Глава 22

ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

22.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть дана функция $f(x, y, z)$, непрерывная на некоторой гладкой поверхности (σ). Разобьем поверхность (σ) сетью произвольно проведенных кривых (рис. 22.1) на ряд частей $(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \ldots, (\Delta\sigma_n)$. В каждой из этих частей $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольно одну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение данной функции в этой точке и, умножив его на площадь соответствующей части поверхности, составим сумму всех таких произведений

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i, \qquad (22.1)$$

называемую интегральной суммой. Обозначим через d_i диаметр элементарной части поверхности $(\Delta\sigma_i)$, d – наибольший из указанных диаметров.

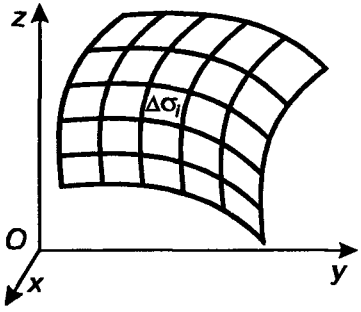

Рис. 22.1

Интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности (σ) называется предел интегральной суммы (22.1) при $d \to 0$, где d – наибольший из диаметров области $\Delta\sigma_i$:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (22.2)$$

Интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейных интегралов первого рода.

Если $f(x, y, z) > 0$ и функцию f рассматривать как поверхностную плотность массы материальной поверхности (σ), то интеграл (22.2) определяет массу этой поверхности.

Когда поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, интеграл (22.2) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{S} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx dy. \qquad (22.3)$$

Если (σ) – кусочно-гладкая двусторонняя поверхность $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, а функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в точках поверхности (σ), то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du dv, \qquad (22.4)$$

где

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \quad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'. \qquad (22.5)$$

Формула (22.3) является частным случаем формулы (22.4) при $z = z(x, y)$.

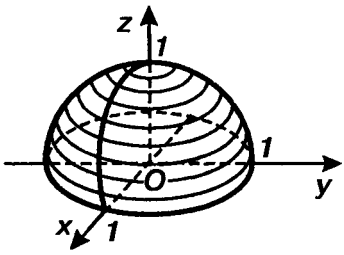

Рис. 22.2

Пример 22.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\sigma$, где σ – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (рис. 22.2).

Проекцией рассматриваемой части данного параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$ на плоскость Oxy является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (получено из уравнений поверхности и плоскости). Следовательно, областью S в формуле (22.3) является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Так как $z_x' = -2x$, $z_y' = -2y$, то в соответствии с формулой (22.3) получаем

$$\iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\sigma = \iint\limits_{S} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx dy =$$

$$= \iint\limits_{S} (1 + 4x^2 + 4y^2)\, dx dy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Замечая, что в области S φ меняется от 0 до 2π и ρ – от 0 до 1, находим

$$\iint\limits_{S} (1 + 4x^2 + 4y^2)\, dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4\rho^2)\, \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + 4\rho^3)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^4 \right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi.$$

Пример 22.2. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (3x^2 + 5y^2 + 3z - 2)\, d\sigma$, где σ – часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$.

Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно y. Для вычисления интеграла по поверхности первого рода воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{S_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz,$$

где S_2 – проекция поверхности σ на плоскость Oxz.

Поскольку $y_x' = x\big/\sqrt{x^2+z^2}$, $y_z' = z\big/\sqrt{x^2+z^2}$, то

$$\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2} = \sqrt{1+x^2\big/(x^2+z^2)+z^2\big/(x^2+z^2)} = \sqrt{2}.$$

Проекцией s_2 данной поверхности на плоскость Oxz является круг $x^2+z^2 \le b^2$ (рис. 22.3), поэтому при переходе к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ будем иметь $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le b$.

