

## ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

### 15.1. Правило Лопиталя – Бернулли

При исследовании функций может появиться необходимость нахождения предела дроби  $f(x)/\varphi(x)$ , числитель и знаменатель которой при  $x \rightarrow a$  стремятся к нулю или к бесконечности. Нахождение таких пределов называют раскрытием неопределенностей соответствующего вида. Основой его является правило Лопиталя – Бернулли, выражаемое следующей теоремой.

**Теорема 15.1.** *Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  дифференцируемы в окрестности точки  $x = a$ , обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения  $f'(x)/\varphi'(x)$  при  $x \rightarrow a$ , тогда существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (15.1)$$

**Замечание 1.** Теорема верна и в том случае, когда функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  не определены в точке  $x = a$ , но  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ .

**Замечание 2.** Теорема верна и в случае  $a = \infty$ , т. е. когда  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ .

**Замечание 3.** Если  $f'(a) = 0$ ,  $\varphi'(a) = 0$ , функции  $f''(x)$ ,  $\varphi''(x)$  дифференцируемы в окрестности точки  $x = a$  и существует предел отношения  $f''(x)/\varphi''(x)$  при  $x \rightarrow a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}. \quad (15.2)$$

Другими словами, правило Лопиталя – Бернулли при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

Правило Лопиталя – Бернулли применимо и при раскрытии неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$ , поскольку ее можно привести к неопределенноти виду  $\frac{0}{0}$ , представив рассматриваемую дробь так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)}.$$

С помощью тождественных преобразований к основному виду  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  можно свести неопределенностии других видов, таких, как  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ .

Неопределенность вида  $0 \cdot \infty$ , т. е. произведение  $f(x)\varphi(x)$ , где  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$ , приводится к виду  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  по формулам

$$f(x)\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}, \quad f(x)\varphi(x) = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)},$$

а затем применяется правило Лопитала – Бернулли.

Аналогично раскрывается неопределенность вида  $\infty - \infty$ , т. е. находится предел  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \varphi(x))$  при условии, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ . С помощью преобразования  $f(x) - \varphi(x) = \left( \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) : \frac{1}{f(x)\varphi(x)}$  эта неопределенность сводится к неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ .

Раскрыть неопределенность вида  $1^\infty$  – значит найти предел  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)}$  при условии, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ .

Раскрыть неопределенности вида  $0^0$ ,  $\infty^0$  – значит найти предел  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)}$  при соответствующем условии: 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ .

Неопределенностей  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  раскрываются способом, в котором используется тождество  $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln f(x)}$ .

При раскрытии этих неопределенностей данное выражение предварительно логарифмируют и находят предел его логарифма.

Правило, выражаемое теоремой 15.1, сформулировано швейцарским математиком И. Бернулли (1667 – 1748) и опубликовано в 1696 г. в первом печатном учебнике анализа бесконечно малых, написанном французским математиком Г. Лопиталем (1661 – 1704).

**Пример 15.1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ .

При  $x = 0$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Чтобы раскрыть ее, применяем правило Лопитала – Бернулли:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1/(1+x)} = 2.$$

**Пример 15.2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{\cos x - \cos 3x}$ .

Для раскрытия этой неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  правило Лопитала – Бернулли необходимо применить дважды:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{\cos x - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 7\sin 7x}{-\sin x + 3\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 49\cos 7x}{-\cos x + 9\cos 3x} = \\ = \frac{-1+49}{-1+9} = 6.$$

**Пример 15.3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

Здесь имеем неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Преобразуем данную разность

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

При  $x = 0$  в правой части этого равенства имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Применяя дважды правило Лопитала – Бернулли, находим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{xe^x + e^x + e^x} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 15.4.** Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ , где  $n$  – натуральное число.

Применяя правило Лопитала – Бернулли  $n$  раз, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = 0.$$

Следовательно, при неограниченном возрастании аргумента степенная функция растет медленнее показательной функции.

**Пример 15.5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ .

При  $x = 0$  получаем неопределенность вида  $0^0$ . Обозначим  $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$  и прологарифмируем это равенство по основанию  $e$ :

$$\ln y = \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \ln x = \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}.$$

В правой части этого равенства при  $x = 0$  имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Применяя дважды правило Лопитала – Бернулли, находим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^x/(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = 1.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^1 = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\ln(e^x - 1)} = e$ .

## 15.2. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Необходимое и достаточное условие постоянства функции  $y = f(x)$  выражается равенством  $y' = 0$ , т. е.

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = c. \quad (15.3)$$

Функция  $y = f(x)$  называется возрастающей в промежутке  $(a, b)$ , если для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2 \in (a, b)$  из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  (рис. 15.1, а).

Функция  $y = f(x)$  называется убывающей в некотором промежутке, если для любых двух значений, принадлежащих этому промежутку, из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$  (рис. 15.1, б).

Достаточное условие возрастания (убывания) функции выражается следующей теоремой.

**Теорема 15.2.** Если в данном промежутке производная функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке; если производная отрицательна, то функция убывает в соответствующем промежутке.

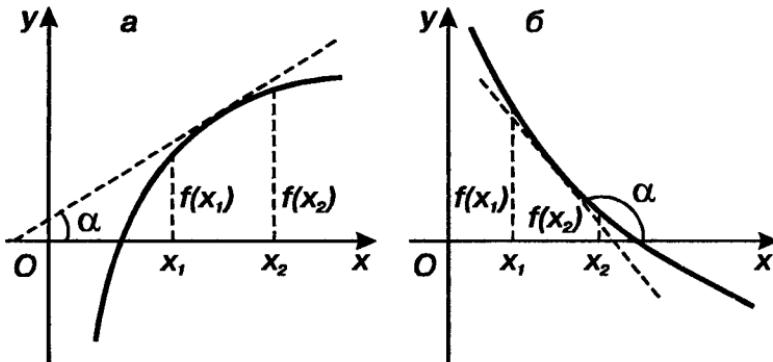


Рис. 15.1

**З а м е ч а н и е .** Теорема имеет простой геометрический смысл. Если в некотором промежутке касательная к графику функции  $y = f(x)$  образует с осью  $Ox$  острый угол  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ), то функция возрастает в этом промежутке (рис. 15.1, а). Если касательная к графику образует с осью  $Ox$  тупой угол  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ), то функция убывает (рис. 15.1, б).

