Глава 21

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

21.1. Криволинейные интегралы первого рода

Рассмотрим пространственную кусочно-гладкую кривую, ограниченную точками A и B (рис. 21.1), и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) = f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу AB разобьем точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ M_0 = A,\ M_n = B)$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, а наибольшую из этих длин – через λ. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно одну точку $M_i'(x_i', y_i', z_i')$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i', z_i')\,\Delta l_i, \qquad (21.1)$$

называемую интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по длине дуги кривой AB.

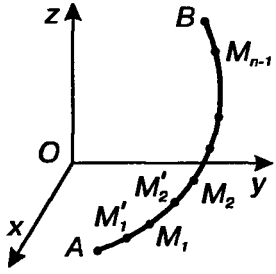

Рис. 21.1

Криволинейным интегралом первого рода или криволинейным интегралом по дуге кривой AB от функции $f(x, y, z)$ называется предел интегральной суммы (21.1) при $\lambda \to 0$:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i', z_i')\,\Delta l_i.$$

На кривой AB, целиком лежащей на плоскости Oxy, функция f от координаты z не зависит, поэтому по определению имеем

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i')\,\Delta l_i.$$

Если подынтегральную функцию $f(x, y, z) > 0$ рассматривать как линейную плотность кривой AB, то криволинейный интеграл первого рода представляет собой массу этой кривой.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода следующие.

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl.$$

2. $\int\limits_{AB} (f_1(M) \pm f_2(M))\, dl = \int\limits_{AB} f_1(M)\, dl \pm \int\limits_{AB} f_2(M)\, dl.$

3. $\int\limits_{AB} cf(M)\, dl = c \int\limits_{AB} f(M)\, dl \quad (c = \text{const}).$

4. Если путь интегрирования L разбит на части $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int\limits_{L} f(M)\, dl = \int\limits_{L_1} f(M)\, dl + \int\limits_{L_2} f(M)\, dl + \ldots + \int\limits_{L_n} f(M)\, dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$\int\limits_{L} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt. \qquad (21:2)$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy, то

$$\int\limits_{L} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt. \qquad (21.3)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, имеем

$$\int\limits_{L} f(x, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (21.4)$$

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ в полярных координатах, то

$$\int\limits_{L} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \qquad (21.5)$$

Если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ $(c \le y \le d)$, то криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L} f(x, y)\, dl = \int\limits_{c}^{d} f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + x'^2}\, dy. \qquad (21.6)$$

Пример 21.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} (x^5 + 8xy)\, dl$, где L – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$, $x = 1$.

Поскольку $y' = x^3$, $dl = \sqrt{1 + x^6}\, dx$ и на дуге кривой $4y = x^4$ функция $f(x, y) = (x^5 + 8xy) = x^5 + 4y \cdot 2x = x^5 + x^4 \cdot 2x = 3x^5$, то по формуле (21.4) находим

$$\int_L (x^5+8xy)\,dl=\int_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=3\int_0^1 (1+x^6)^{1/2}\frac{1}{6}\,d\,(1+x^6)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^6)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Пример 21.2. Вычислить $\int_L y\sqrt{y^2+1}dl$, где L – дуга кривой $x=\ln y$ между точками, для которых $y=1$, $y=4$.

Применяем формулу (21.6). В данном случае $c=1$, $d=4$, $x=\varphi(y)=\ln y$, $x'_y=1/y$, $dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy=\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy$, поэтому

$$\int_L y\sqrt{y^2+1}\,dl=\int_1^4 y\sqrt{y^2+1}\,\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy=$$

$$=\int_1^4 (y^2+1)\,dy=\left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=24.$$

Пример 21.3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+y)\,dl$, где L – контур треугольника ABO (рис. 21.2) с вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

В соответствии со свойством 4) криволинейного интеграла первого рода имеем

$$\int_L (2x+y)\,dl=\int_{AB}(2x+y)\,dl+\int_{BO}(2x+y)\,dl+\int_{OA}(2x+y)\,dl.$$

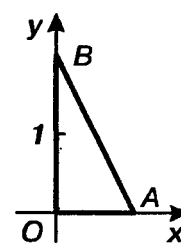

Рис. 21.2

На отрезке AB $y=-2x+2$, поэтому $y'=-2$, $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{5}dx$.

