k$ – бесконечно малые одного порядка, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{(\alpha(x))^k} = c \quad (c \neq 0).$$

Например, если $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^4$, то при $x \to 0$ $\beta(x)$ – бесконечно малая четвертого порядка относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ (но бесконечно малая второго порядка по сравнению с $\gamma(x) = x^2$).

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными (или равносильными) бесконечно малыми при $x \to a$, если предел их отношения равен единице, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ или } \lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Эквивалентность бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается символом ~

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a.$$

Из формул (13.17) и (13.22) (см. п. 13.8) следует, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Теорема 13.6. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.*

Теорема 13.7. *Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Следствие. *Если $\alpha_1(x) \sim \beta(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, то $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \to a$.*

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них (или только одну) можно заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной: если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Замечание. Если отношение $\alpha(x)/\beta(x)$ двух бесконечно малых функций при $x \to a$ не имеет предела и не стремится к бесконечности, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы между собой. Например, несравнимы при $x \to 0$ бесконечно малые функции $\alpha(x) = x \sin(1/x)$, $\beta(x) = x$, так как

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x \sin(1/x)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

и $\sin(1/x)$ не имеет предела при $x \to 0$.

Пример 13.8. Доказать, что функции $\alpha(x) = 6x^2/(1-x)$ и $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{x^2(1-x)} = 6 \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-x} = 6.$$

Поскольку полученный предел отличен от нуля, то данные функции являются бесконечно малыми одного порядка.

Пример 13.9. Доказать, что порядок функции $\alpha(x) = x^5/(2+x^2)$ выше, чем порядок функции $\beta(x) = x^4$ при $x \to 0$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^4(2+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+x^2}=0,$$

то функция $\alpha(x)=x^5/(2+x^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем функция $\beta(x)=x^4$.

Пример 13.10. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

При $x\to 3$ функции $x-3$, $\sin(x-3)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поскольку при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1.$$

Пример 13.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}$.

Так как $(\sin x+x^2-x^4)\sim x$, $(2x-x^3)\sim 2x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

13.6. Бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа N можно найти такое число $\delta>0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>N$.

Бесконечно большая функция не имеет предела при $x\to a$, но иногда условно говорят, что ее предел равен бесконечности, и пишут: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, или $f(x)\to\infty$, при $x\to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$, принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Примером бесконечно большой функции является функция $f(x)=1/x$ при $x\to 0$. В самом деле, при любом $N>0$ неравенство $|1/x|>N$ будет выполнено,

если $|x|=|x-0|<1/N=\delta$. Эта функция принимает положительные значения при $x>0$ ($\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$) и отрицательные – при $x<0$ ($\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$).

Функция $f(x)=1/(x-2)^2$ – бесконечно большая при $x\to 2$. Действительно, при любом $N>0$ неравенство $1/(x-2)^2>N$ будет выполнено, если $(x-2)^2<1/N$ или $|x-2|<1/\sqrt{N}=\delta$. Данная функция принимает только положительные значения.

Если функция $\alpha=\alpha(x)$ стремится к нулю при $x\to a$ (или $x\to\infty$) и не обращается в нуль, то функция $y(x)=1/\alpha(x)$ стремится к бесконечности.

13.7. Основные теоремы о пределах функций

Теорема 13.8. *Функция $y=y(x)$ не может иметь более одного предела при $x\to a$.*

Теорема 13.9. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке, содержащем точку a. Если при $x\to a$ функция $y=f(x)$ имеет положительный (отрицательный) предел, то найдется δ-окрестность точки a такая, что для всех $x\in O(a,\delta)$ функция положительна (отрицательна).*

Эта теорема называется теоремой о сохранении знака функции, имеющей предел.

Теорема 13.10. *Если функции $u(x)$, $v(x)$ определены в некоторой δ-окрестности точки a, для всех $x\in O(a,\delta)$, $x\neq a$ выполняется неравенство $u(x)<v(x)$ и функции имеют пределы при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)\le\lim\limits_{x\to a} v(x)$.*

Замечание. Теорему 13.10 кратко можно сформулировать так: в неравенстве, обе части которого имеют пределы, можно перейти к пределу, присоединив знак равенства. Например, $7+x^2>7-x^2$, $x\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0}(7+x^2)=\lim\limits_{x\to 0}(7-x^2)=7$.

Теорема 13.11. *Пусть три функции $u=u(x)$, $y=y(x)$, $v=v(x)$ определены в некотором промежутке, содержащем точку a.*

Если для любого x из этого промежутка выполняются неравенства $u(x)\le y(x)\le v(x)$ и функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют одинаковые пределы при $x\to a$, то $y=y(x)$ имеет тот же предел при $x\to a$.