**П р и м е р 15.6.** Найти промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ .

Находим производную функции и разлагаем на множители соответствующий квадратный трехчлен:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$ .

Если  $x < 1$  и  $x > 3$ , то  $f'(x) > 0$ ; функция возрастает в интервалах  $(-\infty, 1)$ ,  $(3, +\infty)$ . Если  $1 < x < 3$ , то  $f'(x) < 0$ ; функция убывает в интервале  $(1, 3)$ .

### 15.3. Экстремум функции

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , областью определения которой является промежуток  $(a, b)$ .

Если можно указать такую  $\delta$ -окрестность точки  $x_1$ , принадлежащую промежутку  $(a, b)$ , что для всех  $x \in O(x_1, \delta)$ ,  $x \neq x_1$ , выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x), \quad (15.4)$$

то  $y_1 = f(x_1)$  называют максимумом функции  $y = f(x)$  (рис. 15.2).

Максимум функции  $y = f(x)$  обозначим через  $\max f(x)$ .

Если можно указать такую  $\delta$ -окрестность точки  $x_2$ , принадлежащую промежутку  $(a, b)$ , что для всех  $x \in O(x_2, \delta)$ ,  $x \neq x_2$ , выполняется неравенство

$$f(x_2) < f(x), \quad (15.5)$$

то  $y_2 = f(x_2)$  называют минимумом функции  $y = f(x)$  (см. рис. 15.2).

Минимум функции  $y = f(x)$  обозначим через  $\min f(x)$ .

Другими словами, максимумом (минимумом) функции  $y = f(x)$  называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых в точках, достаточно близких к данной и отличных от нее.

**З а м е ч а н и е 1.** Максимум функции, определяемый неравенством (15.4), называется строгим максимумом; нестрогий максимум определяется неравенством  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Максимум и минимум функции имеют локальный характер (это наибольшее и наименьшее значения функции в достаточно малой окрест-

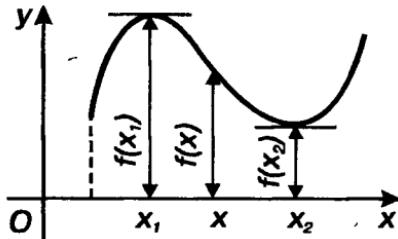


Рис. 15.2

ности соответствующей точки); отдельные минимумы некоторой функции могут оказаться больше максимумов той же функции (рис. 15.3). Вследствие этого максимум (минимум) функции называют локальным максимумом (локальным минимумом) в отличие от абсолютного максимума (минимума) – наибольшего (наименьшего) значения в области определения функции.

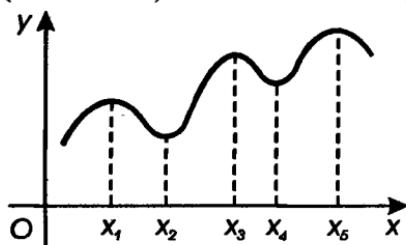


Рис. 15.3

Следует отметить, что в точке экстремума производная равна нулю. Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции в соответствующей точке параллельна оси  $Ox$  (см. рис. 15.2).

**Замечание 3.** Если  $f'(x_0) = 0$ , то отсюда еще не следует, что  $x_0$  – точка экстремума: Например, для функции  $f(x) = x^3$   $f'(x) = 3x^2$ ,  $f'(0) = 0$ , но  $x_0 = 0$  не является точкой экстремума, так как  $f(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $f(x) < 0$  при  $x < 0$  (неравенство (15.4) или (15.5) здесь не выполняется).

**Замечание 4.** Функция может достигать экстремума также в точке, в которой производная не существует. Например, функция  $y = -|x + 4|$  не имеет производной в точке  $x = -4$ , но достигает в ней максимума:  $y = 0$  при  $x = -4$ , а для всякой другой точки  $y < 0$  (рис. 15.4, а). Функция  $y = -(1-x^{2/3})^{1/2}$  не имеет конечной производной в точке  $x = 0$ , поскольку  $y' = (1-x^{2/3})^{1/2} x^{-1/3}$  при  $x = 0$  обращается в бесконечность, но в этой точке функция имеет минимум:  $f(0) = -1$ ,  $f(x) > -1$  при  $x \neq 0$  (рис. 15.4, б).

Говорят, что функция  $y = f(x)$  меняет знак при переходе через точку  $x = x_0$ , если  $f(x_1)f(x_2) < 0$  для любых  $x_1$  и  $x_2$  из некоторой окрестности этой точки, удовлетво-

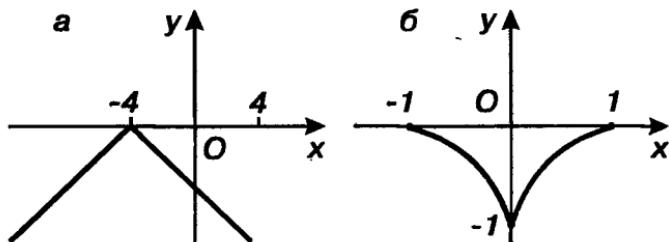


Рис. 15.4

роящих неравенствам  $x_1 < x_0 < x_2$ ; знак меняется с плюса на минус, если  $f(x_1) > 0$ , а  $f(x_2) < 0$ ; знак меняется с минуса на плюс, если  $f(x_1) < 0$ ,  $f(x_2) > 0$ .

