Глава 16

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

16.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов

Функция $F(x)$, определенная в промежутке (a, b), называется первообразной данной функции $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \tag{16.1}$$

Например, функция $F(x) = x^5$ – первообразная функции $f(x) = 5x^4$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, поскольку $(x^5)' = 5x^4$ для всех x; функция $F(x) = \ln x$ – первообразная функции $f(x) = 1/x$ в промежутке $(0, +\infty)$, так как $(\ln x)' = 1/x$; функция $F(x) = \arccos x$ – первообразная функции $f(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$ в интервале $(-1,1)$, ибо $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{16.2}$$

где C – произвольная постоянная, также является ее первообразной.

Выражение (16.2), в котором функция $F(x)$ удовлетворяет условию (16.1), определяет множество всех первообразных данной функции $f(x)$ в заданном промежутке (a, b).

Неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{16.3}$$

где $F'(x) = f(x)$. Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной данной функции называется интегрированием.

Неопределенный интеграл обладает следующими основными свойствами.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{16.4}$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{16.5}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{16.6}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k = \text{const},\ k \neq 0). \tag{16.7}$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{16.8}$$

Таблицу простейших неопределенных интегралов нетрудно получить, воспользовавшись тем, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Будем исходить из формулы (16.6), которую запишем следующим образом: если $dF(x) = f(x)\,dx$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Например, поскольку $d(\sin x) = \cos x dx$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Применяя аналогичное рассуждение к каждой из формул основных дифференциалов (см. п. 14.4), получаем следующие простейшие неопределенные интегралы:

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0),$

5. $\int e^x dx = e^x + C,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,$

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

13. $\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C,$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Отметим, что все указанные формулы справедливы в тех промежутках, в которых определены соответствующие функции. Например, формула 3 справедлива для любого промежутка, не содержащего точку $x = 0$; формула 10 – для интервала $(-1, 1)$ и т. п.

Замечание. В таблице основных интегралов вместо x везде можно записать $u = u(x)$, где $u(x)$ – любая дифференцируемая функция независимой переменной x: $\int du = u + C$, $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ и т. д.

При использовании формул этой таблицы для преобразования подынтегрального выражения к виду $f(x)\,dx = g(u)\,du$ применяются простейшие преобразования дифференциалов: 1) $dx = d(x+b)$, где $b = \text{const}$, 2) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, $a \neq 0$, 3) $dx = (1/a)\,d(ax+b)$, $a \neq 0$, 4) $xdx = (1/2)\,d(x^2+b)$, 5) $\sin x dx = d(-\cos x)$, 6) $\cos x dx = d(\sin x)$, 7) $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$.

Например,

$$\int \sin 5x dx = \int \sin 5x \frac{1}{5} d(5x) = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{\cos 5x}{5} + C,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

К наиболее важным методам интегрирования относятся следующие: 1) непосредственное интегрирование; 2) метод замены переменной; 3) метод интегрирования по частям.

16.2. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на свойстве 4 неопределенного интеграла.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ имеют первообразные в некотором промежутке, то функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$ также имеет первообразную в том же промежутке, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots \int f_n(x)\, dx, \quad (16.9)$$

т.е. неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

Пример 16.1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 5)\, dx.$$

Пользуясь свойствами неопределенного интеграла, формулой (16.9) и первыми двумя формулами простейших неопределенных интегралов, находим

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 5)\, dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 4x dx - \int 5 dx =$$

$$= \int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 4\int x dx - 5\int dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 5x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 2x^2 - 5x + C.$$

Замечание. Постоянное слагаемое не записано при нахождении каждого интеграла алгебраической суммы, а лишь один раз, так как сумма произвольных постоянных величин есть величина постоянная.

