Глава 23

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

23.1. Основные понятия. Необходимый признак сходимости

Рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ – последовательность чисел или функций. Слагаемые $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ называются членами ряда. Если все члены ряда являются числами, то ряд называется числовым, если члены ряда – функции, то ряд называется функциональным.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{23.1}$$

Ряд (23.1) задан, если известен его общий член $a_k = \varphi(k)$, т.е. известно правило, по которому каждому номеру k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ставится в соответствие вполне определенный член ряда.

Суммой конечного числа n первых членов ряда называется его n-й частичной суммой:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Конечный или бесконечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Ряд, имеющий конечную сумму, называется сходящимся. Если ряд (23.1) сходится и его сумма равна S, то используют запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Ряд, члены которого неотрицательны, называется положительным. Положительный ряд всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно, ряд – сходящимся), если его частичные суммы ограничены сверху, и бесконечной (а ряд – расходящимся), если суммы сверху не ограничены.

Если в ряде (23.1) отбросить первые m членов, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots, \tag{23.2}$$

называемый остатком ряда (23.1) после m-го члена.

Теорема 23.1. *Если сходится ряд* (23.1), *то сходится и любой из его остатков* (23.2); *обратно, их сходимости остатка* (23.2) *вытекает сходимость исходного ряда* (23.1).

Теорема 23.2. *Если ряд (23.1) сходится, то сумма* r_m *его остатка* (23.2) *после m-го члена с возрастанием m стремится к нулю:* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

Теорема 23.3 (необходимый признак сходимости). *Если ряд* (23.1) *сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{23.3}$$

Следствие. *Если общий член ряда к нулю не стремится, то ряд расходится.*

Примеры числовых рядов: геометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots, \tag{23.4}$$

гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \tag{23.5}$$

Отметим, что геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$; его сумма определяется формулой $S = a/(1-q)$; гармонический ряд расходится.

Замечание. Условие (23.3) не является достаточным для сходимости ряда (23.1).

Пример 23.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(c+k)(c+k+1)} = \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+3)(c+4)} + \ldots,$$

где c – постоянная ($c \neq -k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$).

Составим n-ю сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+3)(c+4)} + \ldots + \frac{1}{(c+n)(c+n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для S_n, преобразуем формулу общего члена ряда, разлагая a_k на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)} = \frac{A}{c+k} + \frac{B}{c+k+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{(A+B)k+(A+B)c+A}{(c+k)(c+k+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k в числителях обеих частей равенства, получаем $A+B=0$, $(A+B)c+A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, поэтому

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{c+k}-\frac{1}{c+k+1}.$$

Выражение для S_n принимает вид

$$S_n=\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+2}\right)+\left(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{c+n-1}-\frac{1}{c+n}\right)+\left(\frac{1}{c+n}-\frac{1}{c+n+1}\right).$$

Приводя подобные члены и переходя к пределу, получаем

$$S_n=\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+n+1},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{c+1}.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{c+1}.$

Замечание. В частных случаях при $c=0$, $c=\pi$, $c=1$, $c=\sqrt{2}$ по этой формуле получаем соответственно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi+k)(\pi+k+1)}=\frac{1}{\pi+1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}+k)(\sqrt{2}+k+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Пример 23.2. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}=\frac{1}{(c+1)(c+3)}+\frac{1}{(c+2)(c+4)}+$$
$$+\frac{1}{(c+3)(c+5)}+\ldots+\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}+\ldots,$$

где $c=\text{const}$ $(c\neq -k,\ k=1,2,3,\ldots)$.

Разложив общий член a_k на элементарные дроби, получим

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+k}-\frac{1}{c+k+2}\right).$$

Составим n-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем ее:

$$S_n=\frac{1}{(c+1)(c+3)}+\frac{1}{(c+2)(c+4)}+\frac{1}{(c+3)(c+5)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(c+n)(c+n+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+3}\right)+\left(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+4}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{c+3}-\frac{1}{c+5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c+n-2}-\frac{1}{c+n}\right)+\left(\frac{1}{c+n-1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{c+n+1}\right)+\left(\frac{1}{c+n}-\frac{1}{c+n+2}\right)\right],$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+n+1}-\frac{1}{c+n+2}\right).$$

Следовательно,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}\right),\ S=\frac{2c+3}{2(c+1)(c+2)}.$$