На отрезке BO $x=0$, $x'=0$, $dl=\sqrt{1+x'^2}\,dy=dy$, на отрезке OA $y=0$, $y'=0$, $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=dx$. Принимая во внимание свойство 1) криволинейного интеграла, используя формулы (21.4) и (21.6), получаем

$$\int_L (2x+y)\,dl=\int_0^1 2\sqrt{5}\,dx+\int_0^2 ydy+\int_0^1 2xdx=2\sqrt{5}x\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2+x^2\Big|_0^1=3+2\sqrt{5}.$$

Пример 21.4. Вычислить $\int_L (x+y)\,dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первом координатном углу.

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (21.5).

Так как $\rho' = a\cos 2\varphi/\sqrt{\sin 2\varphi}$, то

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \sqrt{a^2\sin 2\varphi + (a^2\cos^2 2\varphi)/\sin 2\varphi} = a/\sqrt{\sin 2\varphi} = a^2/\rho.$$

Заметив еще, что $0 \le \varphi \le \pi/2$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, по формуле (21.5) получим

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{a^2 d\varphi}{\rho} =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2.$$

Пример 21.5. Вычислить $\int_L (2x+4y-4z+7)\,dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$, $M_2(6,10,5)$.

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3}, \text{ или } \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Таким образом, получаем параметрические уравнения прямой:

$$x = 8-2t,\ y = 9+t,\ z = 3+2t.$$

Точка M пробегает отрезок M_1M_2, когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{4+1+4}\,dt = 3dt$.

По формуле (21.2) находим

$$\int_L (2x+4y-4z+7)\,dt = \int_0^1 (2(8-2t)+4(9+t)-4(3+2t)+7)\,3dt =$$

$$= 3\int_0^1 (47-8t)\,dt = 3(47t-4t^2)\Big|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

Пример 21.6. Вычислить $\int_L xydl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, ограниченной точками, для которых $t = 0$, $t = \pi/2$.

Применяем формулу (21.2). Поскольку $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ и

$$\int_L xydl = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= ab\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt = ab\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t) =$$

$$= ab\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

21.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой, ограниченная точками A и B (см. рис. 21.1), и определенная на ней непрерывная вектор-функция

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}. \qquad (21.7)$$

Дугу AB разобьем на n элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ A_0 = A,\ A_n = B)$ точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. На каждой дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольно точку $M_i(x_i', y_i', z_i')$ значения функций в точке $P(x_i', y_i', z_i') = P(M_i)$, $Q(x_i', y_i', z_i') = Q(M_i)$, $R(x_i', y_i', z_i') = R(M_i)$ умножим на проекции этой дуги соответственно на оси Ox, Oy, Oz, которые обозначим через Δx_i, Δy_i, Δz_i, причем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Из полученных произведений составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i), \qquad (21.8)$$

называемую интегральной суммой по координатам для вектор-функции (21.7). Обозначим через λ длину наибольшей из проекций Δx_i, Δy_i, Δz_i.

Криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам x, y, z называется предел интегральной суммы (21.8) при $\lambda \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i).$$

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции P, Q, R не зависят от z, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i).$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы $\mathbf{F}$ на координатные оси, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу силы $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, точка приложения которой описывает кривую L.

Криволинейный интеграл второго рода зависит от выбора направления обхода кривой; если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Криволинейные интегралы первого и второго рода связаны формулой

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl,$$

где α, β, γ – углы между осями координат и направлением касательной к линии AB, отвечающим направлению интегрирования для интеграла в левой части.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ и значению α соответствует точка A, значению β – точка B, то

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t) +$$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)]\, z'(t)\}dt. \qquad (21.9)$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости Oxy, получаем

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]\, x'(t) + Q[x(t), y(t)]\, y'(t)\}dt. \qquad (21.10)$$

Если плоская кривая L задана уравнением $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{a}^{b} \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]\, y'(x)\}dx. \qquad (21.11)$$

Пример 21.7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L x^2 dx + xy^2 dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(0, 1)$ до точки $B(1, 2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x $(y = x + 1)$ и замечая, что при перемещении от A к B x меняется от 0 до 1, по формуле (21.11) получаем

$$\int_L x^2 dx + xy^2 dy = \int_0^1 x^2 dx + x(x+1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 + x(x^2 + 2x + 1))dx =$$

$$=\int_0^1 (x^3+3x^2+x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{4}.$$

Пример 21.8. Вычислить $\int\limits_L (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy$, где L – ломаная ABC (рис. 21.3), причем $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,5)$.

