Глава 24

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

24.1. Сходимость функциональных рядов

Пусть дан функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots, \tag{24.1}$$

т.е. ряд, члены которого $u_k(x)$ – некоторые функции от x.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (24.1) становится числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots \tag{24.2}$$

Если ряд (24.2) сходится, то значение аргумента $x = x_0$ называется точкой сходимости ряда (24.1). Множество всех точек сходимости x функционального ряда (24.1) называется его областью сходимости, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_n(x)$$

– суммой данного ряда. Функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \tag{24.3}$$

называется остатком ряда (24.1).

Если ряд (24.2) расходится, то значение $x = x_0$ называется точкой расходимости ряда (24.1).

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (24.1) можно применять к нему известные признаки сходимости, считая x фиксированным. В частности, при применении признака Д'Аламбера или Коши случай, когда $q = 1$, исследуется особо, с помощью других признаков сходимости.

Функциональный ряд (24.1) называется абсолютно сходящимся на множестве X, если при всех $x \in X$ сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + |u_3(x)| + \ldots$$

Пример 24.1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x-1}{x+1} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k + \ldots$$

Данный ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q=(x-1)/(x+1)$. Геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$. Следовательно, данный ряд сходится лишь в случае $|(x-1)/(x+1)|<1$. Последнему неравенству равносильны неравенства $-1<(x-1)/(x+1)<1$. Если $(x+1)>0$, то $-x-1<x-1<x+1$, т.е. $-x-1<x-1$ и $x-1<x+1$. Второе из этих неравенств выполняется для всех x, первое верно только для $x>0$. Если $(x+1)<0$, то $-x-1>x-1>x+1$, т.е. $x+1<x-1$ и $x-1<-x-1$. Первое из полученных равенств противоречиво, второе выполняется при $x<0$. Но при $x<0$ $|q|>1$.

Таким образом, ряд сходится при $x>0$, т.е. областью его сходимости является открытый промежуток $(0,+\infty)$. (При $x=0$, как и следовало ожидать, получаем расходящийся ряд $-1+1-1+\ldots$).

Пример 24.2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+x^2}+\frac{x^2}{2+x^4}+\ldots+\frac{x^k}{2+x^{2k}}+\ldots$$

Общий член данного ряда определяется формулой $u_k(x)=x^k/(2+x^{2k})$. Так как $|x^k/(2+x^{2k})|=|x^k|/(2+x^{2k})\le|x|^k$ при $|x|<1$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k$ сходится при $|x|<1$, то и данный ряд сходится для $|x|<1$. Поскольку $\left|\frac{x^k}{2+x^{2k}}\right|\le\frac{|x^k|}{|x^{2k}|}=\frac{1}{|x|^k}$ при $|x|>1$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{-k}$ сходится при $|x|>1$, то данный ряд сходится и для $|x|>1$. Если $x=\pm1$, то $|u_k(1)|=1/3$; ряд расходится. Итак, данный ряд сходится при всех x, кроме $x=\pm1$.

Пример 24.3. При каких x сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1+1/k)^k 2^{kx}$?

Применим к данному ряду признак Коши, для чего сначала найдем предел $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}=q$. Так как $u_k=(1+1/k)^k 2^{kx}$, $\sqrt[k]{|u_k|}=(1+1/k)\,2^x$, то $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}=\lim_{k\to\infty}(1+1/k)\,2^x=2^x$.

Найдем значения x, при которых этот предел меньше 1, для чего решим неравенство $2^x<1$. Последнее неравенство выполняется для $x<0$. При $x=0$ данный ряд принимает вид $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый признак сходимости (общий член к нулю не стремится: $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}(1+1/k)^k=e$). Итак, ряд сходится при $x<0$.

24.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд (24.1) называется равномерно сходящимся в некотором промежутке, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое N, не зависящее от x, что при $n > N$ для всех x из данного промежутка выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

где $R_n(x)$ – остаток ряда, определяемый формулой (24.3).