По указанной формуле находим

$$\iint\limits_{\sigma}(3x^2+5y^2+3z^2-2)\,d\sigma = \iint\limits_{S_2}[3(x^2+z^2)+5(x^2+z^2)-2]\sqrt{2}dxdz =$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{b}(8\rho^2-2)\,\rho d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{b}(8\rho^3-2\rho)\,d\rho =$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(2\rho^4-\rho^2)\Big|_0^b d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(2b^4-b^2)\,d\varphi = 2\sqrt{2}\pi\,(2b^4-b^2).$$

Пример 22.3. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} x(y+z)\,d\sigma$, где σ – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{b^2-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=c$.

Так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительно x, то необходимо воспользоваться формулой

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2+x_y'^2}\,dydz,$$

где S_1 – проекция поверхности σ на плоскость Oyz.

Поскольку $x_y' = -y\big/\sqrt{b^2-y^2}$, $x_z'=0$, то

$$\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2} = \sqrt{1+y^2\big/(b^2-y^2)} = b\big/\sqrt{b^2-y^2} = b/x.$$

Заметив еще, что в данном случае область S_1 представляет собой прямоугольник $ABCD$ (рис. 22.4), определяемый неравенствами $-b\le y\le b$, $0\le z\le c$, по указанной формуле найдем:

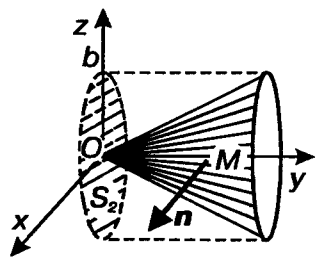

Рис. 22.3

$$\iint\limits_{\sigma} x(y+z)\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} x(y+z)\frac{b}{x}\,dydz = b\iint\limits_{S_1}(y+z)\,dydz =$$

$$= b\int\limits_{-b}^{b} dy\int\limits_{0}^{c}(y+z)\,dz = b\int\limits_{-b}^{b}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=c} dy = b\int\limits_{-b}^{b}\left(cy+\frac{c^2}{2}\right)dy =$$

$$= bc\int\limits_{-b}^{b} y\,dy + \frac{bc^2}{2}\int\limits_{-b}^{b} dy = \frac{bc}{2}y^2\Bigg|_{-b}^{b} + \frac{bc^2}{2}y\Bigg|_{-b}^{b} = b^2c^2.$$

22.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в точках двусторонней поверхности σ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выберем на поверхности определенную сторону. Разобьем поверхность σ сетью произвольно проведенных кривых на части $\Delta\sigma_1;\ \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$.

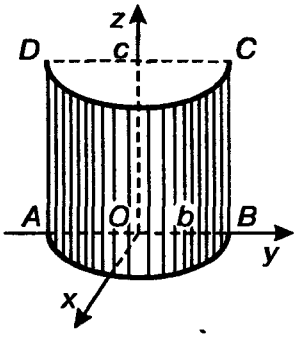

Рис. 22.4

В каждой части $(\Delta\sigma_i)$ выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим в ней значение данной функции. Это значение $f(x_i, y_i, z_i)$ умножим на проекцию ΔS_i части $(\Delta\sigma_i)$ на плоскости Oxy (а не на площадь $\Delta\sigma_i$, как это было в случае интеграла первого рода). При этом числу ΔS_i приписывается определенный знак, а именно если в точках $(\Delta\sigma_i)$ нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол, то через ΔS_i обозначаем площадь проекции $\Delta\sigma_i$, взятую со знаком плюс, если упомянутая нормаль составляет с осью Oz тупой угол, то под ΔS_i будем понимать площадь этой проекции, взятую со знаком минус. Составим сумму всех таких произведений:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i. \qquad (22.6)$$

Интегралом второго рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ называется предел суммы (22.6) при $d \to 0$, где d – наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_i$:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i. \qquad (22.7)$$

Аналогично определяются интегралы

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,dxdz\,,\quad \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,dydz\,,$$

причем для выбора знака проекции элемента служит угол между нормалью, отвечающей выбранной стороне, и осью Oy или Ox.

Наиболее общим видом интеграла второго рода служит интеграл

$$I=\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dxdz+R(x,y,z)\,dxdy\,,$$

где P, Q, R – функции от x, y, z, определенные и непрерывные в точках двусторонней поверхности σ.