Так как контур интегрирования L состоит из двух отрезков AB и BC, то

$$\int\limits_L (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy=\int\limits_{AB} (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy+$$

$$+\int\limits_{BC} (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy.$$

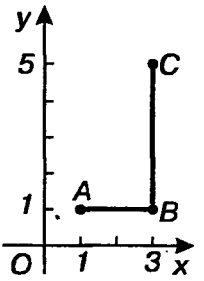

Рис. 21.3

На отрезке AB, уравнение которого $y=1$, имеем $dy=0$; на отрезке BC, уравнение которого $x=3$, имеем $dx=0$, поэтому

$$\int\limits_L (x^3+y)\,dx+(x+y^3)\,dy=\int_1^3 (x^3+1)\,dx+(x^2+1)\,0+$$

$$+\int_1^5 (3^3+y)\,0+(3+y^3)\,dy=\int_1^3 (x^3+1)\,dx+\int_1^5 (3+y^3)\,dy=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5=190.$$

Пример 21.9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)\,dy+(x+y+z^2)\,dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1,0,2)$ до точки $B(3,1,4)$.

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}.$$

Из параметрических уравнений прямой $x=1+2t$, $y=t$, $z=2+2t$ получаем $dx=2dt$, $dy=dt$, $dz=2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (21.10), которой воспользуемся, равны соответственно $\alpha=0$, $\beta=1$.

По формуле (21.10) находим

$$\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)\,dy+(x+y+z^2)\,dz=$$

$$=\int_0^1 t^2 2dt+((1+2t)^2+(2+2t))\,dt+((1+2t)+t+(2+2t)^2)\,2dt=$$

$$=\int_0^1 [2t^2+(1+4t+4t^2+2+2t)+2\,(1+3t+4+8t+4t^2)\,]\,dt=$$

$$=\int_0^1 (14t^2+28t+13)\,dt=\left(\frac{14t^3}{3}+14t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{95}{3}.$$

Пример 21.10. Вычислить $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx-yzdy+xdz$, где L – дуга винтовой линии $x=t$, $y=2\cos t$, $z=2\sin t$ $(0\le t\le \pi/2)$.

Поскольку $dx=dt$, $dy=-2\sin tdt$, $dz=2\cos tdt$, то

$$\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx-yzdy+xdz=$$

$$=\int_0^{\pi/2}(4\cos^2 t+4\sin^2 t)\,dt-4\sin t\cos t\,(-2\sin tdt)+2t\cos tdt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}(2t\cos t+8\sin^2 t\cos t+4)\,dt=2\int_0^{\pi/2} t\cos tdt+$$

$$+8\int_0^{\pi/2}\sin^2 td\,(\sin t)+4\int_0^{\pi/2}dt=2t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2}+2\cos t\,\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+\frac{8}{3}\sin^3 t\,\Bigg|_0^{\pi/2}+4t\,\Big|_0^{\pi/2}=3\pi+\frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} t\cos tdt$ вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi/2} t\cos tdt=\int_0^{\pi/2} td\,(\sin t)=t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\int_0^{\pi/2}\sin tdt=t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2}+\cos t\,\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

21.3. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если L – кусочно гладкий контур, ограничивающий на плоскости Oxy область S, а $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – функции, заданные в замкнутой области S и имеющие в ней непрерывные частные производные, то справедлива формула Грина

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{21.12}$$

где обход контура выбирается так, чтобы область S оставалась слева.

Криволинейный интеграл $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, где контур L целиком лежит внутри односвязной области S, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{21.13}$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dU(x,y)$ и

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1), \tag{21.14}$$

где $M_1(x_1,y_1)$ – начальная, $M_2(x_2,y_2)$ – конечная точки пути интегрирования.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Криволинейный интеграл

$$I = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \tag{21.15}$$

где L – контур, целиком лежащий в односвязной области (V), в которой функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{21.16}$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = dU(x,y,z)$$

и

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx+Qdy+Rdz=U(x_2,y_2,z_2)-U(x_1,y_1,z_1). \qquad (21.17)$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру в таком случае равен нулю:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

Пример 21.11. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+xy\right)dy$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(6,2)$, $C(6,4)$, $D(3,4)$.

