Глава 17

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

17.1. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства

Понятие определенного интеграла. Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ разобьем на n элементарных отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$, длины которых обозначим через Δx_k, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n,\ x_0 = a,\ x_n = b)$. В каждом из элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольно одну точку ξ_k, значение функции в этой точке $f(\xi_k)$ умножим на длину отрезка Δx_k, получим произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$. Составим сумму всех таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{17.1}$$

Сумма (17.1) называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Число S называется пределом интегральной суммы (17.1), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|S_n - S| < \varepsilon$ независимо от выбора точек ξ_k на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется конечный предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю. Определенный интеграл обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: определенный интеграл от a до b); $f(x)$ называется подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a – нижним, b – верхним пределами интегрирования.

Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{17.2}$$

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \cdots = \int_a^b f(u)\,du. \qquad (17.3)$$

Функция, для которой существует предел суммы (17.1), называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Очевидно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она и ограничена на этом отрезке. Обратное утверждение не верно: существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми. К ним относится функция Дирихле, равная единице в рациональных точках и нулю – в иррациональных. На любом отрезке $[a, b]$ эта функция ограничена, но не является интегрируемой на нем.

Соответственно по определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad (17.4)$$

где $f(x)$ – любая функция;

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \qquad (17.5)$$

где $f(x)$ – функция, интегрируемая на отрезке $[b, a]$ $(b < a)$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a, b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла. Если $a < b$, $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = S,$$

т.е. определенный интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$, $x = b$, снизу – отрезком оси Ox (рис. 17.1).

Если $a < b$ и $f(x) \leq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -S,$$

т. е. определенный интеграл от функции, принимающей неположительные значения, равен площади соответствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус (рис. 17.2).

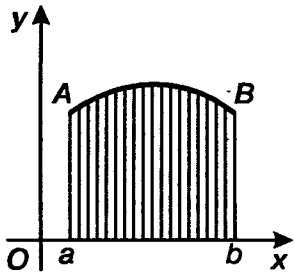

Рис. 17.1

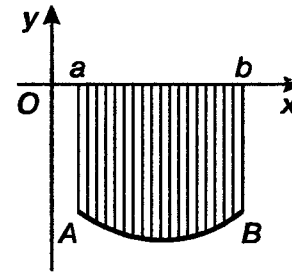

Рис. 17.2

Если $a < b$ и $f(x)$ меняют знак на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций (рис. 17.3):

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

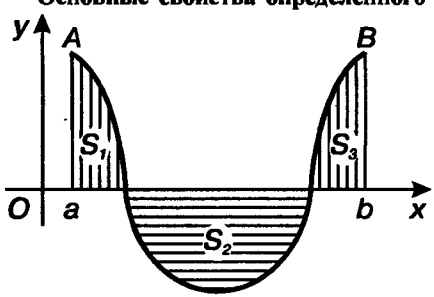

Рис. 17.3

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема на двух отрезках, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при любом расположении точек a, b, c.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $k f(x)$, где $k = \text{const}$, также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма и разность также интегрируемы на этом отрезке, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, и $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

5. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, и $f(x)\leq\varphi(x)$ для всех $x\in[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

17.2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a, b]$. Если $x\in[a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема также на любом отрезке $[a, x]$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a, b]$, тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (17.6)$$

(Переменную интегрирования обозначили буквой t, переменный верхний предел – буквой x).

Теорема 17.1. *Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция* (17.6) *непрерывна на этом отрезке.*

Теорема 17.2. *Если подынтегральная функция непрерывна, то производная определенного интеграла с переменным верхним пределом существует и равна значению подынтегральной функции для этого предела, т.е.*

$$\Phi'(x)=f(x), \text{ или } \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то при любом x*

$$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'_x = -f(x), \text{ или } \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Следствие 2. *Определенный интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.*

Другими словами, для любой непрерывной функции существует первообразная.