Пример 16.2. Найти интеграл $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь первыми тремя формулами неопределенных интегралов, получаем

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x} +$$

$$+ 3\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} = \int dx + 3\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2} dx + \int x^{-3} dx =$$

$$= x + 3\ln|x| + 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = x + 3\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Пример 16.3. Найти неопределенный интеграл $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

С помощью формул 2 и 3 простейших интегралов (при $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\alpha=-2$) получаем

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-1/2}-x^{-2}\right)dx=\ln|x|+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 16.4. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами интегралов 1 и 8, находим

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Пример 16.5. Найти интеграл $\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\sin^2 x}.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами 9, 8, получаем

$$\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 16.6. Найти интеграл $\int\cos^2(x/2)\,dx.$

Поскольку $\cos^2(x/2)=(1/2)(1+\cos x)$, то

$$\int\cos^2(x/2)\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Пример 16.7. Найти интеграл $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}.$

Преобразуя подынтегральную функцию, с помощью формул 1 и 11 простейших интегралов, находим

$$\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

16.3. Метод подстановки

Интегрирование путем введения новой переменной (метод подстановки) основано на формуле

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (16.10)$$

где $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменой t.

Пример 16.8. Найти интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$.

Введем новую переменную t по формуле $x^4=t$, откуда $4x^3dx=dt$, $x^3dx=\frac{1}{4}dt$, $x^8=(x^4)^2=t^2$.

Переходя к новой переменной и используя формулу 10 простейших интегралов, получаем

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\int \frac{\frac{1}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{4}\arcsin t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, находим

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C.$$

Замечание. Результат можно проверить дифференцированием. Так как

$$\left(\frac{1}{4}\arcsin x^4\right)'=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-(x^4)^2}}(x^4)'=\frac{4x^3}{4\sqrt{1-x^8}}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}},$$

то на основании формулы (16.4) заключаем, что пример решен верно.

Пример 16.9. Найти интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

В случае, когда подынтегральное выражение содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, целесообразно применить тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$.

Положим $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos tdt$, поэтому

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a^3\sin^3 t\cdot a\cos tdt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int \frac{a^3\sin^3 t\cdot a\cos tdt}{a\cos t}=$$

$$=a^3\int \sin^3 tdt=a^3\int \sin^2 t\sin tdt=-a^3\int (1-\cos^2 t)\,d(\cos t)=$$

$$=a^3\int (\cos^2 t-1)\,d(\cos t)=\frac{a^3\cos^3 t}{3}-a^3\cos t+C.$$

Заметив, что $\sin t=x/a$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2/a^2}=\sqrt{(a^2-x^2)}/a$, получим

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{(\sqrt{a^2-x^2})^3}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 16.10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$.

Применим так называемую подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+\alpha}=t-x$, где t –новая переменная. Переписав это равенство в виде $t=x+\sqrt{x^2+\alpha}$ и взяв дифференциалы от его обеих частей, получим

$$dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+\alpha}+x}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{dt}{t},$$

откуда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$

Итак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C. \qquad (16.11)$$

16.4. Метод интегрирования по частям

Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(uv)=udv+vdu$ получается формула интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (16.12)$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет собой произведение алгебраической и трансцендентной функций. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к одной из формул простейших интегралов формула (16.12) применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Пример 16.11. Найти интеграл $\int x\cdot 3^x dx$.

Полагаем $x=u$, $3^x dx=dv$, откуда $dx=du$, $v=3^x/\ln 3$ (по формуле 4 простейших интегралов). Подставляя эти выражения в формулу (16.12), получаем

$$\int x\cdot 3^x dx=x\frac{3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx=\frac{x3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C.$$

З а м е ч а н и е. Результат можно проверить дифференцированием:

$$\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C\right)'=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x\cdot 3^x(\ln 3)}{(\ln 3)}-\frac{3^x\ln 3}{(\ln 3)^2}=x\cdot 3^x.$$

П р и м е р 16.12. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Полагая $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, находим $du=dx/(1+x^2)$, $v=x$.

По формуле (16.12) получаем

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

П р и м е р 16.13. Найти интеграл $\int x^2\sin x dx$.