Теорема 24.1 (признак Вейерштрасса). *Функциональный ряд (24.1) сходится абсолютно и равномерно в некотором промежутке, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{24.4}$$

такой, что

$$|u_k(x)| \le a_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{24.5}$$

для всех x из данного промежутка.

Ряд (24.4) в этом случае называется мажорантным рядом для ряда (24.1).

Свойства функциональных рядов выражаются следующими теоремами.

Теорема 24.2. *Сумма равномерно сходящегося ряда функций, непрерывных в замкнутом промежутке $[a, b]$, есть функция, непрерывная в данном промежутке.*

Теорема 24.3. *Если члены сходящегося ряда (24.1) имеют непрерывные производные при $a \le x \le b$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно в замкнутом промежутке $[a, b]$, то ряд (24.1) в этом промежутке можно дифференцировать почленно:*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x), \text{ или } \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k'(x). \tag{24.6}$$

Теорема 24.4. *Если члены ряда (24.1) непрерывны при $a \le x \le b$ и ряд этот сходится равномерно в замкнутом промежутке $[a, b]$, то его можно интегрировать почленно в данном промежутке:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\, dx.$$

Теорема 24.5. *Если ряд (24.1) сходится равномерно в некоторой области, и каждый член ряда имеет конечный предел $\lim_{x\to\alpha} u_k(x) = c_k$, где α – точка сгущения данной области, то к пределу можно перейти почленно, т.е.*

$$\lim_{x\to\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to\alpha}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k.$$

Пример 24.4. Исследовать, равномерно ли сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{3^k}$.

Так как $|\cos kx|\le 1$ для всех x, то $|\cos kx/3^k|\le 1/3^k$ $(k=1,2,3,\ldots)$, т.е. каждый член данного ряда не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1/3^k)$ (геометрический ряд, $q=1/3$). Последний ряд является мажорантным для данного ряда. В соответствии с признаком Вейерштрасса заключаем, что данный ряд сходится абсолютно и равномерно для всех x, т.е. на всей действительной оси.

Пример 24.5. Доказать, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx/k^2$ является непрерывной функцией при всех x.

Прежде всего каждый член данного ряда $u_k(x)=\sin kx/k^2$ $(k=1,2,3,\ldots)$ есть функция, непрерывная при всех x. Ряд сходится равномерно при всех x, поскольку $|\sin kx/k^2|\le 1/k^2$ и для данного ряда существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ – сходящийся числовой ряд с положительными членами (ряд Дирихле; $p=2>1$). Согласно теореме 24.2, сумма данного ряда есть функция, непрерывная при всех x (как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций).

Пример 24.6. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx/k^4$ в области его сходимости?

Каждый член данного ряда есть функция $u_k(x)=\sin kx/k^4$, дифференцируемая при всех x, причем $u_k'=\cos kx/k^3$.

Составим ряд производных $\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx/k^3$. Каждый член нового ряда – непрерывная функция $u_k(x)=\cos kx/k^3$. Так как $|u_k(x)|=|\cos kx|/k^3\le 1/k^3$ $(k=1,2,3,\ldots)$, то для него существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^3)$.

Следовательно, ряд производных равномерно сходится при всех x, поэтому, согласно теореме 24.3, исходный ряд можно дифференцировать почленно. По формуле (24.6) получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^4}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k^4}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}.$$

Пример 24.7. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2^k \pi x}{2^k}$?

Этот ряд сходится равномерно при всех x, ибо для него существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2^k)$ (так как $\left|\sin 2^k \pi x/2^k\right| \le 1/2^k$). Каждый член ряда $u_k(x) = \sin 2^k \pi x/2^k$ есть функция дифференцируемая, причем $u_k'(x) = \pi \cos 2^k \pi x$. Ряд производных $\pi \sum_{k=1}^{\infty}\cos 2^k \pi x$ расходится в каждой точке, ибо ни в одной точке не выполняется необходимый признак сходимости (общий член к нулю не стремится). Следовательно, исходный ряд почленно дифференцировать нельзя.

Пример 24.8. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}1/(x^2+k^2)$?