Формулируя теоремы 15.4 и 15.5, будем предполагать, что функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Теорема 15.4.** Если при  $x = x_0$  производная функции  $y = f(x)$  равна нулю и меняет знак при переходе через это значение, то  $x_0$  является точкой экстремума, причем: 1)  $x_0$  – точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2)  $x_0$  – точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

Теорема имеет следующий геометрический смысл: если в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$  графика дифференцируемой функции касательная параллельна оси  $Ox$ , в точках слева от  $M_0$  образует тупой угол с осью  $Ox$ , в точках справа – острый, то  $x_0$  – точка минимума (рис. 15.5, а); если в точках слева от  $M_0$  касательная образует с осью  $Ox$  острый угол, а в точках справа – тупой, то  $x_0$  – точка максимума (рис. 15.5, б).

**Замечание.** Теорема верна и в случае, если  $x_0$  – точка непрерывности функции  $f(x)$ , производная в ней не существует и меняет знак при переходе через эту точку.

Достаточное условие экстремума можно выразить также с помощью второй производной.

**Теорема 15.5.** Если в точке  $x = x_0$  первая производная функции  $y = f(x)$  равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то  $x_0$  является точкой экстремума, причем: 1)  $x_0$  – точка минимума, если  $f''(x_0) > 0$ ; 2)  $x_0$  – точка максимума, если  $f''(x_0) < 0$ .

**Теорема 15.6.** Пусть в точке  $x_0$  первые  $n$  производные равны нулю, а  $(n+1)$ -я отлична от нуля и непрерывна в этой точке, тогда: 1) если  $(n+1)$  – четное число, то  $x_0$  – точка экстремума: точка максимума при  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  и точка минимума при  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ; 2) если  $(n+1)$  – нечетное число, то  $x_0$  не является точкой экстремума.

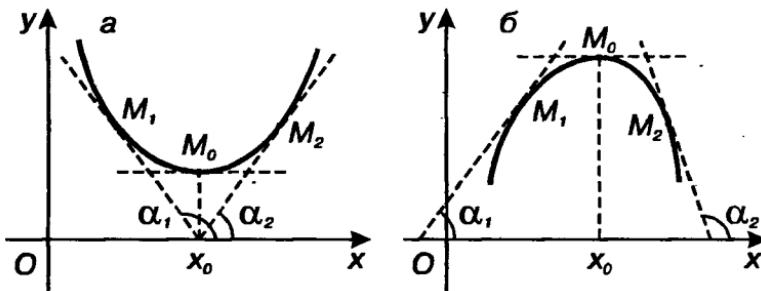


Рис. 15.5

**Пример 15.7.** Найти экстремумы функции  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$ .

Поскольку  $f''(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5)$ , то точками, для которых  $f''(x) = 0$ , являются  $x_1 = -\sqrt{5}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \sqrt{5}$ . Исследуем знак второй производной  $f'''(x) = 12x^2 - 20$  в этих точках:  $f''(-\sqrt{5}) = 12 \cdot 5 - 20 > 0$ ,  $f''(\sqrt{5}) = 12 \cdot 5 - 20 > 0$ ,  $f''(0) = -20 < 0$ .

Следовательно,  $x_1 = -\sqrt{5}$ ,  $x_2 = \sqrt{5}$  – точки минимума,  $x_3 = 0$  – точка максимума;  $\min f(x) = f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 25 - 10 \cdot 5 + 15 = -10$ ,  $\max f(x) = f(0) = 15$ .

**Пример 15.8.** Вычислить значения экстремумов функции  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 9$ .

Первая производная  $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$  обращается в нуль при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$ . Вторая производная  $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$  в этих точках принимает соответственно значения  $f''(0) = 0$ ,  $f''(1) = -10 < 0$ ,  $f''(3) = 90 > 0$ .

Следовательно,  $x_2 = 1$  – точка максимума,  $x_3 = 3$  – точка минимума, причем  $\max f(x) = f(1) = 10$ ,  $\min f(x) = f(3) = -18$ . Чтобы исследовать точку  $x_1 = 0$ , обратимся к третьей производной  $f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$ . Поскольку  $f'''(0) = 30 \neq 0$ ,  $n+1 = 3$ , то  $x_1 = 0$  не является точкой экстремума.

**Пример 15.9.** Найти точки экстремума функции  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$ .

Первая производная  $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$  равна нулю в единственной точке  $x = -1$ . Находим выражения последующих производных и их значения в критической точке  $x = -1$ :  $f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$ ,  $f''(-1) = 0$ ,  $f'''(x) = 24x + 24$ ,  $f'''(-1) = 0$ ,  $f^{IV}(x) = 24$ . Поскольку  $f^{IV}(-1) > 0$  и  $n+1 = 4$  (четное число), то  $x = -1$  – точка минимума, причем  $\min f(x) = f(-1) = 2$ .

## 15.4. Направления выпуклости, точки перегиба

График функции  $y = f(x)$  называется выпуклым вниз (вогнутым вверх) в данном промежутке, если он целиком расположен выше касательной в его произвольной точке (рис. 15.6, а).

График функции  $y = f(x)$  называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке (рис. 15.6, б).

**Теорема 15.7.** Если вторая производная функции  $y = f(x)$  в данном промежутке положительна, то график ее является выпуклым вниз в этом промежутке; если  $f''(x) < 0$ , то график функции является выпуклым вверх в соответствующем промежутке.

Точкой перегиба графика функции  $y = f(x)$  называется такая его точка  $M_0$  (рис. 15.7), в которой выпуклость меняется на вогнутость (по отношению к одному и тому же направлению: вверх или вниз).

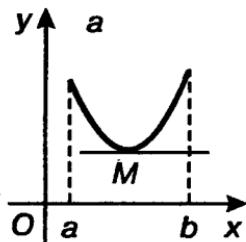


Рис. 15.6

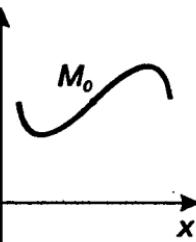
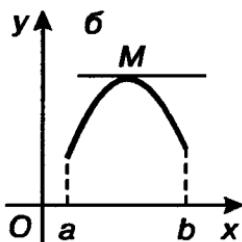


Рис. 15.7

**Теорема 15.8.** Если вторая производная функции  $\dot{y} = f''(x)$  при  $x = x_0$  обращается в нуль и меняет знак при переходе через  $x_0$ , то  $M_0(x_0, f(x_0))$  – точка перегиба графика этой функции.