Преобразуем этот интеграл по формуле Грина. Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left\{\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]y\right\}}{\partial x}=y\,\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то по формуле (21.12) имеем

$$I=\iint\limits_S\left(y\,\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint\limits_S y^2dxdy,$$

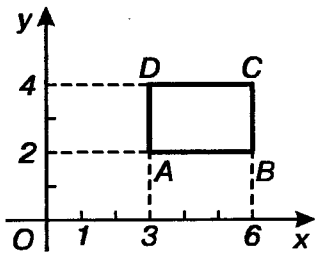

Рис. 21.4

где S – область, ограниченная контуром L, в данном случае прямоугольник $ABCD$ (рис. 21.4).

Вычисляем полученный двойной интеграл по прямоугольнику $ABCD$:

$$\iint\limits_S y^2dxdy=\int\limits_3^6 dx\int\limits_2^4 y^2dy=\int\limits_3^6\frac{y^3}{3}\Bigg|_2^4 dx=\frac{56}{3}x\Bigg|_3^6=56.$$

Пример 21.12. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_L(12xy+4z^2)\,dx+(6x^2-15y^2z)\,dy+(8xz-5y^3)\,dz$ по пути L с началом в точке $O(0,0,0)$ и концом в точке $B(1,1,1)$, предварительно установив, что он не зависит от пути интегрирования.

Это интеграл вида (21.15), для которого $P=12xy+4z^2$, $Q=6x^2-15y^2z$, $R=8xz-5y^3$.

Так как $P'_y = 12x$, $Q'_x = 12x$, $P'_z = 8z$, $R'_x = 8z$, $Q'_z = -15y^2$, $R'_y = -15y^2$, то $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$, т.е. выполнены условия (21.16).

Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования. Вычислим его по отрезку прямой, проходящей через точки O и B. Параметрические уравнения прямой имеют вид $x = t$, $y = t$, $z = t$, поэтому $dx = dt$, $dy = dt$, $dz = dt$. Так как на отрезке OB $0 \le t \le 1$, то

$$I = \int_0^1 (12t^2 + 4t^2 + 6t^2 - 15t^3 + 8t^2 - 5t^3)\, dt = \int_0^1 (30t^2 - 20t^3)\, dt =$$

$$= (10t^3 - 5t^4)\Big|_0^1 = 5.$$

Замечание. Этот пример можно решить и с помощью формулы (21.17). Действительно, так как выполнены условия (21.16), то подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции

$$dU = (12xy + 4z^2)\, dx + (6x^2 - 15y^2 z)\, dy + (8xz - 5y^3)\, dz.$$

С другой стороны,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Сравнивая два выражения для dU, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12xy + 4z^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 - 15y^2 z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 8xz - 5y^3.$$

Из первого равенства, считая y и z постоянными, находим $U = 6x^2 y + 4z^2 x + C_1$; постоянная интегрирования C_1 является постоянной по отношению к x, но она зависит от y и z, т.е. $C_1 = \varphi(y, z)$.

Итак, $U = 6x^2 y + 4z^2 x + \varphi(y, z)$. Находя частную производную по y от функции U: $U'_y = 6x^2 + \varphi'_y(y, z)$ и сравнивая с выражением $U'_y = 6x^2 - 15y^2 z$, получаем $6x^2 + \varphi'_y(y, z) = 6x^2 - 15y^2 z$, откуда $\varphi'_y(y, z) = -15y^2 z$, т.е. $\varphi(y, z) = -5y^3 z + \psi(z)$, поэтому $U(x, y, z) = 6x^2 y + 4z^2 x - 5y^3 z + \psi(z)$.

Поскольку $U'_z = 8xz - 5y^3 + \psi'(z)$ и $U'_z = 8xz - 5y^3$, то $\psi'(z) = 0$, т.е. $\psi(z) = C$. Следовательно, $U(x, y, z) = 6x^2 y + 4z^2 x - 5y^3 z + C$. По формуле (21.17) находим

$$\int_L (12xy + 4z^2)\, dx + (6x^2 - 15y^2 z)\, dy + (8xz - 5y^3)\, dz = U(1, 1, 1) - U(0, 0, 0) = 5.$$

21.4. Приложения криволинейных интегралов

Длина l дуги AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l = \int_{AB} dl.$$

Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \qquad (21.18)$$

Площадь S фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \qquad (21.19)$$

Масса m материальной дуги L определяется формулой

$$m = \int_L p(x, y, z)\, dl, \qquad (21.20)$$

где $p(x, y, z)$ – линейная плотность вещества в точке $M(x, y, z)$ этой дуги.