Каждый член данного ряда $u_k(x) = 1/(x^2+k^2)$ есть функция, непрерывная для всех x, ряд сходится равномерно на всей числовой оси. Действительно, так как для всех x выполняется неравенство $1/(x^2+k^2) < 1/k^2$, то для данного ряда существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$.

Таким образом, согласно теореме 24.4, данный ряд можно интегрировать по любому промежутку из его области сходимости, в частности по промежутку $[0, x]$. Интегрируя, получаем

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{dx}{x^2+k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

24.3. Степенные ряды. Действия над степенными рядами

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots, \qquad (24.7)$$

где a_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда. При $a = 0$ ряд принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (24.8)$$

Теорема 24.6 (признак Абеля). *Если степенной ряд* (24.8) *сходится при* $x=x_0$ $(x_0 \ne 0)$, *то он сходится абсолютно и равномерно при любом* x, *для которого* $|x| < |x_0|$.

Радиусом сходимости ряда (24.8) называется число R такое, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ расходится. Интервал $(-R, R)$ в этом случае называется интервалом сходимости указанного ряда. На концах промежутка $[-R, R]$ ряд может или сходится или расходится.

Если степенной ряд (24.8) сходится на всей числовой оси, то полагают, $R=\infty$, если он сходится только при $x=0$, полагают $R=0$. Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Аналогично определяется радиус и интервал сходимости для ряда (24.7): если при $|x-a|<R$ этот ряд сходится, а при $|x-a|>R$ расходится, то R – радиус его сходимости, $(a-R, a+R)$ – интервал сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда находится с помощью признака Д'Аламбера или признака Коши.

Радиус сходимости можно вычислить по одной из формул:

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|},\quad R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \tag{24.9}$$

если соответствующий предел существует.

Простейшим примером степенного ряда является геометрический ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$ Этот ряд сходится при $q=|x|<1$. Следовательно, для данного ряда радиус сходимости $R=1$, а интервал сходимости $(-1, 1)$. Сумма этого ряда равна $S(x)=1/(1-x)$ (в соответствии с формулой $S=a/(1-q)$, $a=1$, $q=x$), поэтому для функции $f(x)=1/(1-x)$ имеем следующее разложение в степенной ряд:

$$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots+x^k+\ldots\quad (|x|<1). \tag{24.10}$$

Действия над степенными рядами. Рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots, \tag{24.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots \tag{24.12}$$

с общим интервалом сходимости $(a-R, a+R)$.

Сумма (разность) рядов (24.11) и (24.12) определяется соответственно формулами

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-a)^k, \tag{24.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k-\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)(x-a)^k, \tag{24.14}$$

а их произведение – формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k, \tag{24.15}$$

где

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0. \qquad (24.16)$$

Ряды (24.13) – (24.15) имеют тот же радиус сходимости R, что и ряды (24.11) и (24.12).

В частном случае, если ряды (24.11) и (24.12) совпадают, формула (24.15) обращается в формулу для возведения ряда в квадрат:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 a_k + a_1 a_{k-1} + a_2 a_{k-2} + \ldots + a_k a_0)\,(x-a)^k.$$

Степенной ряд в пределах промежутка сходимости можно возводить в степень с любым натуральным показателем m.

Степенной ряд (24.11) внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} (x-a)^k, \qquad (24.17)$$

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + C. \qquad (24.18)$$

Ряды (24.17) и (24.18) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (24.11).

Теорема 24.7. *Если ряды* (24.11) *и* (24.12) *в окрестности точки* $x = a$ *имеют одну и ту же сумму, то они тождественны, т.е.* $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Эта теорема устанавливает единственность разложения функции в степенной ряд.

Пример 24.9. Найти радиус сходимости степенного ряда $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + \ldots + 3^k x^k + \ldots$

Это степенной ряд вида (24.8), все коэффициенты его отличны от нуля. Воспользуемся первой из формул (24.9). Так как $a_k = 3^k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3^k} = 3$, $1/R = 3$, то радиус сходимости данного ряда $R = 1/3$, а интервал сходимости $(-1/3, 1/3)$.