**Пример 15.10.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ .

Поскольку вторая производная  $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$  обращается в нуль при  $x = 2$  и меняет знак при переходе через это значение, то  $x = 2$  – абсцисса точки перегиба, ордината этой точки  $y = f(2) = 3$ , т. е.  $M(2, 3)$  – точка перегиба.

Так как  $f''(x) < 0$  при  $x < 2$  и  $f''(x) > 0$  при  $x > 2$ , то график функции является выпуклым вверх в интервале  $(-\infty, 2)$  и выпуклым вниз в интервале  $(2, +\infty)$ .

## 15.5. Асимптоты

Асимптотой линии называется прямая, к которой неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удалается от начала координат.

По виду уравнений относительно выбранной декартовой системы координат различают асимптоты вертикальные (параллельные оси  $Oy$ ) и наклонные (пересекающие ось  $Oy$ ).

Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  является бесконечным. Например, прямая  $x = 2$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y = 8/(x - 2)$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{x-2} = +\infty.$$

Предположим, что функция  $y = f(x)$  определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента.

Прямая

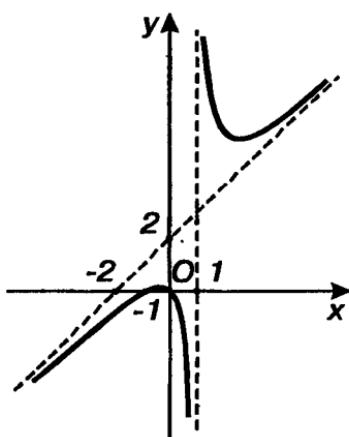


Рис. 15.8

$$y = kx + b$$

(15.6)

называется наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad (15.7)$$

где  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ .

График функции  $y = f(x)$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  наклонную асимптоту (15.6) тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (15.8)$$

П р и м е р 15.11. Найти асимптоты графика функции  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ .

Прямая  $x = 1$  является вертикальной асимптотой (рис. 15.8), так как  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ . Поскольку  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} = x + 2 + \frac{2}{x - 1}$  и  $\lim_{x \rightarrow 1} 2/(x - 1) = 0$ , то график функции имеет и наклонную асимптоту  $y = x + 2$ .

## 15.6. Исследование функций и построение их графиков

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функций и построение их графиков можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Если рассматриваемая функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

Отметим также, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой, на которой лежит биссектриса первого координатного угла.

**Пример 15.12.** Исследовать функцию  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

1. Функция не определена лишь при  $x = -1$  и  $x = 1$ . Следовательно, область определения состоит из трех интервалов:  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ , два из которых являются бесконечными.

2. При стремлении аргумента к концам промежутков области определения соответственно получаем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1.$$

3. Находим производные данной функции:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Поскольку  $f'(x) > 0$  при  $x < -1$  и  $-1 < x < 0$ , то функция возрастает в интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(-1, 0)$ . Так как  $f'(x) < 0$  при  $0 < x < 1$  и  $x > 1$ , то функция убывает в интервалах  $(0, 1)$  и  $(1, +\infty)$ .

Поскольку  $f'(x) = 0$  при  $x_0 = 0$  и  $f''(x_0) = f''(0) < 0$ , то  $x_0 = 0$  – точка максимума.

Других критических точек нет, ибо  $f'(x)$  не определена только при  $x = -1$  и  $x = 1$ , но в этих точках не определена и сама функция.

4. Вычисляем значение максимума функции  $\max f(x) = f(0) = -1$ .

5. Поскольку  $f''(x) > 0$  при  $x < -1$  и  $x > 1$ , то график функции является выпуклым вниз в интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ . Так как  $f''(x) < 0$  при  $-1 < x < 1$ , то график функции является выпуклым вверх в интервале  $(-1, 1)$ .

Точек перегиба график данной функции не имеет, ибо вторая производная в нуль нигде не обращается и не определена в тех же точках, в которых не определена и сама функция.

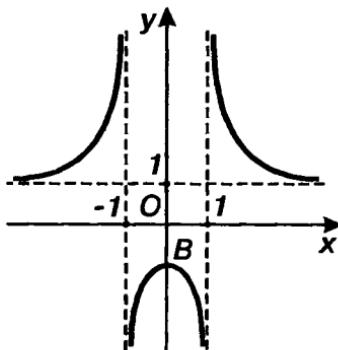


Рис. 15.9

6. График функции не пересекает ось  $Ox$ , так как уравнение  $(x^2 + 1)/(x^2 - 1) = 0$  не имеет действительных корней. Если  $x=0$  (уравнение оси  $Oy$ ), то  $y = -1$ , в точке  $B(0, -1)$  график пересекает ось  $Oy$ .

7. Из п. 2 следует, что график функции имеет две вертикальные асимптоты  $x = -1$  и  $x = 1$  и горизонтальную асимптоту  $y = 1$ . Последнее вытекает также из

$$\text{того, что } \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} = 0.$$

Заметив еще, что  $f(x) > 0$  при  $x < -1$  и  $x > 1$ ,  $f(x) < 0$  при  $-1 < x < 1$ , строим график функции (рис. 15.9).

## 15.7. Задачи на наибольшие и наименьшие значения

Наибольшим значением (абсолютным максимумом) функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называют такое ее значение, которое больше всех других значений, принимаемых функцией на данном отрезке. Чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке, необходимо вычислить значения максимумов на этом отрезке, значения функции на концах отрезка, а также во всех точках отрезка, в которых производная не определена; из полученных чисел выбрать самое большое. Аналогично определяется и разыскивается наименьшее значение функции (абсолютный минимум).

В математике, физике, химии, технических и других науках, а также в повседневной жизни часто встречаются задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых функций.

Общая схема решения таких задач состоит в следующем. Сначала устанавливается зависимость рассматриваемой величины  $y$  от некоторой независимой переменной величины  $x$  (обозначения, разумеется, могут быть другими). Из условия задачи определяется промежуток, в котором может изменяться аргумент функции. Функция  $y = f(x)$  исследуется с помощью теории, рассмотренной в предыдущих главах.