Интеграл второго рода обладает всеми свойствами интеграла первого рода за исключением одного: при изменении стороны поверхности интеграл (22.7) меняет знак.

Интегралы первого и второго рода связаны формулой

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл второго рода.

Интегралы второго рода вычисляются следующим образом. Если поверхность σ однозначно проецируется в область S плоскости Oxy и $z=f(x,y)$ – ее уравнение, то

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint\limits_{S_1} R(x,y,f(x,y))\,dxdy\,, \tag{22.8}$$

где знак плюс берется в том случае, когда на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma>0$, и знак минус, когда $\cos\nu<0$. Аналогично, если σ однозначно проецируется в область S_2 (или S_3) на плоскости Oxz (или Oyz), т.е. может быть задана уравнением $y=\varphi(x,z)$ (или $x=\psi(y,z)$), то

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)\,dxdz=\pm\iint\limits_{S_2} Q(x,\varphi(x,z),z)\,dxdz\,, \tag{22.9}$$

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz=\pm\iint\limits_{S_3} P(\psi(y,z),y,z)\,dydz\,, \tag{22.10}$$

где в случае (22.9) берется знак $\cos\beta$, а в случае (22.10) – знак $\cos\alpha$.

Пример 22.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\sigma}(y^2+z^2)\,dxdy$, где σ – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=b$ (рис. 22.5, *а*).

Нормаль **n** в точке M, соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью Oz острый угол (точнее $0 \le \alpha \le \pi/2$), поэтому в формуле (22.8), которой следует воспользоваться, нужно взять знак плюс. Проекцией S_1 данной поверхности на плоскость Oxy является прямоугольник $ABCD$ (рис. 22.5, *б*), определяемый неравенствами $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

По формуле (22.8) находим

$$\iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\,dxdy = \iint\limits_{S_1} (y^2+(\sqrt{a^2-x^2})^2)\,dxdy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{b} (y^2+a^2-x^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{y^3}{3} + a^2 y - x^2 y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=b} dx = \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{b^3}{3} + a^2 b - x^2 b \right) dx =$$

$$= \left(\frac{b^3}{3} x + a^2 bx - b\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2}{3} ab\,(b^2+2a^2).$$

Пример 22.5. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz$, где σ – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=b$ (см. рис. 22.3).

Нормаль к поверхности в точке M образует с осью Oy тупой угол, поэтому в формуле (22.9) следует взять знак минус.

Проекцией S_2 данной поверхности на плоскость Oxz является круг $x^2+z^2 \le b^2$. По формуле (22.9) получаем

$$\iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz = -\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2+a(\sqrt{x^2+z^2})^2)\,dxdz =$$

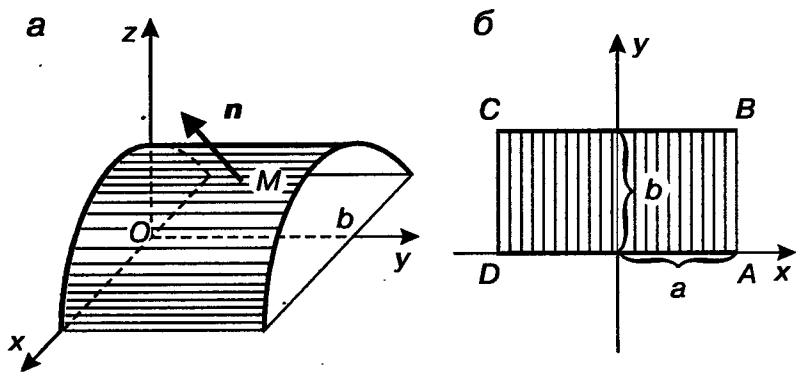

Рис. 22.5

$$= -\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2)(a+1)\,dxdz = -(a+1)\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, находим

$$\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b \rho^2\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^b d\varphi = \frac{2\pi b^4}{4} = \frac{\pi b^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz = -(a+1)\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz = -\frac{\pi(a+1)b^4}{2}.$$

Пример 22.6. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz$, где σ – внутренняя сторона части полусферы $x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанная конусом $x = \sqrt{y^2+z^2}$.