Замечание. Данный ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q = 3x$. Геометрический ряд сходится при $|q| < 1$, т.е. при $|3x| < 1$, или при $-1/3 < x < 1/3$.

Пример 24.10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \ldots + (kx)^k + \ldots$$

Применим вторую из формул (24.9). Поскольку

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1},$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/k}\right)^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{e}\,0 = 0,$$

то радиус сходимости ряда равен нулю. Ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

Замечание. Тот же результат можно получить и по первой формуле (24.9): $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|k^k|}=\lim\limits_{k\to\infty}k=\infty$, $1/R=\infty$, $R=0$.

Пример 24.11. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k!}:\frac{1}{(k+1)!}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!}=\lim\limits_{k\to\infty}(k+1)=\infty$, то $R=\infty$. Ряд сходится при всех x, т.е. в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Пример 24.12. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}=\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^3}{8}+\frac{(x-2)^5}{27}+\ldots$$

Применим признак Д'Аламбера, для чего найдем предел $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=q$. В данном случае

$$u_k=\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3},\quad u_{k+1}=\frac{(x-2)^{2(k+1)-1}}{(k+1)^3}=\frac{(x-2)^{2k+1}}{(k+1)^3},$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{(x-2)^{2k+1}}{(k+1)^3}:\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}=\frac{(x-2)^{2k+1}k^3}{(x-2)^{2k-1}(k+1)^3}=(x-2)^2\frac{k^3}{(k+1)^3},$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}(x-2)^2\left(\frac{k}{k+1}\right)^3=(x-2)^2.$$

Так как при $(x-2)^2<1$, или $|x-2|<1$, ряд сходится, а при $(x-2)^2>1$, или $|x-2|>1$, ряд расходится, то в соответствии с определением радиус сходимости данного ряда $R=1$. Неравенство $|x-2|<1$ равносильно неравенствам $-1<x-2<1$ или $1<x<3$; интервалом сходимости является интервал $(1,3)$. Этот интервал можно найти, полагая $a=2$, $R=1$ в общем выражении $(a-R,a+R)$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала. При $x=3$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3-2)^{2k-1}}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Этот ряд сходится (ряд Дирихле; $p=3>1$). При $x=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-2)^{2k-1}}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{k^3}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Этот ряд также сходится. Следовательно, данный ряд сходится при $1\le x\le 3$, т.е. областью его сходимости является отрезок $[1,3]$.

Пример 24.13. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2k}}{k}$.

Применяем признак Д'Аламбера. В данном случае

$$u_{k+1}=\frac{(x+3)^{2(k+1)}}{k+1},\quad u_k=\frac{(x+3)^{2k}}{k},$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{(x+3)^{2k+2}}{k+1}:\frac{(x+3)^{2k}}{k}=\frac{k\,(x+3)^{2k+2}}{(k+1)\,(x+3)^{2k}}=\frac{k}{k+1}(x+3)^2,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}(x+3)^2\right|=(x+3)^2.$$

Поскольку при $(x+3)^2<1$, т.е. при $|x+3|<1$, ряд сходится, а при $(x+3)^2>1$, т.е. при $|x+3|>1$, ряд расходится, то радиус сходимости данного ряда $R=1$, а интервал сходимости $(-4,-2)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $[-4,-2]$. При $x=-4$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^{2k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Этот ряд расходится (гармонический ряд). При $x=-2$ также получаем расходящийся гармонический ряд. Следовательно, областью сходимости данного ряда является интервал $(-4,-2)$.

Пример 24.14. Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k\,(5^k+1)}$.