13.8. Некоторые важные пределы

Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1. \tag{13.17}$$

Числом e называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{13.18}$$

При нахождении многих пределов применяются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \tag{13.19}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \tag{13.20}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha. \tag{13.21}$$

Частными случаями формул (13.19) и (13.20) являются соответственно формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{13.22}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{13.23}$$

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x))^{\psi(x)} = C$ необходимо иметь в виду следующее:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = B$, то $C = A^B$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то C находится с помощью формул

$$\lim_{x\to+\infty} A^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < A < 1, \\ +\infty, & \text{если } A > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} A^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < A < 1, \\ 0, & \text{если } A > 1; \end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то, положив $\varphi(x) = 1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, получим

$$C = \lim_{x\to a}\{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}.$$

Пример 13.12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x$.

При $x\to\infty$ выражение $(1-(b/x))\to 1$, получаем неопределенность вида 1^∞. Чтобы раскрыть ее, введем новую переменную по формуле $(-b/x) = \alpha$, откуда $x = -b/\alpha$; $\alpha\to 0$, когда $x\to\infty$. Переходя к пределу с использованием формул (13.13) и (13.18), находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-b/\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b}=$$

$$=[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b}=e^{-b};\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x=e^{-b}.$$

В частности, при $b=-2$ получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$, при $b=3$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=e^{-3}$.

Пример 13.13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^x$.

Разделив числитель и знаменатель на $3x$ и воспользовавшись результатом примера 13.12, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-(2/3)/x}{1+(4/3)/x}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2/3}{x}\right)^x:\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4/3}{x}\right)^x=e^{-2/3}:e^{4/3}=e^{-2}.$$

Пример 13.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Преобразуя эту дробь и применяя первую из формул (13.17), находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

Пример 13.15. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$.

Преобразуя данную функцию, вводя новую переменную $x=2y$ и применяя формулу (13.21), находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\lim_{y\to 0}2\frac{(1+2y)^{1/2}-1}{2y}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Пример 13.16. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+5y)}{y}$.

Преобразуя эту функцию, вводя новую переменную $x=5y$ и применяя формулу (13.22), получаем

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+5y)}{y}=\lim_{y\to 0}5\frac{\ln(1+5y)}{5y}=$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 13.17. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y/3}-1}{y}$.

После соответствующих преобразований по формуле (13.23) находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/3}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/3}-1}{3y/3}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

13.9. Непрерывность функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a,b), называется непрерывной в точке $x_0\in(a,b)$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (13.24)$$

(т. е. предел функции равен ее значению при предельном значении аргумента).

Согласно определению предела функции, условие (13.24) равносильно следующему: для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

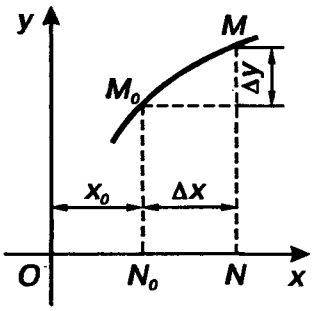

Рис. 13.1

Если $x_0\in(a,b)$ и $x\in(a,b)$, то разность $\Delta x=x-x_0$ называется приращением аргумента в точке x_0, а разность $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, – приращением функции в той же точке (рис. 13.1); Δy – функция Δx.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражается равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \text{или}\ \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0. \qquad (13.25)$$

Итак, функция непрерывна в точке, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Замечание. Поскольку $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$, то формулу (13.24) можно переписать так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Теорема 13.12. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то также непрерывны в этой точке их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$, а также частное $f(x)/\varphi(x)$ при условии, что $\varphi(x)\neq 0$.*

Следствие 1. *Целая рациональная функция* $P_n(x)=a_0+a_1x+$ $+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ *непрерывна при всех x.*

Следствие 2. *Дробная рациональная функция*

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех x, для которых знаменатель не обращается в нуль.

Теорема 13.13. *Если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $f(y)$ *непрерывна в точке* $y_0=\varphi(x_0)$, *то сложная функция* $F(x)= =f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* x_0.

Функция называется непрерывиой на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция определена при $x=a$ и при этом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то говорят, что $f(x)$ в точке a непрерывна справа. Аналогично, если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, то говорят, что в точке b эта функция непрерывна слева.

Функция иазывается непрерывной иа отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке a – иепрерывна справа, в точке b – непрерывна слева).

Отметим, что основные элементарные функции непрерывны в соответствующей области определения.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 13.14. *Функция, непрерывная на отрезке* $[a,b]$, *достигает в нем своего наименьшего значения m и наибольшего значения M, т.е. существуют такие точки* x_1, x_2 *этого отрезка, что* $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл (рис. 13.2).