**Пример 15.13.** Найти наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно  $a$ .

Обозначим искомые числа через  $x$  и  $y$ . По условию  $xy = a$ , где  $a > 0$ , поэтому  $y = a/x$ . Сумма этих чисел  $s = x + y$ ,  $s(x) = x + a/x$  является функцией переменной  $x$ ; в соответствии с условием  $x > 0$ .

Найдем производные функции  $s(x)$ :  $s'(x) = 1 - a/x^2$ ,  $s'' = 2a/x^3$ .

Приравнивая нулю первую производную, получаем уравнение  $1 - a/x^2 = 0$ , из которого находим критические точки  $x_1 = -\sqrt{a}$ ,  $x_2 = \sqrt{a}$ ; первое значение не принадлежит области изменения аргумента данной функции.

Поскольку  $s''(\sqrt{a}) > 0$ , то  $x = \sqrt{a}$  — точка минимума, причем  $\min s(x) = s(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$ .

**Пример 15.14.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 12x + 7$  на отрезке  $[0, 3]$ .

Найдем сначала экстремумы данной функции:  $f'(x) = 3x^2 - 12$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f''(x) = 0$ ,  $3x^2 - 12 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ . Точка  $x_1 = -2$  не принадлежит данному отрезку. Так как  $f''(2) > 0$ , то  $x = 2$  — точка минимума, причем  $\min f(x) = f(2) = -9$ . Находим значения функции на концах отрезка:  $f(0) = 7$ ,  $f(3) = -2$ . Сравнивая эти три числа, заключаем, что наибольшее значение данной функции на заданном отрезке равно 7, а наименьшее — 9.

**Пример 15.15.** Прямоугольник вписан в эллипс с осями  $2a$  и  $2b$ . Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Рассмотрим прямоугольник  $ABCD$ , вписанный в данный эллипс (рис. 15.10), с основанием  $2u$  и высотой  $2v$ . Площадь прямоугольника определяется формулой

$$s = 2u \cdot 2v = 4uv, \quad \text{где} \quad v = (b/a) \sqrt{a^2 - u^2}$$

(получено из уравнения эллипса). Следова-

тельно,  $s = (4b/a)u\sqrt{a^2 - u^2}$  — функция переменной  $u$ . Так как  $s' = (4b/a)(a^2 - 2u^2)/\sqrt{a^2 - u^2}$ , то  $s' = 0$  при  $u = a/\sqrt{2}$ . Поскольку  $s' > 0$  при  $u < a/\sqrt{2}$  и  $s' < 0$  при  $u > a/\sqrt{2}$ , то  $u = a/\sqrt{2}$  — точка максимума функции  $s = s(u)$ . Если  $u = a/\sqrt{2}$ , то  $v = (b/a)\sqrt{a^2 - u^2} = b/\sqrt{2}$ . Следовательно, площадь прямоугольника будет наибольшей, когда его стороны равны  $2a/\sqrt{2}$ ,  $2b/\sqrt{2}$  (тогда площадь равна  $2ab$ ).

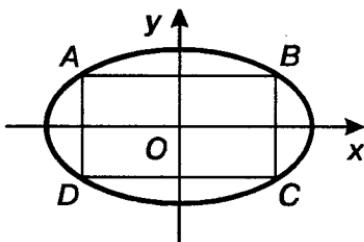


Рис. 15.10

## 15.8. Дифференциал длины дуги кривой

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана дифференцируемая функция  $y = f(x)$ , график которой является дуга  $AB$  (рис. 15.11). Отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $n$  частей точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . Этим точкам будут соответствовать точки  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  дуги  $AB$ . Соединим их отрезками прямых. Ломаную  $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$  называют вписанной в дугу  $AB$ . Периметр этой ломаной обозначим через  $I_n$ , т.е.

$$I_n = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| \quad (M_0 \equiv A, M_n \equiv B).$$

Длиной дуги называется предел периметра вписанной в нее ломаной, когда число звеньев  $M_{k-1}M_k$  неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k|,$$

где  $\lambda$  – длина наибольшего звена.

Будем отсчитывать длину дуги от некоторой ее точки, например, от точки  $A$ ; пусть в точке  $M(x, y)$  длина дуги  $AM$  равна  $l$ , а в точке  $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$  длина дуги  $AM'$  равна  $l + \Delta l$ , где  $\Delta l$  – длина дуги  $MM'$  (рис. 15.12). Очевидно,  $l = l(x)$ , бесконечно малая дуга линии и стягивающая ее хорда эквивалентны:

$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\overset{\circ}{\Delta M'}}{|MM'|} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 1.$$

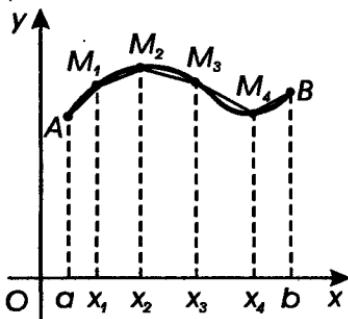


Рис. 15.11

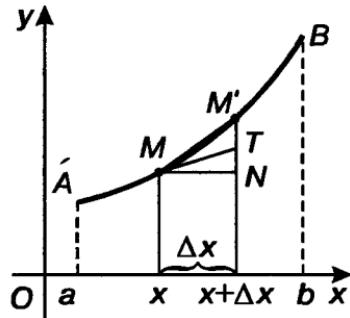


Рис. 15.12

Дифференциал длины дуги плоской кривой, заданной уравнением  $y = f(x)$ , выражается формулой

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Эта формула имеет простой геометрический смысл: она выражает теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника  $MTN$  (рис. 15.12,  $dl = MT$ ,  $\Delta l = \overset{\circ}{MM'}$ ).