В частном случае при $c=0$ находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}.$$

Пример 23.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k-1)(c+k)(c+k+1)}\quad (c=\text{const};\ c\neq -k,\ k=1,2,3,\ldots).$$

Разлагая общий член ряда на элементарные дроби, получаем

$$\frac{1}{(c+k-1)(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+k-1}-\frac{2}{c+k}+\frac{1}{c+k+1}\right).$$

Составляя n-ю частную сумму и преобразуя ее, находим

$$S_n=\frac{1}{c(c+1)(c+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)}+\ldots+\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{c+1}+\frac{1}{c+2}\right)+\left(\frac{1}{c+1}-\frac{2}{c+2}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{c+3}\Big)+\Big(\frac{1}{c+2}-\frac{2}{c+3}+\frac{1}{c+4}\Big)+\ldots+\Big(\frac{1}{c+n-3}-\frac{2}{c+n-2}+$$

$$+\frac{1}{c+n-1}\Big)+\Big(\frac{1}{c+n-2}-\frac{2}{c+n-1}+\frac{1}{c+n}\Big)+\Big(\frac{1}{c+n-1}-\frac{2}{c+n}+$$

$$+\frac{1}{c+n+1}\Big)\Big\}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+n}+\frac{1}{c+n+1}\Big).$$

Переходя к пределу, получаем

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+1}\Big),\ S=\frac{1}{2c(c+1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k-1)(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{2c(c+1)}.$$

В частности, при $c=1$ из последней формулы находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 23.4. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{k}{k+1}+\ldots$$

Общий член ряда выражается формулой $a_k=\frac{k}{k+1}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{1+1/k}=1$, т.е. общий член к нулю не стремится, то на основании следствия из необходимого признака заключаем, что данный ряд расходится.

Пример 23.5. Исследовать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\arccos(1/2k)$.

Общий член ряда определяется формулой $a_k=\arccos(1/2k)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\arccos(1/2k)=\arccos 0=\pi/2$, т.е. предел общего члена не равен нулю, то на основании следствия из необходимого признака сходимости заключаем, что данный ряд расходится.

23.2. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Признаки сравнения. Интегральный признак Коши

Рассмотрим числовые ряды с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{23.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{23.7}$$

Теорема 23.4 (первый признак сравнения). *Если для всех* $k \geq k_0$

$$a_k \leq b_k \tag{23.8}$$

и ряд (23.7) *сходится, то сходится и ряд* (23.6).

Если для всех $k \geq k_0$

$$a_k \geq b_k \tag{23.9}$$

и ряд (23.7) *расходится, то расходится и ряд* (23.6).

Теорема 23.5 (второй признак сравнения). *Если существует конечный и отличный от нуля предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \neq 0, \tag{23.10}$$

то ряды (23.6) *и* (23.7) *сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема 23.6 (интегральный признак Коши). *Если* $f(x)$ – *неотрицательная невозрастающая функция при* $x > 0$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \quad a_k = f(k) \tag{23.11}$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{23.12}$$

Замечание. Нижним пределом интегрирования в интеграле (23.12) может быть любое другое положительное число из области определения функции $f(x)$.

Пример 23.6. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$1 + \frac{2}{1+2^2} + \frac{2^2}{1+2^4} + \frac{2^3}{1+2^6} + \ldots + \frac{2^k}{1+2^{2k}} + \ldots$$

Все члены данного ряда положительны, общий член определяется формулой $a_k = 2^k/(1+2^k)$. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots, \quad b_k = \frac{1}{2^k}.$$

Так как

$$\frac{2^k}{1+2^{2k}} \le \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k} \quad (a_k \le b_k, \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

т.е. выполнено условие (23.8) и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$ сходится (геометрический ряд, для которого $q = 1/2 < 1$), то на основании первого признака сравнения заключаем, что исходный ряд также сходится.

Пример 23.7. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} + \ldots$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом (23.5). Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k\sqrt[k]{k}} : \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то из расходимости гармонического ряда следует расходимость данного ряда.

Пример 23.8. С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 1/(x^2+1)$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши: она принимает положительные значения и убывает с возрастанием x, причем $f(k) = 1/(k^2+1) = a_k$. Исследуем сходимость интеграла (23.12) для данного случая:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 23.9. С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится или расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2}$.