В формуле (22.10), которой воспользуемся, следует взять знак минус, так как нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, составляет с положительным направлением оси Ox тупой угол:

$$\iint\limits_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz = -\iint\limits_{S_3} (a(R^2-y^2-z^2)+by^2+bz^2)\,dydz =$$

$$= -\iint\limits_{S_3} (aR^2+(b-a)(y^2+z^2))\,dydz.$$

Так как S_3 есть круг $y^2+z^2 \le R^2/2$ (получено из уравнений $x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}$, $x = \sqrt{y^2+z^2}$), то, переходя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{S_3} (aR^2+(b-a)(y^2+z^2))\,dydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} (aR^2+(b-a)\rho^2)\,\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} (aR^2\rho+(b-a)\rho^3)\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(aR^2\frac{\rho^2}{2}+(b-a)\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{R/\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\frac{aR^4}{4}+(b-a)\frac{R^4}{16}\right) = \frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

Итак, $\iint\limits_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz = -\frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$

22.3. Формула Стокса. Формула Остроградского

Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы и L – замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность σ, то справедлива формула Стокса

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \tag{22.11}$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности σ, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура L совершался против часовой стрелки (в правой системе координат).

Формула Стокса может быть записана в следующем символическом виде:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Если σ – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области $V + \sigma$, то справедлива формула Остроградского

$$\iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \tag{22.12}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ.

Пример 22.7. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

В данном примере $P(x, y, z) = y$, $Q(x, y, z) = z$, $R(x, y, z) = x$, поэтому $R'_y = 0$, $Q'_z = 1$, $P'_z = 0$, $R'_x = 1$, $Q'_x = 0$, $P'_y = 1$.

По формуле (22.11) имеем

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_\sigma (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma)\,d\sigma,$$

где σ – часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченная данной окружностью. Приводя уравнение плоскости $x + y + z = 0$ к нормальному виду, находим $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$.

Таким образом, $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_\sigma d\sigma=-\pi a^2\sqrt{3}$, где a – радиус круга, ограниченного указанной окружностью.

Пример 22.8. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_\sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma$, где σ – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Формула Остроградского применима в случае замкнутой поверхности. Чтобы получить замкнутую поверхность, присоединим к поверхности конуса соответствующую часть плоскости $z=h$, $x^2+y^2\le z^2$. Обозначив эту часть плоскости через σ_1, по формуле Остроградского получим

$$\iint\limits_\sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=$$

$$=\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz.$$

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить второй и третий интегралы. В случае области σ_1 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – косинусы углов с осями координат нормали к плоскости $z=h$, а именно: $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, поэтому

$$\iint\limits_{\sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}z^2\cos\gamma d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}h^2d\sigma=h^2\pi h^2=\pi h^4,$$

так как на плоскости σ_1 $z=h$ и двойной интеграл равен площади круга радиуса h, получающегося при пересечении конуса с плоскостью.

Вычисляем третий интеграл, производя в нем сначала интегрирование по z от $z=\sqrt{x^2+y^2}$ до $z=h$, а затем двойной интеграл по области S в плоскости Oxy (эта область является кругом $x^2+y^2\le h^2$, $z=0$; она получается проецированием объема V на плоскость Oxy).

Таким образом,

$$\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz=2\iint\limits_S\left[\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\,dz\right]dxdy=$$

$$=2\iint\limits_S\left[(x+y)\,z+\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=h}dxdy=$$

$$=2\iint\limits_S\left[(x+y)\,(h-\sqrt{x^2+y^2})+\frac{1}{2}(h^2-x^2-y^2)\right]dxdy.$$

Обозначая последний интеграл через I и переходя к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, находим

$$I=2\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left[\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)(h-\rho)+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}\rho^2\right]\rho d\rho d\varphi=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{h^4}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^4}{4}-\frac{h^4}{8}\right]d\varphi=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{12}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^4}{8}\right]d\varphi=$$

$$=\left[\frac{h^4}{6}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{h^4\varphi}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi h^4}{2}.$$