Замечание. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования используется при определении многих функций. К таким функциям относятся, например:

1) $\mathrm{Si}(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (интегральный синус);

2) $\mathrm{Ci}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (интегральный косинус);

3) $\mathrm{li}(x)=\int\limits_{-0}^x \frac{dt}{\ln t}$ (интегральный логарифм);

4) $\mathrm{Ei}(x)=\int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt$ (интегральная показательная функция);

5) $S(x)=\int\limits_0^x \sin t^2 dt,\ C(x)=\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ (интегралы Френеля);

6) $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ (интеграл вероятностей).

Эти функции не являются элементарными; первообразные указанных подынтегральных функций не выражаются через элементарные функции.

Все приведенные функции хорошо изучены, для них составлены таблицы значений, эти функции находят широкое применение.

Связь между определенными и неопределенными интегралами выражает следующая теорема Ньютона – Лейбница, называемая основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема 17.3. *Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной для верхнего и нижнего предела интегрирования:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a), \tag{17.7}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Формула (17.7) называется формулой Ньютона – Лейбница; ее можно переписать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b,\ F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

левая часть второй формулы читается так: «двойная подстановка от a до b для функции $F(x)$».

Пример 17.1. Вычислить интеграл $\int\limits_2^4 (32+28x-9x^2)\,dx$.

Принимая во внимание свойства определенного интеграла, получаем

$$\int\limits_2^4 (32+28x-9x^2)\,dx = \int\limits_2^4 32dx + \int\limits_2^4 28xdx - \int\limits_2^4 9x^2dx =$$

$$= 32\int\limits_2^4 dx + 28\int\limits_2^4 xdx - 9\int\limits_2^4 x^2dx = 32x\Big|_2^4 +$$

$$+28\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4 - 9\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^4 = 32(4-2)+14(4^2-2^2)-3(4^3-2^3)=64.$$

Пример 17.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi$.

Переменная интегрирования обозначена буквой φ. Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi d\,(2\varphi) + \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{4}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi.$$

17.3. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема 17.4. *Если выполнены условия: 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) отрезок $[a, b]$ является множеством значений функции $x=\varphi(t)$, определенной на отрезке $\alpha \le t \le \beta$ и имеющей на нем непрерывную производную; 3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (17.8)$$

Теорема 17.5. *Если функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (17.9)$$

Пример 17.3. Вычислить интеграл $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $t = \sqrt{2-x}$, из которой получим $t^2 = 2-x$, $x = 2-t^2$, $dx = -2tdt$.

Вычислим новые пределы интегрирования с помощью формулы $t = \sqrt{2-x}$. Поскольку при $x = 1$ $t = \sqrt{2-1} = 1$, то $\alpha = 1$; далее, при $x = 2$ $t = 0$, поэтому $\beta = 0$.

Формула (17.8) принимает вид

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_1^0 (2-t^2)\,t\,(-2tdt) = \int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл, находим

$$\int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt = 2\int_1^0 t^4 dt - 4\int_1^0 t^2 dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_1^0 - 4\frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{14}{15}.$$

Следовательно, $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = 14/15$.

Пример 17.4. Вычислить интеграл $\int_{\sqrt{2}}^2 x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $x = 2\sin t$. Поскольку $dx = 2\cos t dt$, $t = \arcsin(x/2)$, $t_1 = \pi/4$ при $x = \sqrt{2}$, $t_2 = \pi/2$ при $x = 2$, то

$$\int_{\sqrt{2}}^2 x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin t)^2\sqrt{8-2(2\sin t)^2}\,2\cos t dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{8-8\sin^2 t}\,2\cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sqrt{2}\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sqrt{2}\sin^2 2t dt = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = 2\sqrt{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Пример 17.5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x\sin(x/2)\,dx$.

Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx = -2\int\limits_0^{2\pi} x\,d\left(\cos\frac{x}{2}\right) = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+2\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Пример 17.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} t^2\sin t\,dt$.