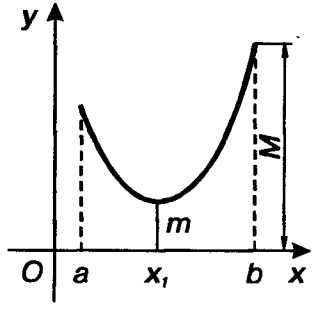

Рис. 13.2

Замечание. Функция, иепрерывная на интервале, этим свойством не обладает. Например, функция $y=6x^2$ на интервале $(0,1)$ не достигает значений $m=0$ и $M=6$, так как эти значения функция принимает в точках $x=0$ и $x=1$, а последние данному интервалу ие принадлежат.

Теорема 13.15. *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и на его концах принимает неравные значения* $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, *то каково бы ни было число C, заключенное между A и B, найдется точка* $c\in[a,b]$ *такая, что* $f(c)=C$.

Геометрический смысл теоремы иллюстрируется на рис. 13.3, *а*, *б*. Всякая прямая $y = C$, где $A < C < B$ (или $A > C > B$), пересекает график функции $y = f(x)$.

Следствие. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.*

Это частный случай теоремы: $AB < 0$, $C = 0$; геометрический смысл: график непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий точки $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$, для которых $f(a)f(b) < 0$, пересекает ось Ox (рис. 13.4, *а*, *б*).

Отметим, что сумма конечного числа функций, непрерывных на некотором отрезке, непрерывна на этом отрезке.

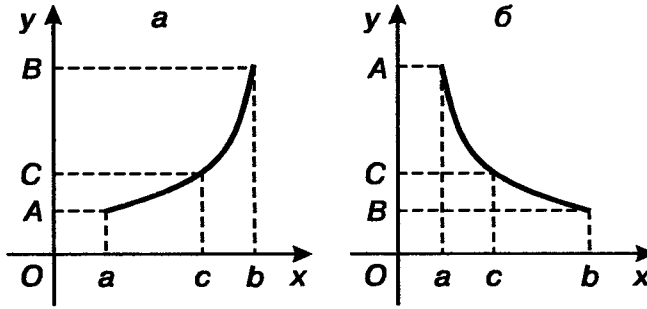

Рис. 13.3

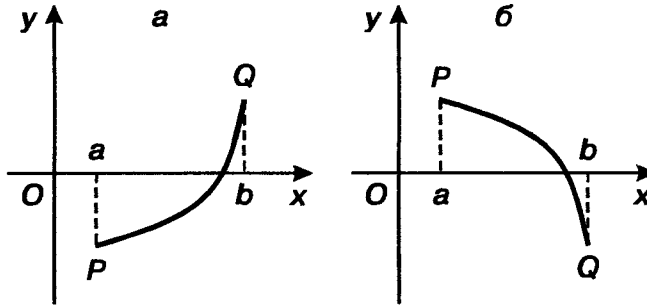

Рис. 13.4

13.10. Точки разрыва функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Значение аргумента x_0 называется точкой разрыва данной функции, если при $x = x_0$ функция определена, но не является непрерывной или не определена при этом значении x.

Если x_0 – точка разрыва $f(x)$ и существуют конечные пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то она называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Если x_0 – точка разрыва и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует или является бесконечным, то x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Пример 13.18. Функция $f(x)=-x/|x|$ в точке $x_0=0$ имеет разрыв первого рода.

Действительно, $f(x)=1$ при $x<0$ и $f(x)=-1$ при $x>0$, в точке $x_0=0$ функция не определена; $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=-1$. Скачок функции в точке $x_0=0$ равен -2 (рис. 13.5).

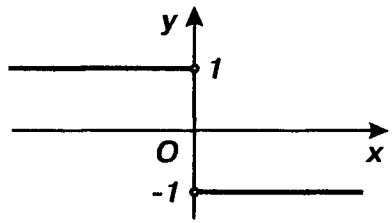

Рис. 13.5

Пример 13.19. Для функции $f(x)=(\sin x)/x$ значение аргумента $x_0=0$ является точкой устранимого разрыва.

В самом деле, при $x_0=0$ данная функция не определена, но имеет равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -0}(\sin x)/x=1,\quad \lim_{x\to +0}(\sin x)/x=1.$$

График функции изображен на рис. 13.6.