Применяем признак Д'Аламбера, считая x фиксированным. Поскольку

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\left|\frac{(x+2)^{k+1}}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)}:\frac{(x+2)^k}{k\,(5^k+1)}\right|=\frac{|x+2|\,k\,(5^k+1)}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)},$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k\,(5^k+1)\,|x+2|}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+1/k}\,\frac{(1+5^{-k})\,|x+2|}{(5+5^{-k})}=\frac{|x+2|}{5}.$$

Ряд сходится, когда полученный предел меньше единицы, т.е. $|x+2|/5<1$, или $|x+2|<5$. Так как при $|x+2|<5$ ряд сходится, а при $|x+2|>5$ ряд расходится, то радиус сходимости $R=5$; интервал $(-7,3)$ является интервалом сходимости. Исследуем поведение ряда на концах промежутка $[-7,3]$. При $x=-7$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-7+2)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,(1+5^{-k})}.$$

Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому он сходится. При $x=3$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3+2)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(1+5^{-k})}.$$

Полученный ряд расходится, так как каждый его член больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда $\sum_{k=1}^{\infty}1/(k+1)$, т.е. $1/k\,(1+5^{-k})>1/(k+1)$, ибо $k\,(1+5^{-k})<k+1$.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый промежуток $[-7,3)$.

24.4. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_k(x-a)^k+\ldots$$

в некоторой окрестности точки a, т.е. в интервале $(a-h,a+h)$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$c_0=f(a),\ c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (k=1,2,3,\ldots). \tag{24.19}$$

Следовательно,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\ldots \tag{24.20}$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (24.20), называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Равенство (24.20) выполняется (ряд Тейлора сходится к $f(x)$ в интервале $(a-h,a+h)$), если остаток ряда Тейлора

$$r_n(x)=\left(f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании n:

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

при всех x из интервала $(a-h,a+h)$.

Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(a-h,a+h)$ и ее производные

равномерно ограничены в этом интервале, т.е. существует такое положительное число C (не зависящее от n), что

$$\left|f^{n}(x)\right| \le C \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

при всех x из $(a-h,\ a+h)$, то верно равенство (24.20) во всем интервале $(a-h,\ a+h)$.

Формула (24.20) в частном случае при $a=0$ определяет разложение функции в ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots \qquad (24.21)$$

При разложении функций в степенные ряды часто используется формула (24.10) и разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots \quad (|x|<\infty),$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad (|x|<\infty),$$

$$\cos x=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \quad (|x|<\infty),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (-1<x\le 1),$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots \quad (|x|<\infty),$$

$$\operatorname{ch} x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \quad (|x|<\infty),$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots$$

$$(-1<x<1).$$

Пример 24.15. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=1/(1+x)$.

Воспользуемся разложением (24.10). В формуле $1/(1-x)=1+x+x^2+$ $+x^3+x^4+x^5+\ldots+x^k+\ldots$ запишем $(-x)$ вместо x:

$$1/(1-(-x))=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^4+\ldots+(-x)^k+\ldots$$

Таким образом, получено следующее разложение данной функции в степенной ряд:

$$1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^k x^k+\ldots \qquad (24.22)$$

Этот ряд сходится при $|x|<1$.

Замечание. Формулу (24.22) можно получить и другим путем. Ряд $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots$ является геометрическим рядом со знаменателем

$q=-x$; он сходится при $|x|<1$, его сумма $S(x)=1/(1+x)$ (получено по формуле $S=a/(1-q)$, $a=1$, $q=-x$).

Пример 24.16. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = 1/(1-x^2)$.

В формуле (24.22) вместо x запишем $-x^2$:

$$1/(1-x^2)=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2k}+\ldots$$

Полученный ряд сходится при $|x|<1$.

Замечание. Этот пример можно решить и другим способом. Так как

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right),$$

то в соответствии с разложениями (24.10) и (24.22) по определению суммы степенных рядов (формула (24.13)) получаем

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}[(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)+(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(1+1)+(-x+x)+(x^2+x^2)+(-x^3+x^3)+(x^4+x^4)+\ldots]=$$

$$=\frac{1}{2}(2+2x^2+2x^4+\ldots)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+\ldots$$

Пример 24.17. Разложить в ряд по степеням $(x+2)$ функцию $f(x)=1/(1-x)$.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x+2)+2}=\frac{1}{3-(x+2)}=\frac{1}{3(1-(x+2)/3)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-(x+2)/3}.$$

Введем новую переменную t, полагая $x+2=t$; воспользуемся разложением (24.10), записывая в нем $t/3$ вместо x:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}\frac{1}{(1-(x+2)/3)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(1-t/3)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^3+\ldots\right], \qquad (1)$$

или

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+2}{3}+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+\left(\frac{x+2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x+2}{3}\right)^k+\ldots\right],$$

т.е.