Функция $f(x) = (x+2)/x^2$ удовлетворяет условиям теоремы 23.6.

Поскольку

$$\int_1^{\infty}\frac{x+2}{x^2}dx=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)\Bigg|_1^{\infty}=\infty,$$

т.е. интеграл вида (23.12) расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 23.10. Исследовать, сходится или расходится данный ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

Применим интегральный признак, рассмотрим функцию $f(x)=1/x\ln x$ $(x\geq 3)$. Так как

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_3^{\infty}=\infty,$$

т.е. интеграл расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 23.11. Исследовать, при каких p сходится ряд Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots \qquad (23.13)$$

Если $p\leq 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, $a_k=1/k^p=k^{-p}\geq 1$, поэтому ряд расходится (на основании следствия из необходимого признака сходимости). В случае $p>0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x)=1/x^p$ положительна и не возрастает при $x\geq 1$. Пусть $p>1$. Положив $p=1+h$ $(h>0)$, получим

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+h}}=-\frac{1}{hx^h}\Bigg|_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{hx^h}\right)-\left(-\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}.$$

Поскольку интеграл вида (23.12) сходится, то сходится и ряд Дирихле. Если $p=1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и ряд Дирихле (при $p=1$ получаем гармонический ряд).

Итак, ряд Дирихле сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Замечание. Сходимость многих рядов может быть исследована сравнением с соответствующим рядом Дирихле. Вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_m(k)}{Q_n(k)}, \qquad (23.14)$$

где $P_m(k)$ и $Q_n(k)$ – многочлены от k степени m и n соответственно, решается

сравнением с рядом Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$, где $p = m - n$. При этом целесообразно применять второй признак сравнения.

Пример 23.12. Доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)\,3k}$.

Преобразуем формулу для общего члена данного ряда:

$$a_k = \frac{1}{(3k-1)\,3k} = \frac{1}{(3k)^2(1-1/3k)} = \frac{1}{9k^2(1-1/3k)} = \frac{1}{9k^2}\,\frac{1}{(1-1/3k)}.$$

Рассмотрим ряд с общим членом $b_k = 1/9k^2$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится, ибо это ряд вида (23.13), где $p = 2$. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{9k^2}\,\frac{1}{(1-1/3k}:\frac{1}{9k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-1/3k} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то данный ряд также сходится.

Пример 23.13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k-3}{k^4+5k^3+4k^2+7}$.

Это ряд вида (23.14), причем $P_m(k) = k^2 + 2k - 3$, $m = 2$, $Q_n(k) = k^4 + 5k^3 + 4k^2 + 7$, $n = 4$. Так как $p = m - n = 2 - 4 = -2$, сравним данный ряд с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, который является рядом Дирихле и сходится, ибо $p > 1$.

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+2k-3}{k^4+5k^3+4k^2+7}:\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{k^4+2k^3-3k^2}{k^4+5k^3+4k^2+7} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то данный ряд сходится.

23.3. Признак Д'Аламбера. Признак Коши. Другие признаки

Рассмотрим числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (23.15)$$

Теорема 23.7 (признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=q. \tag{23.16}$$

Если $q<1$, *то ряд* (23.15) *сходится; если* $q>1$, *то ряд расходится.*

Замечание. Если $q=1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Теорема 23.8 (признак Коши). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q. \tag{23.17}$$

Если $q<1$, *то ряд сходится; если* $q>1$, *то ряд расходится.*

Теорема 23.9 (признак Раабе). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=p. \tag{23.18}$$

Если $p>1$, *то ряд сходится; если* $p<1$, *то ряд расходится.*

Теорема 23.10 (признак Гаусса). *Пусть для ряда* (23.15)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^m+b_1k^{m-1}+2\ +b_m}{k^m+c_1k^{m-1}+2\ +c_m}. \tag{23.19}$$

Если $c_1-b_1>1$, *то ряд сходится; если* $c_1-b_1\le 1$, *то ряд расходится.*

Пример 23.14. Доказать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^3}+\frac{\sqrt{4}}{2^4}+\frac{\sqrt{5}}{2^5}+2$$

Общий член ряда определяется формулой $a_k=\sqrt{k}/2^k$. Заменяя в этой формуле k на $k+1$, получаем последующий член $a_{k+1}=\sqrt{k+1}/2^{k+1}$. Составим отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}}:\frac{\sqrt{k}}{2^k}=\frac{\sqrt{k+1}\,2^k}{\sqrt{k}\,2^{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}}.$$

Найдем предел (23.16):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}.$$

Так как $q=1/2<1$, то на основании признака Д'Аламбера заключаем, что ряд сходится.