Дифференциал дуги пространственной кривой выражается формулой

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

## 15.9. Кривизна плоской кривой

Рассмотрим плоскую линию, определяемую уравнением  $y = f(x)$ . Проведем касательную к этой линии в ее точке  $M_0(x_0, y_0)$ ; обозначим через  $\alpha$  угол, образо-

ванный касательной с осью  $Ox$  (рис. 15.13). Пусть касательная в точке  $M$  образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha + \Delta\alpha$ .

Угол  $\Delta\alpha$  между касательными в указанных точках называют углом смежности. Можно сказать, что при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M$  данной линии касательная к ней повернулась на угол  $\Delta\alpha$ , которому будем приписывать соответствующий знак в зависимости от направления поворота.

Средней кривизной дуги  $\hat{M}_0M$  данной линии называется абсолютное значение отношения угла смежности  $\Delta\alpha$  к длине  $\Delta l$  дуги  $\hat{M}_0M$ :

$$k_{cp} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|.$$

Кривизной линии в данной точке  $M_0$  называется предел средней кривизны дуги  $\hat{M}_0M$  при  $M \rightarrow M_0$ :

$$k = \lim_{M \rightarrow M_0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|, \quad k = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|. \quad (15.9)$$

Отметим, что для прямой  $k = 0$ , а для окружности радиуса  $R$  кривизна  $k = 1/R$ .

Кривизна линии, заданной уравнением  $y = f(x)$ , в точке  $M_0(x_0, y_0)$  вычисляется по формулам

$$k = \frac{|y''(x_0)|}{(1+(y'(x_0))^2)^{3/2}}, \text{ или } k = \frac{|y''_{xx}|}{(1+y_x^2)^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y_x^2}}{(1+y_x^2)^{1/2}}. \quad (15.10)$$

Если линия задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то с учетом (14.20) и (14.22) формула (15.10) принимает вид

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (15.11)$$

Кривизна линии, заданной уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  в полярных координатах, вычисляется по формуле

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (15.12)$$

**Пример 15.16.** Найти кривизну косинусоиды  $y = \cos x$  в точке  $M_0(0, 1)$ .

Поскольку  $y' = -\sin x$ ,  $y'' = -\cos x$ , кривизна косинусоиды в ее произвольной точке определяется формулой

$$k = \frac{|-\cos x|}{(1+\sin^2 x)^{3/2}}.$$

При  $x = 0$  получаем  $k = 1/(1+0)^{3/2} = 1$ .

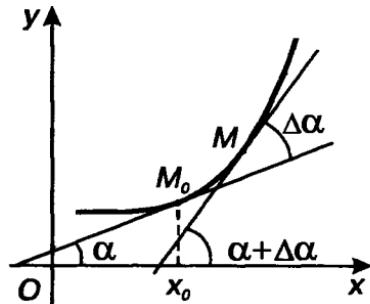


Рис. 15.13

## 15.10. Окружность кривизны. Центр и радиус кривизны. Эволюта и эвольвента

Радиусом кривизны данной линии в данной ее точке называется величина  $R$ , обратная кривизне  $k$  этой линии в рассматриваемой точке:

$$R = \frac{1}{k}, \quad R = \frac{(1+y_x^2)^{3/2}}{|y_{xx}''|}. \quad (15.13)$$

На нормали к кривой в точке  $M$  отложим отрезок  $MC = R$  в сторону вогнутости кривой (рис. 15.14). Точка  $C$  называется центром кривизны данной линии в точке  $M$ . Окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $C$  называется окружностью кривизны этой линии в точке  $M$ . Очевидно, в данной точке  $M$  кривизна кривой и кривизна окружности равны между собой.

Координаты центра кривизны определяются формулами

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}. \quad (15.14)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то формулы (15.14) с учетом равенств (14.20) и (14.22) примут вид

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \quad (15.15)$$

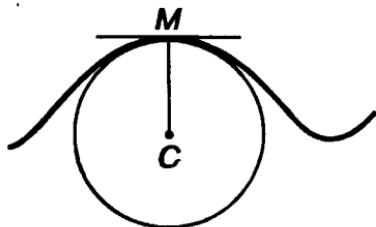


Рис. 15.14

Множество всех центров кривизны данной линии называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте исходная линия называется эвольвентой (или разверткой).

Если линия задана уравнением  $y = f(x)$ , то уравнения (15.14) можно рассматривать как параметрические уравнения ее эволюты (с параметром  $x$ ).

В случае параметрического задания кривой уравнения (15.15) являются параметрическими уравнениями эволюты (входящие в правые части этих уравнений величины зависят от параметра  $t$ ).

## 15.11. Переменная векторная величина. Вектор-функция скалярного аргумента

Рассмотрим точку  $M(x, y, z)$ , движущуюся по некоторой линии  $\gamma$  в пространстве (рис. 15.15). Радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  точки  $M$  будет иметь определенное направление и длину в фиксированный момент времени  $t$ . С течением времени направление и длина вектора  $\mathbf{OM}$  будут изменяться.

Таким образом, здесь имеем дело с переменным вектором **ОМ** или с переменной векторной величиной

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (15.16)$$

зависящей от времени  $t$ . Равенство (15.16) называется векторным уравнением движения точки  $M$ .

Координаты переменного вектора  $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$  являются также переменными величинами (скалярными), зависящими от времени  $t$ :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (15.17)$$

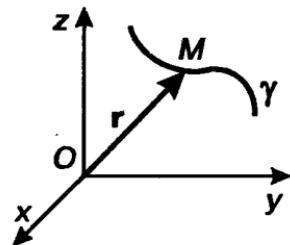


Рис. 15.15

Уравнения (15.17) являются параметрическими уравнениями рассматриваемой линии  $\gamma$ .

Переменная векторная величина  $\mathbf{u}$  называется вектор-функцией (или векторной функцией) скалярного аргумента  $t$ , если каждому значению  $t_0 \in T$ , где  $T$  – некоторое множество действительных чисел, соответствует определенный вектор  $\mathbf{u}(t_0)$ ; в этом случае пишут  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ .

Если  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , то и проекции  $u_x, u_y, u_z$  переменного вектора  $\mathbf{u}$  на оси декартовой системы координат будут (скалярными) функциями аргумента  $t$ :  $u_x = u_x(t)$ ,  $u_y = u_y(t)$ ,  $u_z = u_z(t)$ .

Пример вектор-функции скалярного аргумента дает рассмотренный выше случай радиус-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  точки, движущейся по некоторой линии в пространстве.

Годографом переменной векторной величины называется геометрическое место концов векторов всех ее отдельных значений при условии, что они отложены из одной точки. Годографом постоянного вектора является точка (конец вектора). Годограф вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  представляет собой некоторую линию. Если вектор сохраняет постоянную длину, то его годограф – линия, лежащая на сфере. Годографом радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  движущейся точки  $M$  является траектория этой точки.

Пусть  $\mathbf{a}$  – некоторый вектор (постоянный) и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  – вектор-функция, определенная в некоторой окрестности точки  $t_0$ , кроме, быть может, самой точки  $t_0$ .

Вектор  $\mathbf{a}$  называется пределом вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$  для всех  $t$ , удовлетворяющих неравенству  $|t - t_0| < \delta$ ,  $t \neq t_0$  (рис. 15.16).

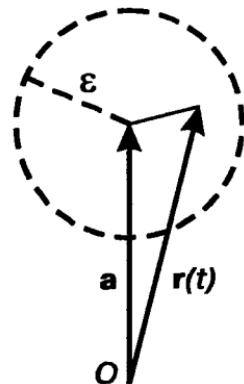


Рис. 15.16

Обозначения предела вектор-функции:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}, \quad (15.18)$$

$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{a}$  при  $t \rightarrow t_0$ .

Очевидно, равенство (15.18) эквивалентно равенству

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0. \quad (15.19)$$

Если  $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$  и  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , то равенство (15.18) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3.$$

Если вектор-функции  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  определены в некоторой окрестности точки  $t_0$  и существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad [\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

скалярная функция  $f(t)$  имеет предел при  $t \rightarrow t_0$ , то существуют также пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \mathbf{r}_1(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Вектор-функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , определенная в точке  $t_0$  и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ .

Из эквивалентности условий (15.18) и (15.19) следует, что вектор-функция  $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$  непрерывна в точке  $t_0$  тогда и только тогда, когда непрерывны в ней функции  $x(t), y(t), z(t)$ .

## 15.12. Дифференцирование вектор-функций

Предел отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, называется производной вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$  в точке  $v$ :

$$\mathbf{u}'(v) = \frac{d\mathbf{u}}{dv} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(v + \Delta v) - \mathbf{u}(v)}{\Delta v}.$$

Необходимым и достаточным условием существования производной вектор-функции

$$\mathbf{u}(v) = \{x(v), y(v), z(v)\} \quad (15.20)$$

в некоторой точке является дифференцируемость функций  $x(v), y(v), z(v)$  в этой точке; причем в данном случае

$$\mathbf{u}'(v) = \{x'(v), y'(v), z'(v)\}.$$

Правила дифференцирования вектор-функции аналогичны правилам обычного дифференциального исчисления. Если  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(v)$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(v)$  – дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента  $v$ ,  $\mathbf{c}$  – постоянный вектор,  $f(v)$  – дифференцируемая скалярная функция,  $k$  – постоянная скалярная величина,  $w$  – скалярный аргумент, связанный с  $v$  формулой  $w = w(v)$ , где  $w(v)$  – дифференцируемая функция, то эти правила дифференцирования выражаются следующими формулами:

$$1) \frac{d\mathbf{c}}{dv} = 0, \quad 2) \frac{d(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_2)}{dv} = \frac{d\mathbf{u}_1}{dv} + \frac{d\mathbf{u}_2}{dv},$$

$$3) \frac{d(f\mathbf{u}_1)}{dv} = f' \frac{d\mathbf{u}_1}{dv} + f \frac{d\mathbf{u}_1}{dv},$$

$$3a) \frac{d(k\mathbf{u}_1)}{dv} = k \frac{d\mathbf{u}_1}{dv}, \quad 3b) \frac{d(\mathbf{c}\mathbf{u}_1)}{dv} = \mathbf{c} \frac{d\mathbf{u}_1}{dv},$$

$$4) \frac{d(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)}{dv} = \mathbf{u}_1 \frac{d\mathbf{u}_2}{dv} + \mathbf{u}_2 \frac{d\mathbf{u}_1}{dv}, \quad 4a) \frac{d(\mathbf{c}\mathbf{u}_1)}{dv} = \mathbf{c} \frac{d\mathbf{u}_1}{dv},$$

$$5) \frac{d[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]}{dv} = \left[ \mathbf{u}_1, \frac{d\mathbf{u}_2}{dv} \right] + \left[ \frac{d\mathbf{u}_1}{dv}, \mathbf{u}_2 \right],$$

$$6) \frac{d\mathbf{u}_1}{dv} = \frac{du_1}{dw} \frac{dw}{dv}.$$

Геометрический смысл производной  $\mathbf{u}'(v) \neq 0$ : производная вектор-функции в данной точке есть вектор, направленный по касательной к годографу данной вектор-функции в соответствующей точке (рис. 15.17).

Отметим, что при другом значении  $v$  получим новое значение  $\mathbf{u}'(v)$ , т. е. производная вектор-функции также является вектор-функцией. Вектор-функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Дифференциалом вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$  называется произведение её производной на дифференциал аргумента  $du = u'(v) dv$ , где  $dv = \Delta v$ ; отсюда  $u' = du/dv$ .