Итак, $\iint\limits_{\sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$

22.4. Приложения интегралов по поверхности

Площадь σ поверхности (σ) вычисляется по формуле

$$\sigma=\iint\limits_{\sigma}d\sigma. \tag{22.13}$$

Если $p=p(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы материальной поверхности (σ), то масса всей этой поверхности определяется интегралом

$$m=\iint\limits_{\sigma}p(x,y,z)\,d\sigma. \tag{22.14}$$

Координаты центра тяжести $C_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности σ вычисляются по формулам

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}xp(x,y,z)\,d\sigma,\ y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}yp(x,y,z)\,d\sigma,$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}zp(x,y,z)\,d\sigma, \tag{22.15}$$

где m определяется формулой (22.14).

Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных осей Ox, Oy, Oz находятся соответственно по формулам

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} (z^2 + y^2)\, p\,(x, y, z)\, d\sigma,\ I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\, p\,(x, y, z)\, d\sigma,$$
$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, p\,(x, y, z)\, d\sigma. \qquad (22.16)$$

Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz вычисляются соответственно по формулам

$$I_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z^2 p\,(x, y, z)\, d\sigma,\ I_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y^2 p\,(x, y, z)\, d\sigma,\ I_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x^2 p\,(x, y, z)\, d\sigma. \qquad (22.17)$$

Пример 22.9. Вычислить массу части поверхности $z = xy$ $(x \geq 0, y \geq 0)$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$, если поверхностная плотность $p\,(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Так как $z'_x = y$, $z'_y = x$, $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$, то

$$m = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma = \iint\limits_{S} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy =$$
$$= \iint\limits_{S} (1 + x^2 + y^2)\, dxdy,$$

где S – лепесток лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$, для которого $x \geq 0$, $y \geq 0$.

В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ уравнение границы области имеет вид $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$, поэтому

$$\iint\limits_{S} (1 + x^2 + y^2)\, dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} (1 + \rho^2)\, \rho d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} (\rho + \rho^3)\, d\rho =$$
$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{4\sin 2\varphi}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{16\sin^2 2\varphi}{4}\right) d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \cdot \frac{1}{2}\, d\,(2\varphi) + 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2}\, d\varphi =$$
$$= -\cos 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} + 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 2 + \pi;\ m = \pi + 2.$$

Пример 22.10. Найти массу части цилиндрической поверхности $y = \sqrt{9 - z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = 2$, если поверхностная плотность $p\,(x, y, z) = ky\,(x + z)$.

По формуле (22.14) находим

$$m=\iint\limits_{\sigma} ky\,(x+z)\,d\sigma = k\iint\limits_{S} y\,(x+z)\,\frac{3}{y}\,dxdz = 3k\int\limits_{-3}^{3} dz\int\limits_{0}^{2}(x+z)\,dx =$$

$$=3k\int\limits_{-3}^{3}(x^2/2+xz)\Big|_{x=0}^{x=2}dz = 3k\int\limits_{-3}^{3}(2+2z)\,dz = 3k\,(2z+z^2)\Big|_{-3}^{3} = 36k.$$

Пример 22.11. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, для которой $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$.

Так как поверхность однородная, т.е. $p\,(x,y,z)=\text{const}$, то в формулах (22.16) можно положить $p=1$.

Третья из формул (22.16) принимает вид

$$I_z=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

Поскольку в данном случае $F\,(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$,

$$d\sigma=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{F_z'}\,dxdy,$$

то

$$d\sigma=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно,

$$I_z=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma = R\iint\limits_{S}\frac{(x^2+y^2)\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

где S – четверть круга $x^2+y^2\le R^2$ при $x\ge 0,\ y\ge 0$.

Переходя к полярным координатам получаем

$$\iint\limits_{S}\frac{(x^2+y^2)\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\int\limits_{0}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi R^3}{3}.$$

(Последний интеграл вычислен с помощью подстановки $\rho=R\sin t$). Итак, $I_z=R\pi R^3/3=\pi R^4/3$.