Пример 23.15. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^k\sin^k\frac{1}{2k}$.

Применяем признак Коши. Поскольку $a_k=k^k\sin^k(1/2k)$, $\sqrt[k]{a_k}=k\sin(1/2k)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}k\sin(1/2k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin(1/2k)}{1/k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin(1/2k)}{1/2k}=\frac{1}{2}$, т.е. $q=1/2<1$, то ряд сходится.

Замечание. Сходимость данного ряда также можно установить с помощью признака Д'Аламбера.

Пример 23.16. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{1}{4}+\ldots\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k}+\ldots$$

Общий член данного ряда определяется формулой

$$a_k=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k}.$$

Заменяя в этой формуле k на $k+1$, получаем формулу

$$a_{k+1}=\frac{(2(k+1)-1)!!}{(k+1)(2(k+1))!!}=\frac{(2k+1)!!}{(k+1)(2k+2)!!}.$$

Составляем отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+1)!!}{(k+1)(2k+2)!!}:\frac{(2k-1)!!}{k(2k)!!}=\frac{(2k+1)!!(2k)!!k}{(2k-1)!!(2k+2)!!(k+1)}=$$

$$=\frac{(2k+1)k}{(2k+2)(k+1)}=\frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2}.$$

Находим предел (23.16):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2}=\frac{2}{2}=1.$$

Поскольку $q=1$, то признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Обратимся к признаку Раабе. Найдем предел (23.18):

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{2k^2+4k+2}{2k^2+k}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{2k^2+k+3k+2}{2k^2+k}-1\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}k\left(1+\frac{3k+2}{2k^2+2}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\frac{3k+2}{2k^2+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k^2+2k}{2k^2+2}=\frac{3}{2}.$$

Так как в данном случае $p=3/2>1$, то на основании признака Раабе заключаем, что ряд сходится.

Пример 23.17. Исследовать условия сходимости гипергеометрического ряда

$$\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+$$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(\alpha+k)\beta\ldots(\beta+k)}{(k+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k)},$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$.

Общий член данного ряда определяется формулой

$$a_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}.$$

Поскольку

$$a_{k+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(\alpha+k)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)(\beta+k)}{(k+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)(\gamma+k)},$$

то

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}=\frac{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta}{k^2+(\gamma+1)k+\gamma}.$$

Из последнего выражения видно, что применение к данному ряду признака Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1\right)$.

Применим признак Гаусса. Так как в данном случае $b_1=\alpha+\beta$, $c_1=\gamma+1$, то при $c_1-b_1=\gamma+1-\alpha-\beta>1$ ряд сходится, при $c_1-b_1=\gamma+1-\alpha-\beta\le 1$ ряд расходится. Преобразуя полученные неравенства, заключаем, что ряд сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\le 0$.

23.4. Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным. Знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k=b_1+b_2+b_3+\ldots \tag{23.20}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|=|b_1|+|b_2|+|b_3|+\ldots \tag{23.21}$$

Ряд (23.20) в этом случае называется абсолютно сходящимся. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Если ряд (23.20) сходится, а ряд (23.21) расходится, то ряд (23.20) называется условно (неабсолютно) сходящимся. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки его членов можно сделать равной любому данному числу, конечному или равному $+\infty$.

Ряд (23.21) является рядом с положительными членами, поэтому для исследования вопроса о его сходимости можно применять ранее рассмотренные признаки (признаки сравнения, интегральный признак, признак Коши, Д'Аламбера и др.).

Замечание 1. Из расходимости ряда (23.21) в общем случае не следует расходимость ряда (23.20).

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся.

Теорема 23.12 (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\ldots+(-1)^{k+1}a_k+\ldots\ (a_k>0)$$

сходится, если выполнены условия:

$$a_k \geq a_{k+1} \ (k = 1, 2, 3, \ldots, \ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots), \tag{23.22}$$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0. \tag{23.23}$$

При замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой n его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов, т.е.

$$|r_n| \leq a_{n+1}. \tag{23.24}$$

Теорема 23.13 (признак Дирихле). *Знакопеременный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{23.25}$$

сходится, если: 1) *частные суммы* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *ограничены, т.е.* $|B_n| \leq C$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; 2) *числа* a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю.*

Замечание 2. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле. В самом деле, если a_k, монотонно убывая, стремится к нулю, а $b_k = (-1)^{k-1}$, то ряд (23.25) принимает вид $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, для которого выполнены условия признака Лейбница.