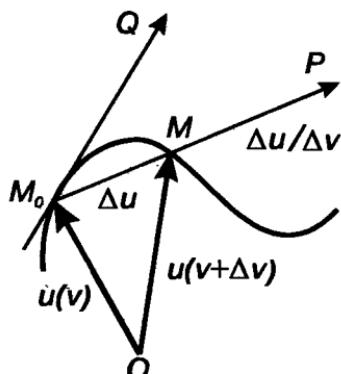


Рис. 15.17

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

векторное уравнение движения точки  $M$  в пространстве. Приращению  $\Delta t$  времени  $t$  соответствует приращение  $\Delta \mathbf{r} = M_0 M$  вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Отношение  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  называется вектором средней скорости, этот вектор направлен по прямой  $M_0 M$ . Предел указанного отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$  называется вектором скорости в момент  $t_0$  (или вектором мгновенной скорости), обозначим его через  $\mathbf{v}$ , т.е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (15.21)$$

Следовательно, вектор мгновенной скорости (или вектор скорости) движущейся точки направлен по касательной к ее траектории. Вектор  $\mathbf{r}'(t)$  характеризует направление и быстроту движения точки.

Если для вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  в качестве параметра  $t$  выбрать длину дуги  $s$ , отсчитываемой от некоторой точки  $M_0$ , то производная вектор-функции будет равна единичному вектору, направленному по касательной. Обозначив этот вектор через  $\vec{\tau}$ , получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad |\vec{\tau}| = 1. \quad (15.22)$$

Второй производной вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$  называется производная от ее производной  $\mathbf{u}'(v)$ :  $\mathbf{u}''(v) = (\mathbf{u}'(v))'$ .

Для функции (15.20) имеем

$$\mathbf{u}''(v) = \{x''(v), y''(v), z''(v)\},$$

если существуют вторые производные функций  $x(v), y(v), z(v)$ .

Аналогично определяются производные более высокого порядка для вектор-функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$ .

### 15.13. Уравнения касательной к пространственной линии. Кривизна пространственной линии

Рассмотрим пространственную линию  $\gamma$  (рис. 15.18), заданную векторно-параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (15.23)$$

или параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

где  $x(t), y(t), z(t)$  – дифференцируемые функции переменной  $t$ . Зафиксируем значение  $t_0$  параметра  $t$ , ему соответствует точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ .

Уравнения касательной к пространственной линии (15.24) в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (15.25)$$

Нормальной плоскостью к пространственной линии в данной ее точке  $M$  называется плоскость, проходящая через точку  $M$  и перпендикулярная касательной к данной кривой в той же точке.

Нормальная плоскость к линии (15.24) в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет уравнение

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (15.26)$$

Если  $s$  – длина дуги, то единичный вектор касательной  $\vec{\tau}$  к линии  $\gamma$  определяется формулой (15.22). Придав аргументу  $t$  приращение  $\Delta t$ , получим точку  $M$  линии  $\gamma$  и соответствующий вектор касательной  $\vec{\tau} + \Delta \vec{\tau}$ . Степень изогнутости кривой можно характеризовать скоростью поворота вектора  $\vec{\tau}$ .

Кривизной  $k$  линии  $\gamma$  в точке  $M_0$  называется модуль производной вектор-функции  $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$  в данной точке, т. е.

$$k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|. \quad (15.27)$$

Это определение равносильно определению кривизны плоской кривой.

Кривизна линии, заданной уравнениями (15.24), выражается формулой

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}'|^3}. \quad (15.28)$$

Кривизну линии можно выразить в координатах. Поскольку  $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ,  $\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ ,  $\mathbf{r}''(t) = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}$ , то

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad (15.29)$$

и

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (15.30)$$

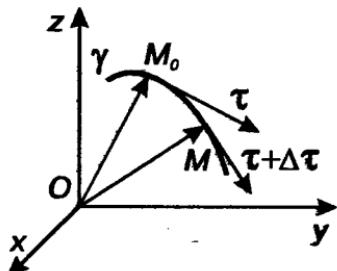


Рис. 15.18

Отметим, что формула (15.11) является частным случаем формулы (15.30).

Пример 15.17. Записать уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии  $\mathbf{r}(t) = 2 \sin^2 t \mathbf{i} + 2 \cos^2 t \mathbf{j} + \sin 2t \mathbf{k}$  в точке, для которой  $t_0 = \pi/4$ .

Перейдем к параметрическим уравнениям данной линии

$$x = 2 \sin^2 t, \quad y = 2 \cos^2 t, \quad z = \sin 2t. \quad (\text{I})$$

Найдем координаты точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :  $x_0 = x(t_0) = 2 \sin^2(\pi/4) = 2(\sqrt{2}/2)^2 = 1$ ,  $y_0 = y(t_0) = 2 \cos^2(\pi/4) = 1$ ,  $z_0 = z(t_0) = \sin 2(\pi/4) = 1$ ;  $M_0(1, 1, 1)$ .

Найдем производные функций (I) и их значения при  $t_0 = \pi/4$ :

$$x' = 2 \cdot 2 \sin t \cos t = 2 \sin 2t, \quad y' = -2 \sin 2t, \quad z' = 2 \cos 2t; \quad (\text{II})$$

$$x'(t_0) = 2 \sin 2(\pi/4) = 2, \quad y'(t_0) = -2 \sin 2(\pi/4) = -2, \quad z'(t_0) = 0.$$

В соответствии с равенствами (15.25) получаем уравнения касательной к данной линии

$$(x-1)/2 = (y-1)/(-2) = (z-1)/0, \text{ или } (x-1)/2 = (y-1)/(-2), \quad z-1=0;$$

Подставляя соответствующие значения в формулу (15.26), находим уравнение нормальной плоскости:  $1(x-1) - 1(y-1) + 0(z-1) = 0$ , или  $x - y = 0$ .

Для вычисления кривизны линии в точке  $M_0(1, 1, 1)$  нужны значения вторых производных функций (I) при  $t_0 = \pi/4$ . Так как  $x'' = 4 \cos 2t$ ,  $y'' = -4 \cos 2t$ ,  $z'' = -4 \sin 2t$ ,  $x''(t_0) = 0$ ,  $y''(t_0) = 0$ ,  $z''(t_0) = -4$ , то по формуле (15.30) находим

$$k = \frac{\sqrt{((-2)(-4)-0 \cdot 0)^2 + (2(-4)-0 \cdot 0)^2 + (2 \cdot 0 - 0(-2))^2}}{(2^2 + (-2)^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{128}}{8^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$