Прямоугольные координаты центра тяжести материальной дуги находятся по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_L xp(x, y, z)\, dl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_L yp(x, y, z)\, dl, \quad z_0 = \frac{1}{m} \int_L zp(x, y, z)\, dl, \qquad (21.21)$$

где m определяется формулой (21.20).

Если $\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\,\mathbf{i} + Y(x, y, z)\,\mathbf{j} + Z(x, y, z)\,\mathbf{k}$ – переменная сила, совершающая работу W вдоль пути L, и функции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ непрерывны, то

$$W = \int_L X dx + Y dy + Z dz. \qquad (21.22)$$

Пусть сила $\mathbf{F}$ имеет потенциал, т.е. существует функция $U(x, y, z)$ такая, что выражение $X dx + Y dy + Z dz$ является ее полным дифференциалом $dU = X dx + Y dy + Z dz$, тогда работа независимо от пути L равна

$$W = \int_{M_1}^{M_2} X dx + Y dy + Z dz = \int_{M_1}^{M_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – начальная, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – конечная точки пути.

Замечание. Если линия L лежит в плоскости Oxy, то формулы (21.18), (21.20) – (21.22) упрощаются.

Пример 21.13. Найти массу материальной дуги кривой $2y = x^2$ между точками $A(0, 0)$, $B(1, 1/2)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x, y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Найдем выражения линейной плотности $p(x, y)$ и дифференциала дуги. Из условия следует, что линейная плотность выражается формулой $p(x, y) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Из уравнения линии $y = 1/2\, x^2$ находим $y' = x$, поэтому $dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dx$. Согласно формуле (21.20), имеем

$$m = \int_L p(x, y)\, dl = \int_0^1 kx\sqrt{1+x^2}\,dx = k\int_0^1 (1+x^2)^{1/2}\frac{1}{2}\,d\,(1+x^2) =$$

$$= \frac{k}{2}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{k}{3}\,(2\sqrt{2}-1).$$

Пример 21.14 Найти центр тяжести дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le \pi/2)$, если линейная плотность в точке $M(x, y, z)$ пропорциональна произведению первых двух координат.

Так как $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$ $= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$.

Согласно условию, линейная плотность выражается формулой $p(x, y, z) = kxy$, где k – коэффициент пропорциональности.

По формуле (21.20) находим массу данной дуги

$$m = \int_L p(x, y, z)\, dl = \int_L kxydl = \int_L ka^2\cos t\,\sin t\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= ka^2\sqrt{a^2+b^2} = \int_0^{\pi/2} \sin t d\,(\sin t) = ka^2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ka^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Итак, $m = ka^2\sqrt{a^2+b^2}/2$.

Вычислим интегралы каждой из формул (21.21), обозначив их через I_1, I_2, I_3 соответственно:

$$I_1 = \int_L xp(x, y, z)\, dl = \int_L xkxydl = k\int_L x^2ydl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, a\sin t\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt = -ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\, d\,(\cos t) =$$

$$= -ka^3\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3},$$

$$I_2 = \int_L yp(x, y, z)\, dl = \int_L ykxydl = k\int_L xy^2dl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a\cos t\, a^2\sin^2 t\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^3k\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\, d(\sin t) =$$

$$= a^3k\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3},$$

$$I_3 = \int_L zp(x,y,z)\,dl = \int_L zkxydl = k\int_L xyzdl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{\pi/2} t\sin 2tdt =$$

$$= \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\,\frac{\pi}{4}.$$

По формулам (21.21) находим координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{I_1}{m} = \frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3} : \frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{2a}{3};$$

$$y_0 = \frac{I_2}{m} = \frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3} : \frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{2a}{3};$$

$$z_0 = \frac{I_3}{m} = \frac{\pi ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{8} : \frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\pi b}{4}.$$

Таким образом, искомый центр тяжести находится в точке $C(2a/3, 2a/3, \pi b/4)$.

Пример 21.15. Найти работу, производимую силой $\mathbf{F} = 4x^6\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Проекции силы X и Y на координатные оси соответственно равны $X(x,y) = 4x^6$, $Y(x,y) = xy$. Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы (21.22):

$$W = \int_L X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy.$$

По этой формуле получаем

$$W = \int_L 4x^6dx + xydy = \int_0^1 (4x^6 + xx^3 3x^2)dx = \int_0^1 7x^6dx = x^7\Big|_0^1 = 1.$$