Теорема 23.14 (признак Абеля). *Ряд* (23.25) *сходится, если: 1) сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$; *2) числа* a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *образуют монотонную и ограниченную последовательность.*

Пример 23.18. Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \ldots + \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{3^k} + \ldots$$

Составляем ряд из модулей членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^k} + \ldots$$

Последний ряд сходится, как геометрический ряд со знаменателем Следовательно, данный ряд также сходится; он является абсолютно сходящимся рядом (в соответствии с определением абсолютной сходимости ряда).

Пример 23.19. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3}$.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^3} = \frac{|\sin 1|}{1^3} + \frac{|\sin 2|}{2^3} + \frac{|\sin 3|}{3^3} + \ldots \tag{1}$$

Так как $|\sin k| \le 1$, то каждый член не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \qquad (2)$$

(ряд (2) является рядом Дирихле, т.е. рядом вида (23.13), где $p = 3 > 1$). Согласно первому признаку сравнения ряд (1) сходится, поэтому сходится и данный ряд, причем абсолютно.

Пример 23.20. Исследовать характер сходимости знакочередующегося ряда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} + \ldots$$

Поскольку ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, расходится (ряд Дирихле; $p = 1/2 < 1$), то о сходимости ряда пока ничего нельзя сказать (см. замечание 1). Применим к данному знакочередующемуся ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница здесь выполнены:

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из модулей расходится, то данный ряд сходится условно (неабсолютно).

Пример 23.21. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} + \ldots,$$

чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Данный ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{4^3} > \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^3} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{1}{k^3} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

является сходящимся (ряд Дирихле; $p > 1$).

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,001, т.е.

$$\frac{1}{k^3} < 0{,}001, \text{ или } \frac{1}{k^3} < \frac{1}{1000}.$$

Последнее неравенство выполняется, когда $k^3 > 1000$, или $k > 10$. Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда. Так как $a_{11} = 1/11^3 < 1/10^3 = 0{,}001$, то по формуле (23.24) получаем следующую оценку для остатка ряда: $r_{10} \le a_{11} < 0{,}001$.

Пример 23.22. Исследовать характер сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{(k-1)(k-2)/2}}{k}+\ldots$$

Ряд, составленный из модулей членов данного ряда, является гармоническим рядом, который расходится. Сравнение данного ряда с гармоническим не решает вопрос о его сходимости (см. замечание 1).

Применим признак Дирихле. Данный ряд можно представить в виде

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, где $a_k = 1/k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $b_k = (-1)^{(k-1)(k-2)/2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, т.е.

$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = -1,\ b_4 = -1,\ b_5 = 1,\ b_6 = 1,\ b_7 = -1,\ b_8 = -1, \ldots$

Поскольку a_k монотонно стремится к нулю $\left(1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0\right)$, частные суммы $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены $(B_n \le 2\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, ибо $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3 = 1$, $B_4 = 0$, $B_5 = 1$, $B_6 = 2$, $B_7 = 1$, $B_8 = 0, \ldots, B_{4k-3} = 1$, $B_{4k-2}=2$, $B_{4k-1}=1$, $B_{4k}=0, \ldots)$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится. Так как ряд из модулей его членов расходится, то данный ряд сходится условно (неабсолютно).

Пример 23.23. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{1}{3^k\left(1+\frac{3}{k}\right)^k}.$$

Применим признак Абеля. Этот ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \left(a_k = \frac{1}{(1+3/k)^k},\ b_k = (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{1}{3^k}\ (k = 1, 2, 3, \ldots)\right).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\left(\text{ибо сходится ряд } \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right)$, а числа a_k образуют монотонную ограниченную последовательность $\left(\frac{1}{e^3} < a_k < \frac{1}{4},\ a_k > a_{k+1}, \text{ так как } \left(1+\frac{3}{k}\right)^k < \left(1+\frac{3}{k+1}\right)^{k+1},\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}(1+3/k)^k} = \frac{1}{e^3}\right)$, то, согласно признаку Абеля, данный ряд сходится.