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} t^2\sin t\,dt = -\int\limits_0^{\pi/2} t^2\,d(\cos t) = -t^2\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} 2t\cos t\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} t\,d(\sin t) = 2t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,dt = \pi + 2\cos t\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

17.4. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем

Теорема 17.6. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, и для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, то*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \qquad (17.10)$$

С помощью неравенств (17.10) можно оценить определенный интеграл, т.е. указать границы, между которыми заключено его значение. Неравенства (17.10) выражают оценку определенного интеграла.

Теорема 17.7. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \qquad (17.11)$$

где $m \le \mu \le M$.

Эта теорема называется теоремой о среднем.

Замечание. В случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, равенство (17.11) принимает вид

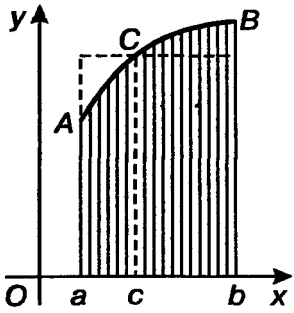

Рис. 17.4

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \qquad (17.12)$$

где $c \in [a, b]$.

Число $\mu = f(c)$, определяемое формулой (17.12), называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Равенство (17.12) имеет следующий геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной ординате некоторой точки этой линии (рис. 17.4).

Пример 17.6. Оценить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}}$.

Поскольку подынтегральная функция $f(t) = 1/\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}$ в данном промежутке $[0, \pi]$ имеет наименьшее значение $m = 4/5$ и наибольшее $M = 1$, то в соответствии с формулой (17.10) получаем

$$\frac{4}{5}\pi \leq \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}} \leq \pi.$$

17.5. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла предполагалось, что выполняются условия: 1) пределы интегрирования a и b являются конечными; 2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. В этом случае определенный интеграл называют собственным. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интеграл называют несобственным.

Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при любом $x \geq a$. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (17.13)$$

Предположим, что при $b \to +\infty$ функция (17.13) имеет конечный предел; этот предел называется сходящимся несобственным интегралом от функции $f(x)$ по

промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (17.14)$$

Если предел (17.14) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева – отрезком прямой $x=a$, снизу – осью Ox (рис. 17.5); в случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося – бесконечной.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) = F(+\infty)-F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c – любая точка из интервала $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 17.8. *Если при* $x \ge a$ *выполнены неравенства* $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ *и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, то сходится и* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, *причем* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; *если* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *расходится, то расходится и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Геометрическое значение этой теоремы иллюстрируется на рис. 17.6.

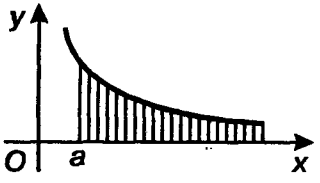

Рис. 17.5

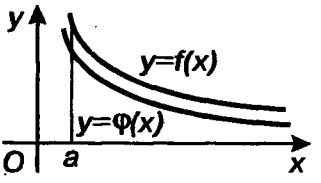

Рис. 17.6

Теорема 17.9. *Если в промежутке* $(a, +\infty)$ *функция* $f(x)$ *меняет знак и* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *сходится, то сходится также* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Интегралы от неограниченных функций. Если функция $y = f(x)$ неограниченна в окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то несобственный интеграл от этой функции определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{c+\eta}^b f(x)\,dx, \tag{17.16}$$

где $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. В случае $c = b$ или $c = a$ получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{17.17}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to 0} \int\limits_{a+\eta}^b f(x)\,dx. \tag{17.18}$$

Несобственные интегралы (17.17) и (17.18) называются сходящимися, если существует конечный предел соответствующего определенного интеграла; в противном случае интегралы называются расходящимися.

Несобственный интеграл (17.16) называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части.

Для интегралов от неограниченных функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам 17.8 и 17.9. Они применяются для исследования вопроса о сходимости несобственных интегралов и оценки их значений.

Пример 17.7. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$.

Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4}.$$

Применяя формулы (16.15) и (17.15), находим

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{d(x + 1/2)}{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1/2}{\sqrt{3}/2} \Bigg|_{-1}^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} \frac{-1 + 1/2}{\sqrt{3}/2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Итак несобственный интеграл сходится и его значение равно $4\pi/3\sqrt{3}$ ($\approx 2{,}4184$).

Пример. 17.8. Исследовать при каких значениях $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(b > a)$.

Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln(b-a) - \ln(a+\varepsilon-a)) = \ln(b-a) - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Следовательно, при $\alpha = 1$ несобственный интеграл расходится. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha} (x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha}((b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Этот предел будет бесконечным при 1-α<0, или α>1; он будет равен постоянной $(b-a)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ при 1-α>0, или α<1. Итак, данный интеграл сходится при α<1.

Пример 17.9. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$.

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{\sqrt{x^8(1+1/x^8)}} = \frac{1}{x^4\sqrt{1+1/x^8}} < \frac{1}{x^4}$$

и

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3},$$

то сходится и данный интеграл.

Пример 17.10. Исследовать, при каких α сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{-\alpha+1} - 1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ при } \alpha > 1, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \text{ при } \alpha < 1.$$

В случае $\alpha = 1$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$. Итак несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$.

17.6. Интегралы Эйлера

Гамма-функция, или эйлеров интеграл второго рода, определяется формулой

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \tag{17.19}$$

Этот интеграл является несобственным, так как верхний предел бесконечен; кроме того, при $p-1<0$ подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Интеграл (17.19) сходится при $p>0$. Каждому положительному значению p соответствует вполне определенное значение $\Gamma(p)$. Функция $\Gamma(p)$ не является элементарной.

С помощью метода интегрирования по частям можно доказать, что

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{17.20}$$

При $p = 1$ интеграл находится непосредственно:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Подставляя в формулу (17.20) значения $p = 1, 2, \ldots, n$, получаем $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$,

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!. \tag{17.21}$$

Итак, при натуральных значениях аргумента гамма-функция совпадает с факториалом, т. е. с функцией $f(n) = n!$. Но гамма-функция определена не только при натуральных n, но и при любых положительных значениях аргумента. Из формулы (17.21) следует, что можно считать $0! = \Gamma(1) = 1$. График гамма-функции изображен на рис. 17.7.

Гамма-функция определяется и при отрицательных значениях p. В этот случае необходимо применить формулу (17.21), переписав ее в виде

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \tag{17.22}$$

Если $-1 < p < 0$, то $0 < p+1 < 1$, поэтому правая часть формулы (17.22) имеет смысл, ею и определяется $\Gamma(p)$ при этих значениях p; отметим, что в таком случае $\Gamma(p) < 0$. Продолжая аналогичные рассуждения, убеждаемся в том, что гамма-функция определена для всех отрицательных значений p, кроме $p = -k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, и кроме $p = 0$.

График гамма-функции при отрицательных значениях p изображен на рис. 17.8.

Гамма-функция определена и для комплексных значений аргумента, кроме $p=-k,\ \ k=0,1,2,\ldots$

Бета-функция, или эйлеров интеграл первого рода, определяется формулой

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \qquad (17.23)$$

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=0$ при $p-1<0$ и в окрестности точки $x=1$ при $q-1<0$.

Интеграл (17.23) сходится при $p>0,\ q>0$.

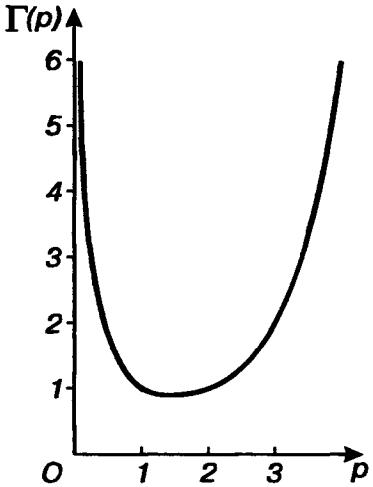

Рис. 17.7

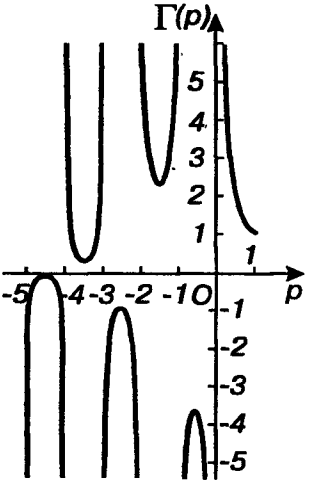

Рис. 17.8

Значения бета-функции при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p);\ \ \mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1),\ \ q>1;$$