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}+\frac{x+2}{3^2}+\frac{(x+2)^2}{3^3}+\frac{(x+2)^3}{3^4}+\ldots+\frac{(x+2)^k}{3^{k+1}}+\ldots \qquad (2)$$

Ряд (1) сходится при $|t/3|<1$, т.е. при $|t|<3$, или $-3<t<3$, а ряд (2) сходится при $-3<x+2<3$, или при $-5<x<1$.

Пример 24.18. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{4}{(1+x)(1-3x)}$.

Разлагая данную функцию в сумму элементарных дробей, получаем

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{3}{1-3x}.$$

Так как

$$1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots, \qquad (3)$$

$$1/(1-3x)=1+3x+(3x)^2+(3x)^3+(3x)^4+\ldots+(3x)^k+\ldots, \qquad (4)$$

то по формуле (24.13) находим

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k+3\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k+3^{k+1}]x^k. \qquad (5)$$

Ряд (3) сходится при $|x|<1$, ряд (4) сходится при $|x|<1/3$, поэтому ряд (5) также сходится при $|x|<1/3$, т.е. в интервале $(-1/3, 1/3)$.

Пример 24.19. Найти разложение в степенной ряд функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ с помощью степенного ряда для $\varphi(x)=1/(1+x^2)$.

Прежде всего напишем степенной ряд для функции $\varphi(x)$, записывая в формуле (24.10) x^2 вместо $(-x)$, получаем

$$1/(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots$$

Этот ряд сходится при $|x|<1$, т.е. в интервале $(-1, 1)$; следовательно, его можно интегрировать почленно по любому промежутку, содержащемуся в указанном интервале. Интегрируя ряд по промежутку $[0, x]$, где $0<x<1$, находим

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots)\,dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x$, то

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$$

Этот ряд имеет радиус сходимости $R=1$. На концах промежутка $[-1, 1]$ ряд также сходится. В частности, при $x=1$ получаем ряд

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

24.5. Применения рядов в приближенных вычислениях

С помощью рядов можно вычислить значения тригонометричеких функций, логарифмов чисел, корней, определенных интегралов.

Значения тригонометрических функций (синуса и косинуса) можно вычислить с помощью их разложений в степенные ряды.

Для вычисления натуральных логарифмов чисел применяется формула

$$\ln\frac{N+1}{N}=\ln(N+1)-\ln N=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5}+\ldots\right), \quad (24.23)$$

которая получается из формулы

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots\right) \quad (|x|<1)$$

при $x=1/(2N+1)$.

Погрешность при замене суммы ряда (24.23) суммой его n первых членов определяется формулой

$$\alpha_n=2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{2n+5}\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}}+\ldots\right).$$

Очевидно,

$$\alpha_n<\beta_n=\frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right),$$

или

$$\alpha_n<\frac{1}{2(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\frac{1}{N(N+1)}.$$

Для вычисления корней применяют биномиальный ряд, т.е. степенной ряд для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$. Предположим, что нужно вычислить $\sqrt[m]{A}$, причем уже известно приближенное значение a этого корня, но требуется улучшить его. Если $A/a^m=1+x$, где x – небольшая правильная дробь, то можно преобразовать корень следующим образом:

$$\sqrt[m]{A}=a\sqrt[m]{\frac{A}{a^m}}=a\,(1+x)^{1/m} \quad (24.24)$$

и применить биномиальный ряд при $\alpha=1/m$.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, соответствующий определенный интеграл можно вычислить приближенно.

Пример 24.20. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 0,0001.