Полагая $u=x^2$, $dv=\sin x dx=d(-\cos x)$, получаем $du=2xdx$, $v=-\cos x$.

Следовательно,

$$\int x^2\sin x dx = x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)2xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx. \qquad \text{(I)}$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям. Его можно найти и не вводя явно функции u и v:

$$\int x\cos x dx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int\sin x dx=x\sin x+\cos x+C_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (I), находим

$$\int x^2\sin x dx=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C_1)=$$

$$=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C\ \ (C=2C_1).$$

П р и м е р 16.14. Найти интеграл $\int(\arccos x)^2 dx$.

Полагая $u=(\arccos x)^2$, $dx=dv$, получаем $v=x$, $du=$ $=-2\arccos x dx/\sqrt{1-x^2}$. По формуле (16.12) имеем

$$\int(\arccos x)^2 dx=x(\arccos x)^2+2\int x\arccos x dx/\sqrt{1-x^2}.$$

Этот интеграл также находим методом интегрирования по частям:

$$u=\arccos x,\ dv=xdx/\sqrt{1-x^2},\ du=-dx/\sqrt{1-x^2},\ v=-\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\arccos x-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arccos x-x+C_1.$$

Следовательно,

$$\int (\arccos x)^2 dx = x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C.$$

Пример 16.15. Найти интеграл $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$.

Полагая $u = e^{\alpha x}$, $dv = \cos\beta x dx$, находим $du = \alpha e^{\alpha x} dx$, $v = (1/\beta)\sin\beta x$; следовательно,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}\sin\beta x - \int \frac{1}{\beta}\sin\beta x \cdot \alpha e^{\alpha x} dx,$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx. \qquad \text{(I)}$$

Интеграл в правой части равенства (I) также находим методом интегрирования по частям:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \int e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}d(-\cos\beta x) = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \int \frac{1}{\beta}\cos\beta x \cdot \alpha e^{\alpha x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx. \qquad \text{(II)}$$

Подставив выражение (II) в равенство (I), получим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Перенося интеграл в левую часть, получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

из которого находим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C.$$

Пример 16.16. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx$.

Положим $u = \sqrt{x^2+\alpha}$, $dx = dv$, отсюда $\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = du$, $v = x$. По формуле (16.12) получаем

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Преобразуем интеграл в правой части

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{(x^2+\alpha)-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\, dx = \int \frac{(x^2+\alpha)}{\sqrt{x^2+\alpha}}\, dx - \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx - \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}, \quad \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \right).$$

Так как последний интеграл определяется формулой (16.11), то

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \ln\left| x + \sqrt{x^2+\alpha} \right|\right) + C. \qquad (16.13)$$

Пример 16.17. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Поскольку

$$\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$$

то

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

откуда

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \qquad (16.14)$$

Замечание. Этот интеграл можно найти с помощью подстановки $x = a \sin t$.

16.5. Интегрирование рациональных дробей с квадратным трехчленом в знаменателе

Интеграл вида $I_1 = \int dx/(px^2+qx+r)$ путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле $px^2+qx+r = p((x+k)^2 \pm a^2)$ сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \tag{16.15}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C, \tag{16.16}$$

где $u = x+k$.

Интеграл

$$I_2 = \int \frac{mx+n}{px^2+gx+r}\,dx \tag{16.17}$$

сводится к интегралу (16.15) или (16.16) и интегралу

$$\int \frac{udu}{u^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\alpha\right|+C. \tag{16.18}$$

При нахождении неопределенного интеграла от рациональной функции с квадратным трехчленом в знаменателе, т. е.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{P_2(x)} = \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{ax^2+bx+c},$$

сначала производят деление; в результате получают $R(x)=Q_m(x)+(kx+l)/(ax^2+bx+c)$, где $Q_m(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P_n(x)$.