23.5. Действия над рядами

Суммой двух рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{23.26}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{23.27}$$

называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots \tag{23.28}$$

Аналогично определяется разность двух рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots \tag{23.29}$$

Ряды (23.28) и (23.29) сходятся, если сходятся оба ряда (23.26), (23.27).

Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k=} A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = A - B.$$

Произведением ряда (23.26) на число c называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots \tag{23.30}$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, то $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = cA$.

Произведением рядов (23.26) и (23.27) называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k + \ldots, \tag{23.31}$$

где

$$c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_k b_1 \ (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{23.32}$$

Если ряды (23.26) и (23.27) сходятся абсолютно, то ряд (23.31) также сходится абсолютно и его сумма равна произведению сумм данных рядов.

З а м е ч а н и е. Если из двух сходящихся рядов (23.26) и (23.27) хоть один сходится абсолютно, то их произведение – сходящийся ряд.

Пример 23.24. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right]$.

Этот ряд является суммой двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^k}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\ldots$$

Каждый из этих рядов есть геометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}=\frac{a}{1-q}\quad (|q|<1).$$

Для первого ряда $a=1,\ q=1/4$, поэтому $S_1=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$. Для второго ряда $a=1,\ q=-1/5$, поэтому $S_2=\frac{1}{1-(-1/5)}=\frac{5}{6}$.

Следовательно, сумма исходного ряда

$$S=S_1+S_2=4/3+5/6=13/6.$$

Пример 23.25. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k}-\frac{(-1)^k}{3^k}\right]$.

Данный ряд является разностью двух сходящихся геометрических рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,\ S_1=\frac{1}{1-1/2}=2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots,\ S_2=\frac{1}{1-(-1/3)}=\frac{3}{4}.$$

Значит исходный ряд имеет сумму $S=S_1-S_2=2-3/4=5/4$.

23.6. Некоторые числовые ряды и их суммы

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(a+kr)\,q^k=\frac{a}{1-q}+\frac{rq}{(1-q)^2}\quad (|q|<1)$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)}=1$.

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+2)}=\frac{3}{4}$.

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+3)}=\frac{11}{18}$.

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\,(2k+1)}=\frac{1}{2}$.

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}.$

7. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{3}{4}.$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{12}.$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[1+(k-1)h][1+kh]}=\frac{1}{h}.$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[a+(k-1)h](a+kh)}=\frac{1}{ah}.$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)(4k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}.$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}=\frac{\pi}{4}.$

14. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}=\sin 1=\sin 57°17'45''=0{,}84147\ldots$

15. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{(2k)!}=\cos 1=\cos 57°17'45''=0{,}54030\ldots$

16. $\sum_{k=1,\,k\neq m}^{\infty}\frac{1}{(m+k)(m-k)}=-\frac{3}{4m^2}$ (m – целое число).

17. $\sum_{k=1,\,k\neq m}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(m-k)(m+k)}=\frac{3}{4m^2}$ (m – четное число).

18. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$

19. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

20. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$

21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$

22. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}=\frac{5\pi^5}{1536}.$

24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}=1.$

25. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e=2{,}71828\ldots$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}=0{,}36787\ldots$

27. $2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}=\frac{1}{e}.$

28. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1{,}54308\ldots$

29. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1{,}17520\ldots$

30. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=\ln 2=0{,}6931\ldots$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2.$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k3^k} = \ln 3 = 1{,}0986\ldots$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k2^k} = 1 + \ln 2.$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)\,2^k}{k3^k} = 2 + \ln 3.$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \ln 2.$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(4k^2-1)} = 2\ln 2 - 1.$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(9k^2-1)} = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1).$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12k^2-1}{k\,(4k^2-1)^2} = 2\ln 2.$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(4k^2-1)^2} = \frac{3}{2} - \ln 2.$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).$

42. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$

43. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$

44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$

45. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{m^{2k}} = \frac{m^2}{m^2+1}.$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(8k-1)\,(8k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}(\sqrt{2}+1).$

47. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{4k-3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)].$

48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(m+k-1)!} = \frac{1}{(m-2)\,(m-1)!}.$

49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(36k^2-1)} = -3 + \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2.$

50. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)\,(3k+2)\,(3k+3)\,(3k+4)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$