Преобразование (23.24) в данном случае принимает вид

$$\sqrt{17}=\sqrt{16+1}=\sqrt{16(1+1/16)}=4(1+1/16)^{1/2}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом. Полагая в нем $x=1/16$, $\alpha=1/2$, получаем

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{16}+\frac{1/2\,(1/2-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{16}\right)^3+$$

$$+\frac{1/2\,(1/2-1)\,(1/2-2)\,(1/2-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{16}\right)^4+\ldots,$$

т.е.

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}+\frac{1}{2^4\cdot 16^3}-\frac{5}{2^7\cdot 16^4}+\ldots$$

Полученный ряд (если не принимать во внимание первый член) является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Погрешность при вычислении его суммы не превышает первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{2^4\cdot 16^3}=\frac{1}{66536}<\frac{1}{10000}=0{,}0001,$$

то достаточно взять сумму первых трех членов ряда, чтобы получить искомое значение корня с заданной точностью:

$$\sqrt{17}\approx 4\left(1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}\right)\approx 4{,}1230.$$

24.6. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{24.25}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,3,\ldots), \tag{24.26}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{24.27}$$

Ряды Фурье периода 2π. Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi,\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в любой точке x_0 и имеет сумму

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}. \tag{24.28}$$

В частности, в точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ее ряда Фурье равна значению самой функции $f(x)$. На концах промежутка $[-\pi, \pi]$ имеем $S(-\pi) = f(-\pi)$, $S(\pi) = f(\pi)$, если функция $f(x)$ непрерывна в точках $x = \pm\pi$, и $S(\pm\pi) = f(-\pi+0)/2 + f(-\pi+0)/2$, если она разрывна в этих точках.

Ряд Фурье четной функции содержит только члены с косинусами; ряд Фурье нечетной функции содержит только члены с синусами.

Кусочно-дифференцируемая функция, заданная на полупериоде $[0, \pi)$, может быть продолжена в промежуток $[-\pi, 0)$ либо как четная, либо как нечетная, в соответствии с чем ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам кратных дуг.

Ряды Фурье периода $2l$. Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ в промежутке $[-l, l]$ либо непрерывны, либо имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности этого промежутка справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{24.29}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{24.30}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{24.31}$$

В точках разрыва функции $f(x)$ и на концах $x = \pm l$ промежутка $[-l, l]$ сумма ряда Фурье определяется формулой (24.28).

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a; a+2l]$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (24.30), (24.31) следует заменить соответственно через a и $a+2l$.

Ряд Фурье (24.25) можно представить в комплексной форме

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Аналогично представляется в комплексной форме и ряд Фурье в правой части формулы (24.29).

Пример 24.21. В промежутке $(-\pi, \pi)$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

По формулам (24.26), (24.27) находим коэффициенты

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}+5x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}+5\pi-\frac{\pi^2}{4}+5\pi\right)=10,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\Bigg]+\frac{5}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}(\pi\sin n\pi+\pi\sin(-n\pi))+\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{5}{\pi n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi n^2}(\cos n\pi-\cos(-n\pi))-\frac{5}{\pi n}(\sin n\pi-\sin(-n\pi))=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)\sin nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx+\frac{5}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]+\frac{5}{n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\pi\frac{\cos n\pi}{n}+\pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right]+\frac{1}{2\pi n^2}\sin x\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{5}{\pi n}[\cos n\pi-\cos(-n\pi)]=-\frac{2\pi\cos n\pi}{2\pi n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}x+5=5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Пример 24.22. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x \text{ при } -\pi\le x\le 0;\\ 0 \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

С помощью полученного разложения показать, что

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

По формулам (24.26) и (24.27) находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\,dx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=-\frac{1}{\pi n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{\pi n^2}(\cos 0-\cos n\pi)=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n-1],$$

т.е. $a_n=-\dfrac{2}{\pi n^2}$ при n нечетном, $a_n=0$ при n четном;

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\cdot\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\left(\frac{\cos nx}{n}\right)=\frac{1}{\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx=\frac{1}{\pi n}[0\cdot\cos 0-(-\pi)\cos n(-\pi)]-\frac{1}{\pi n}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi\cos n\pi}{\pi n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi\le x<\pi).$$

При $x=0$ получаем

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},\ \text{или}\ \frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Пример 24.23. Функцию $f(x)=x$ в промежутке $[0,\pi]$ разложить по косинусам.