Первообразная от многочлена $Q_m(x)$ находится непосредственно, а от остатка $(kx+l)/(ax^2+bx+c)$ – как интеграл вида (16.17).

Пример 16.18. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x-12}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (16.16) для случая, когда $u = x+2$, $a = 4$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-12} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)-4-12} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-16} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-4^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{(x+2)-4}{(x+2)+4}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+C.$$

Пример 16.19. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+34}$.

Выделяя полный квадрат и применяя формулу (16.15) для случая, когда $u=x-3$, $a=5$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+34}=\int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9+34}=\int \frac{dx}{(x-3)^2+25}=$$

$$=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+5^2}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{5}\right)+C.$$

Пример 16.20. Найти $\int \frac{(x+8)\,dx}{x^2+4x+20}$.

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{(x+8)}{x^2+4x+20}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+16}{x^2+4x+20}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)+12}{x^2+4x+20}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+20}+6\int \frac{dx}{x^2+4x+20}=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+20)'\,dx}{x^2+4x+20}+$$

$$+6\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+20)+6\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+20)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C.$$

Пример 16.21. Найти $\int \frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}dx$.

Так как $\frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}=x^2+5x-4+\frac{2x+7}{x^2+1}$, то

$$\int \frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x+\ln(x^2+1)+7\operatorname{arctg}x+C.$$

16.6. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим неопределенные интегралы вида $\int R(x)\,dx$, где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, т. е.

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}\quad (n<m).$$

Нахождение указанных интегралов основано на разложении рациональной

дроби в сумму элементарных дробей, т. е. дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где α, β – натуральные числа; a, p, q, A, B, C – действительные числа; $p^2/4-q<0$ (корни трехчлена являются комплексными).

Это разложение определяется теоремой 8.5 (см. п. 8.7).

Пример 16.22. Найти $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}dx.$

Так как $\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-x+1}$ (см. пример 8.18), то

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}dx=3\int \frac{d(x+1)}{x+1}+2\int \frac{(x^2-x+1)'\,dx}{x^2-x+1}=$$

$$=3\ln|x+1|+2\ln\left|x^2-x+1\right|+C.$$

Пример 16.23. Найти $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}dx.$

Поскольку

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(см. пример 8.19), то

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}dx=\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{2}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1}+\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|(x+2)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

Пример 16.24. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}.$

Разлагая знаменатель на множители, получаем $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-$ $-1=x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^4+2x^2+1)=(x-1)(x^2+1)^2$. В данном случае разложение в сумму элементарных дробей должно иметь вид

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

откуда

$$1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1).$$

Полагая в этом тождестве $x=1$, находим $1=A\cdot 4$, т. е. $A=1/4$. Придавая x соответственно значения $x=0$, $x=-1$, $x=i=\sqrt{-1}$, получаем уравнения

$1=A-C-E$; $1=4A+4B-4C+2D-2E$; $1=(Di+E)(i-1)$, или $1=$ $=-D-Di+Ei-E$, т. е. $1=-D-E+(E-D)i$, откуда $1=-D-E$, $E-D=0$.

Решив полученные уравнения, найдем $B=-1/4$, $C=-1/4$, $D=-1/2$, $E=-1/2$.

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+1}=\int\left(\frac{1}{4(x-1)}-\frac{x+1}{4(x^2+1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4\cdot 2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2}+C=\frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1-x}{4(x^2+1)}+C.$$

Замечание. Интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ найден с помощью подстановки $x=\operatorname{tg}t$. Так как $dx=dt/\cos^2 t$, то

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{dt/\cos^2 t}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$

$$\left(\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t=2\operatorname{tg}t\cos^2 t=2x\frac{1}{1+x^2}\right).$$

16.7. Интегрирование простейших иррациональных функций

Неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$ выделением полного квадрата в подкоренном выражении и введением новой переменной $u=x+b$ в зависимости от знака A приводится к одному из интегралов:

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C, \tag{16.19}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}} = \ln\left| u+\sqrt{u^2+\alpha} \right| + C. \qquad (16.20)$$

Неопределенный интеграл $\int \sqrt{Ax^2+Bx+C}dx$ в зависимости от знака A приводится к одному из интегралов:

$$\int \sqrt{u^2+\alpha}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left| u+\sqrt{u^2+\alpha} \right| + C, \qquad (16.21)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C \qquad (16.22)$$

(см. формулы (16.13) и (16.14)).