справедлива формула $\mathrm{B}(p,1-p)=\pi/\sin p\pi,\ \ 0<p<1$.

В случае комплексных p и q интеграл (17.23) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$.

Между бета- и гамма-функциями существует связь, выражаемая формулой

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ \ (p>0,q>0). \qquad (17.24)$$

Пример 17.11. Вычислить $\Gamma(1/2)$ с помощью формулы (17.24).

Полагая в формуле (17.24) $p=q=1/2$, получаем

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_0^1\frac{d(x-1/2)}{\sqrt{(1/4)-(x-1/2)^2}}=\arcsin\,(2x-1)\Big|_0^1=\pi,\ \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

Так как $\Gamma(p)>0$ при $p>0$, то $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\approx 1{,}772$.

Пример 17.12. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

При вычислении этого интеграла используем результаты примера 17.11. Полагая $x=\sqrt{t}$, находим

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(1/2)-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (17.25)$$

17.7. Площадь криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$ и $x=b$ соответственно, снизу – осью Ox (рис. 17.9), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (17.26)$$

Площадь криволинейно трапеции $cCDd$ (рис. 17.10), ограниченной справа графиком функции $x=\varphi(y)$, сверху и снизу – соответственно прямыми $y=d$, $y=c$, слева – осью Oy, определяется формулой

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy. \qquad (17.27)$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$, ограниченной сверху графиком функции $y_2=f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1=f_1(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 17.11), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (17.28)$$

Площадь фигуры $C_1D_1D_2C_2$, ограниченной слева и справа соответственно гра-

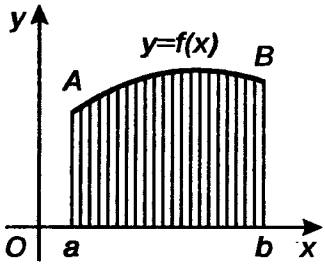

Рис. 17.9

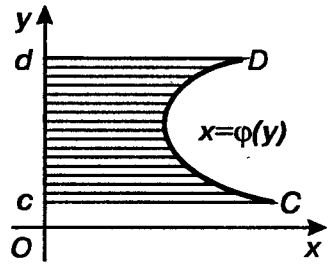

Рис. 17.10

фиками функций $x_1=\varphi_1(y)$, $x_2=\varphi_2(y)$, снизу и сверху – прямыми $y=c$, $y=d$ (рис. 17.12), определяется формулой

$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))\,dy. \qquad (17.29)$$

Если линия, ограничивающая криволинейную трапецию сверху, задана параметрическими уравнениями $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, где $\alpha\le t\le\beta$, $\varphi_1(\alpha)=a$, $\varphi_1(\beta)=b$, то

$$S=\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\varphi_1'(t)\,dt. \qquad (17.30)$$

Площадь сектора OAB (рис. 17.13), ограниченного дугой линии, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, и двумя полярными радиусами OA