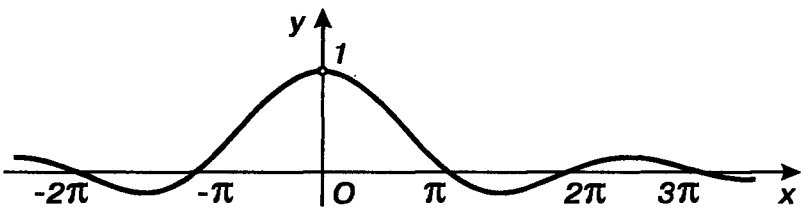

Рис. 13.6

Пример 13.20. Функция $f(x)=1/x$ в точке $x_0=0$ имеет разрыв второго рода, так как

$$\lim_{x\to -0} 1/x=-\infty,\quad \lim_{x\to +0} 1/x=+\infty.$$

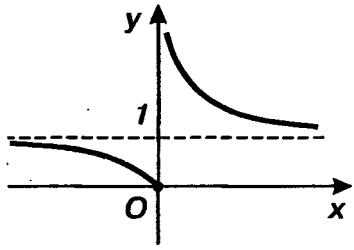

Рис. 13.7

Пример 13.21. Для функции $f(x)=3^{1/x}$ значение $x_0=0$ является точкой разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. Второй односторонний предел конечен: $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=0$ (рис. 13.7).

13.11. Показательная функция. Гиперболические функции

Показательной (экспоненциальной) называется функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Пусть $a=e$ (см. формулу 13.18), в этом случае показательная (экспоненциальная) функция обозначается $y=e^x=\exp x$.

Показательную функцию с другим основанием можно привести к показательной функции с основанием e. Действительно, по определению логарифма $a=e^{\ln a}$, поэтому $a^x=(e^{\ln a})^x=e^{kx}$, где $k=\ln a$.

Гиперболическим синусом называется функция, определяемая формулой

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \tag{13.26}$$

гиперболическим косинусом – функция

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{13.27}$$

Гиперболический тангенс и гиперболический котангенс определяются соответственно формулами

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \tag{13.28}$$

$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}. \tag{13.29}$$

Функции, определяемые формулами (13.26) – (13.29), называются гиперболическими.

Гиперболические функции имеют вполне определенные значения при всех значениях x, кроме функции $y=\operatorname{cth} x$, которая в точке $x=0$ обращается в бесконечность. Отметим, что $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{ch} 0=1$, как и для обычных синуса и косинуса.

Гиперболические функции не обладают важнейшим свойством тригонометрических функций – свойством периодичности. Кроме того, множество значений

каждой гиперболической функции существенно отличается от множества значений соответствующей тригонометрической функции. Функция $y = \operatorname{sh} x$ принимает все действительные значения, т. е. множество ее значений совпадает с бесконечным интервалом $(-\infty, +\infty)$; $y = \operatorname{ch} x$ – значения, не меньше единицы $(1 \le \operatorname{ch} x < +\infty)$; значения функции $y = \operatorname{th} x$ по модулю не превышают единицы $(-1 < \operatorname{th} x < 1)$; значения $y = \operatorname{cth} x$ по модулю больше единицы ($\operatorname{cth} x > 1$ при $x > 0$, $\operatorname{cth} x < -1$ при $x < 0$).

Графики гиперболических функций представлены на рис. 13.8 и 13.9, *а*, *б*. Прямые $y = +1$, $y = -1$ являются асимптотами графиков функций $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$. Кроме того, ось Oy служит асимптотой графика функции $y = \operatorname{cth} x$.

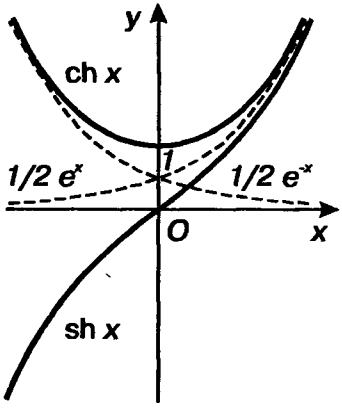

Рис. 13.8

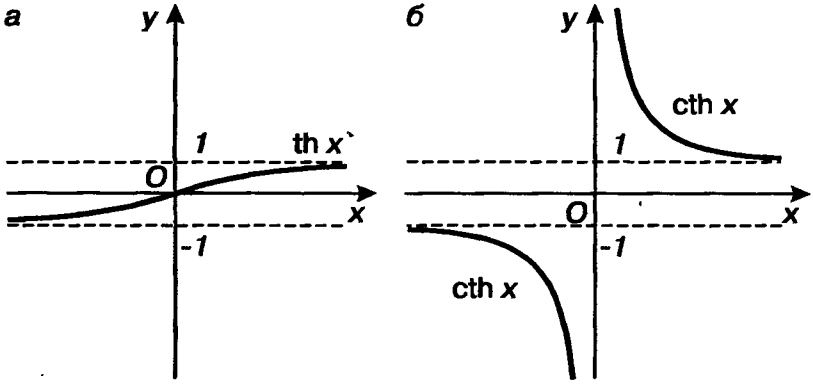

Рис. 13.9