Неопределенный интеграл $\int \frac{ax+b}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$ приводится к интегралам вида

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln\left| f(x) \right| + C, \qquad (16.23)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int (f(x))^{-1/2}df(x) = \frac{(f(x))^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{f(x)} + C. \qquad (16.24)$$

Интеграл вида

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right)dx, \qquad (16.25)$$

где R – рациональная функция и $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ – целые числа, с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \qquad (16.26)$$

где n – наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$, приводится к интегралу от рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx, \qquad (16.27)$$

где m, n, p – рациональные числа; a, b – постоянные, отличные от нуля, сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) когда p – целое число, – разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона при $p>0$; подстановкой $x=t^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n;

2) когда $(m+1)/n$ – целое число, – подстановкой $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) когда $(m+1)/n+p$ – целое число, – подстановкой $ax^{-n}+b=t^s$.

Пример 16.25. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

Так как $3x^2+6x+4=3(x^2+2x+1)-3+4=3(x+1)^2+1=3((x+1)^2+1/3)$, то, положив $x+1=u$, по формуле (16.20) получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1/3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1/3}\right|+C.$$

Пример 16.26. Найти $\int\sqrt{x^2+6x+13}dx$.

Поскольку $x^2+6x+13=(x^2+6x+9)+4=(x+3)^2+4$, то, полагая $u= =x+3$, по формуле (16.21) находим

$$\int\sqrt{x^2+6x+13}dx=\frac{x+3}{2}\sqrt{(x+3)^2+4}+\frac{4}{2}\ln\left|(x+3)+\sqrt{(x+3)^2+4}\right|+C=$$

$$=\frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x+13}+2\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C.$$

Пример 16.27. Найти $\int\frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx$.

Поскольку $(5+8x-4x^2)'=8-8x=-8(x-1)$, $9-4x=-4x+4+5=-4(x-1)+5$, $5+8x-4x^2=-4((x^2-2x+1)-1)+5=-4(x-1)^2+9=4\times\ \times(9/4-(x-1)^2)$, то на основании формул (16.19) и (16.24) получаем

$$\int\frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx=\int\frac{-4(x-1)+5}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx=\int\frac{-4(x-1)dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}+$$

$$+\int\frac{5dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-8(x-1)dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}+5\int\frac{d(x-1)}{2\sqrt{9/4-(x-1)^2}}=$$

$$=\sqrt{5+8x-4x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2(x-1)}{3}+C.$$

Пример 16.28. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

Перейдем к новой переменной t по формуле $x-1=1/t$, откуда $dx= =-dt/t^2$, $x^2-2=(1+2t-t^2)/t^2$.

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, находим

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\arcsin\frac{\sqrt{2}(x-2)}{2(x-1)}+C.$$

Пример 16.29. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

Это интеграл вида (16.25), причем $a=1$, $b=3$, $c=0$, $d=1$, $p_1/q_1= =1/2$, $p_2/q_2=2/3$, $n=6$. Подстановка (16.26) принимает вид $x+3=t^6$. Отсюда следует, что $x=t^6-3$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{(x+3)}=(x+3)^{1/2}=(t^6)^{1/2}=t^3$, $\sqrt[3]{(x+3)^2}=t^4$, $t=(x+3)^{1/6}$, $t^2=(x+3)^{1/3}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^4}=6\int \frac{t^5dt}{t^3(1+t)}=6\int \frac{t^2dt}{1+t}=$$

$$=6\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}dt=6\int (t-1)\,dt+6\int \frac{d\,(1+t)}{1+t}=$$

$$=6\frac{t^2}{2}-6t+6\ln|1+t|+C=3\,(x+3)^{1/3}-6\,(x+3)^{1/6}+6\ln\left|1+(x+3)^{1/6}\right|+C.$$