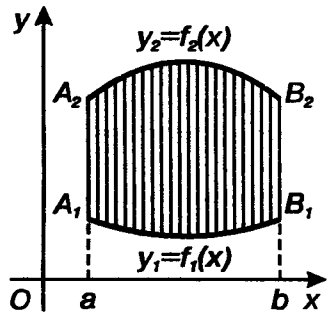

Рис. 17.11

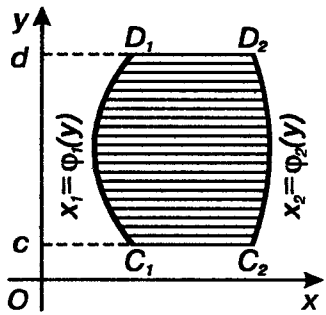

Рис. 17.12

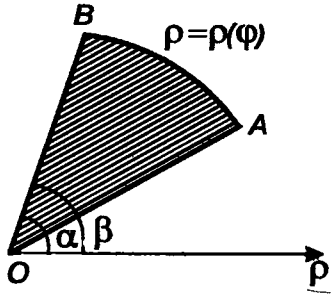

Рис. 17.13

и OB, соответствующими значениям $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, определяется формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi. \qquad (17.31)$$

Пример 17.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = 2x - x^2 + 8$ и осью Ox.

Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения линии (параболы) с осью Ox (рис. 17.14). Решая систему уравнений $y = 2x - x^2 + 8$, $y = 0$, получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$, $b = 4$.

По формуле (17.26) находим

$$S = \int_{-2}^{4} (2x - x^2 + 8)\, dx = 2\int_{-2}^{4} x dx - \int_{-2}^{4} x^2 dx + 8\int_{-2}^{4} dx =$$

$$= x^2\Big|_{-2}^{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4} + 8x\Big|_{-2}^{4} = (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) + 8(4+2) = 36.$$

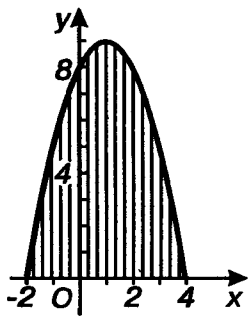

Рис. 17.14

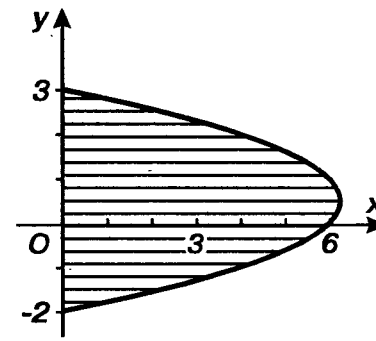

Рис. 17.15

Пример 17.14. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = y - y^2 + 6$ и осью Oy.

Данная фигура представляет собой криволинейную трапецию, прилежащую к оси Oy (см. рис. 17.15). Найдем точки пересечения линии с осью Oy, для чего решим систему уравнений $x = y - y^2 + 6$, $x = 0$. Из этой системы получаем $y_1 = -2$, $y_2 = 3$; это означает, что в формуле (17.27), которой здесь необходимо пользоваться, нужно положить $c = -2$, $d = 3$.

Следовательно,

$$S=\int_{-2}^{3}(y-y^2+6)\,dy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-2}^{3}-\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2}^{3}+6y\Big|_{-2}^{3}=$$

$$\frac{1}{2}(9-4)-\frac{1}{3}(27+8)+6(3+2)=20\frac{5}{6}.$$

Пример 17.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+4y^2=8$, $x^2-4y=0$.

Данная фигура ограничена сверху дугой эллипса $x^2+4y^2=8$, снизу – дугой параболы $x^2=4y$ (рис. 17.16).

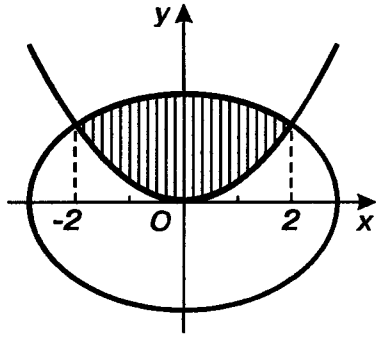

Рис. 17.16

Площадь вычислим по формуле (17.28). Решая систему уравнений $x^2+4y^2=8$, $x^2=4y$, находим $x_1=-2$, $x_2=2$ – абсциссы точек пересечения заданных линий; следовательно, $a=-2, b=2$. Каждое из уравнений разрешаем относительно y: $y_1=x^2/4$, $y_2=\sqrt{8-x^2}/2$.