Пример 16.30. Найти $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Переписав интеграл в виде $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx$ и сравнив с интегралом (16.27), заключаем, что $m=-2/3$, $n=1/3$, $p=1/2$. Так как $(m+1)/n= =(-2/3+1)/(1/3)=1$ есть целое число, то имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Подстановка $a+bx^n=t^s$ в данном случае примет вид $(1+x^{1/3})=t^2$, откуда $x^{1/3}=t^2-1$, $(1/3)\,x^{-2/3}dx=2tdt$, $x^{-2/3}dx= =6tdt$. Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx=\int (1+x^{1/3})^{1/2}x^{-2/3}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=$$

$$=6\frac{t^3}{3}+C=2\,(1+x^{1/3})^{3/2}+C.$$

16.8. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Неопределенные интегралы вида

$$\int \sin ax\sin bxdx,\quad \int \cos ax\cos bxdx,\quad \int \sin ax\cos bxdx \qquad (16.28)$$

с помощью тригонометрических формул

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

приводятся к интегралам

$$\int\cos kx dx=\frac{\sin kx}{k}+C;\ \int\sin kx dx=-\frac{\cos kx}{k}+C.$$

Неопределенные интегралы вида $I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x dx$, где m и n – натуральные числа, находятся с помощью тригонометрических формул $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$, $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$, $\sin x\cos x=(\sin 2x)/2$, если m и n четные.

Если хотя бы одно из чисел m и n – нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель и вводится новая переменная. В частности, если $n=2k+1$, то

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^{2k+1}x dx=\int\sin^m x\cos^{2k}x\cos x dx=$$

$$=\int\sin^m x(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)=\int u^m(1-u^2)^k du.$$

Последний интеграл находится непосредственно (как интеграл от алгебраического многочлена).

Неопределенный интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, путем введения новой переменной по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \tag{16.29}$$

приводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция переменной t.

Пример 16.31. Найти интеграл $\int\sin 14x\sin 6x dx$.

Это первый из интегралов типа (16.28), в данном случае $a=14$, $b=6$.

Применяя первую из приведенных выше тригонометрических формул, преоб-

разуем подынтегральную функцию и интегрируем:

$$\int \sin 14x \sin 6x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 20x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 8x dx - \frac{1}{2}\int \cos 20x dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{40}\sin 20x + C.$$

Пример 16.32. Найти интеграл $\int \cos 10x \cos 7x dx$.

Преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$\int \cos 10x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos 17x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 3x dx + \frac{1}{2}\int \cos 17x dx = \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 17x}{34} + C.$$

Пример 16.33. Найти $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$.

Поскольку одна из степеней является нечетной ($n = 5$), то интеграл можно найти следующим образом:

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^6 x\,(1 - \sin^2 x)^2\, d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^6 x\,(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\, d(\sin x) = \int (\sin^6 x - 2\sin^8 x + \sin^{10} x)\, d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Пример 16.34. Найти $\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x} dx$.

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x} dx = \int \frac{8 - (3 + \sin x - 3\cos x)}{3 + \sin x - 3\cos x} dx =$$

$$= 8\int \frac{dx}{3 + \sin x - 3\cos x} - \int dx.$$

Чтобы найти первый интеграл, применим подстановку (16.29):

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x - 3\cos x} = \int \frac{2/(1+t^2)}{3 + 2t/(1+t^2) + 3(t^2-1)/(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{3t^2 + t} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t+1}\right) dt = \ln|t| - \ln|3t+1| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}\right| + C_1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x} dx = 8\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}\right| - x + C.$$