(В формуле (17.28) через $y_2=f_2(x)$ обозначена функция, график которой ограничивает фигуру сверху.)

Таким образом, искомая площадь

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2dx.$$

Для вычисления первого интеграла применим подстановку $x=2\sqrt{2}\sin t$, тогда $dx=2\sqrt{2}\cos t dt$, $\alpha=-\pi/4$, $\beta=\pi/4$.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\,2\sqrt{2}dt=$$

$$=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\pi+2.$$

Поскольку

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}(8+8)=\frac{4}{3},$$

то $S=S_1-S_2=\pi+2-4/3=\pi+2/3$.

Пример 17.16. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь части области, лежащей в первой четверти, и результат умножить на 4. Заметим, что в этом случае x меняется от 0 до a, поэтому t будет меняться от $\pi/2$ до 0. По формуле (17.30) находим

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \pi ab,\ S = \pi ab.$$

Замечание. В частном случае, когда $a = b = R$, получаем $S = \pi R^2$ – площадь круга радиуса R.

Пример 17.17. Вычислить площадь области, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$.

Принимая во внимание симметрию линии относительно ее оси (см. п. 2.10), по формуле (17.31) получаем

$$\frac{1}{4}S = \int_{0}^{\pi/4}\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}a^2\int_{0}^{\pi/4}\sin 2\varphi d(2\varphi) =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\cos 2\varphi\,\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4},\ S = a^2.$$

17.8. Длина дуги кривой

Если линия задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t)\quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{17.32}$$

где $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – дифференцируемые функции аргумента t, то дифференциал длины ее дуги выражается формулой

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \tag{17.33}$$

Интегрируя равенство (17.33) по промежутку $[\alpha, \beta]$, получаем формулу для вычисления длины дуги линии (17.32):

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \tag{17.34}$$

Если линия (17.32) лежит в плоскости Oxy, то $z = 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, поэтому

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{17.35}$$

В случае, когда плоская линия задана уравнением $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, где $f(x)$ – дифференцируемая функция, последняя формула принимает вид

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (17.36)$$

Если плоская линия задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ в полярных координатах, то

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (17.37)$$

Пример 17.18. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x$ между точками, для которых $x_1=\pi/3$, $x^2=\pi/2$.

Искомую длину вычисляем по формуле (17.36).

Поскольку $y=\ln\sin x$, $y'=\cos x/\sin x$, то

$$s=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(\cos x/\sin x)^2}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|_{\pi/3}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3\approx 0{,}5493.$$

Пример 17.19. Найти длину дуги линии $x=4(\cos t+t\sin t)$, $y=4(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le\pi/2)$.

Применяем формулу (17.35), полагая в ней $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$.

Так как $x'=4(-\sin t+\sin t+t\cos t)=4t\cos t$, $y'=4(\cos t-\cos t+t\sin t)=4t\sin t$, $\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{16t^2\cos^2 t+16t^2\sin^2 t}=4t$, то

$$s=\int_0^{\pi/2}4t\,dt=2t^2\Big|_0^{\pi/2}=\pi^2/2.$$

Пример 17.20. Вычислить длину дуги винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ между точками, для которых $t=0$, $t=\beta$.

Поскольку $x'=-a\sin t$, $y'=a\cos t$, $z'=b$, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, то по формуле (17.34) находим

$$s=\int_0^\beta\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^\beta=\sqrt{a^2+b^2}\,\beta.$$

Пример 17.21. Найти длину кардиоды $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$.

Так как $\rho' = 2a\sin\varphi$, $\rho^2 + \rho'^2 = 4a^2\sin^2\varphi + 4a^2(1-\cos\varphi)^2 = 8a^2(1-$ $-\cos\varphi) = 16a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, то по формуле (17.37) получаем

$$s = 2\int_0^{\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 16a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -16a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16a.$$

17.9. Объем тела. Площадь поверхности вращения

Если задана функция $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, определяющая площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{17.38}$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 17.17), где AB – дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx, \text{ или } V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{17.39}$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 17.18), где CD – дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется формулой

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy, \text{ или } V_y = \pi\int_a^b \varphi^2(y)\,dy. \tag{17.40}$$

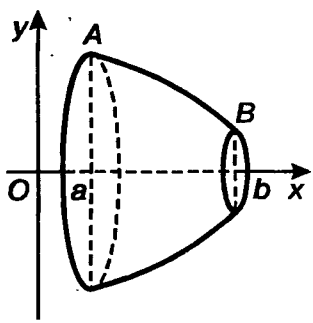

Рис. 17.17

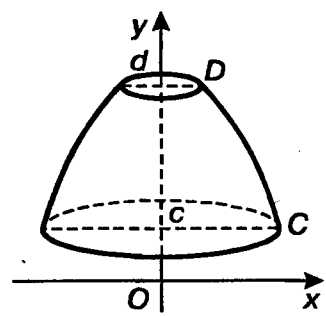

Рис. 17.18

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, определяется формулой

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (17.41)$$

Пример 17.22. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги линии $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \le x \le 1$ (поверхность эта называется катеноидом).

Так как $y' = \operatorname{sh} x$, то по формуле (17.41) с учетом равенства $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ получаем

$$S = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \operatorname{ch} 2x\,dx + \pi \int_0^1 dx = \frac{\pi \operatorname{sh} 2x}{2}\Big|_0^1 + \pi x\Big|_0^1 = \frac{\pi \operatorname{sh} 2}{2} + \pi \approx 8{,}84.$$

Пример 17.23. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 6x$, прямой $x = 2$ и осью Ox.

В соответствии с условием задачи находим пределы интегрирования $a = 0$, $b = 2$ (рис. 17.19).

По формуле (17.39) получаем

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 6x\,dx = 3\pi x^2\Big|_0^2 = 12\pi.$$

Пример 17.24. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y = 4$ и осью Oy.

Замечая, что пределы интегрирования $c = 0$, $d = 4$, по формуле (17.40) находим

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y\,dy = 2\pi y^2\Big|_0^4 = 32\pi.$$

Пример 17.25. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью Oy (см. рис. 17.20).

Из уравнения кривой $xy = 6$ находим $x = 6/y$, $x^2 = 36/y^2$.

Принимая во внимание, что $c = 1$, $d = 6$, по формуле (17.40) получаем

$$V = \pi \int_1^6 \frac{36}{y^2}\,dy = 36\pi \int_1^6 \frac{dy}{y^2} = -\frac{36\pi}{y}\Bigg|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) = 30\pi.$$

Пример 17.26. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ вокруг оси Ox (это тело ограничено эллипсоидом вращения).

Из уравнения эллипса находим выражение для $y^2 : y^2 = b^2 - b^2x^2/a^2$. По формуле (17.39) получаем

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2 dx =$$

$$= \pi b^2 x \Big|_{-a}^{a} - \frac{\pi b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a} = \pi b^2(a - (-a)) - \frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3 - (-a)^3) = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Следовательно, $V = (4/3)\pi ab^2$. При $a = b = R$ получаем $V = (4/3)\pi R^3$ (объем шара).

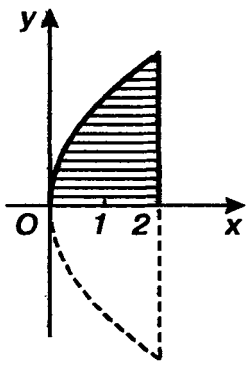

Рис. 17.19

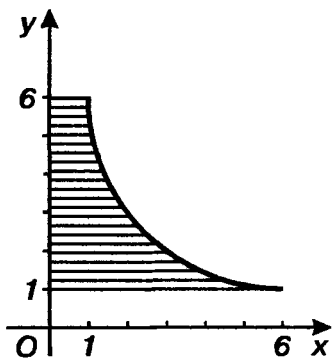

Рис. 17.20