В данном случае требуется получить разложение функции в промежутке $[0,\pi]$ длины π (а не 2π). Продолжая функцию в промежуток $[-\pi,0]$ четным образом, заключаем, что ее разложение в ряд Фурье содержит только косинусы, т.е. все $b_n=0$. Коэффициенты a_n находим по формулам, получающимся из формул (24.26) для этого случая:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x dx=\frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(\pi\sin n\pi-0\sin 0)+\frac{2}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1],$$

т.е. $a_{2k}=0$, $a_{2k-1}=-4/\pi(2k-1)^2$ $(k=1,2,3,\ldots)$.

Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\quad(0\le x\le\pi).$$

Пример 24.24. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^3$ в промежутке (-1,1).

Данная функция является нечетной, поэтому разложение (24.29) будет содержать только члены с синусами, все $a_n=0$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$. Коэффициенты b_n в этом случае можно определять по формуле

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \text{или}\ b_n=2\int_0^1 x^3\sin n\pi x dx\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Найдем эти коэффициенты:

$$b_n=2\int_0^1 x^3 d\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)=-2x^3\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}(1\cdot\cos n\pi-0\cdot\cos 0)+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2 d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)=$$

$$=-\frac{(-1)^n 2}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}x^2\sin n\pi x\Bigg|_0^1-\frac{12}{(n\pi)^2}\int_0^1 x\sin n\pi x dx=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}\sin n\pi+\frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1 x d\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{12}{n^3\pi^3}x\cos n\pi x\Bigg|_0^1-\frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{12}{n^3\pi^3}\cos n\pi-\frac{12}{n^3\pi^3}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+(-1)^n\frac{12}{n^3\pi^3}=(-1)^n\frac{2}{n\pi}\left(-1+\frac{6}{n^2\pi^2}\right)\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Следовательно, при $-1<x<1$ получаем

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{(-1)^n 6}{n^3\pi^3}\right]\sin n\pi x=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^n 6}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x.$$

24.7. Степенные ряды с комплексной переменной

Рассмотрим две комплексные переменные величины $z = x + iy$ и $w = u + iv$, где x, y, u, v – действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Если каждому значению переменной z из некоторого множества соответствует единственное значение переменной w, то говорят, что w есть функция от z:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – действительные функции от x и y; задание одной функции от одной комплексной переменной означает задание двух действительных функций от двух действительных переменных.

Комплексным функциональным рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \tag{24.32}$$

члены которого являются функциями комплексной переменной.

Значения z, при которых ряд (24.32) сходится, называются точками сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости этого ряда. Для каждого числа z из области сходимости

$$\lim_{n \to \infty} S_n(z) = S(z),$$

где $S_n(z)$ – частная сумма ряда (24.32), а $S(z)$ – его сумма.

Ряд (24.32) сходится, если сходится ряд из модулей его членов.

Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{24.33}$$

где z – комплексная переменная, z_0 – данное комплексное число, коэффициенты a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – данные комплексные числа.

В частном случае, при $z_0 = 0$, получаем комплексный степенной ряд, расположенный по степеням z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{24.34}$$

Для каждого степенного ряда (24.33) существует круг радиуса R с центром в точке M_0 (т.е. $|z - z_0| < R$), внутри которого данный ряд сходится, а вне его расходится (т.е. при $|z - z_0| > R$). Этот круг называется кругом сходимости. Его радиус называется радиусом сходимости степенного ряда ($R = \infty$, если степенной ряд сходится во всей плоскости, $R = 0$, если он сходится лишь в центре круга, в точке M_0). Во всех точках внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится.

При отыскании радиуса сходимости степенного ряда могут применяться признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. В частности, радиус сходимости степенного ряда (24.33) можно вычислить по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{24.35}$$

Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной определяются формулами

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots, \tag{24.36}$$

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots, \tag{24.37}$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \tag{24.38}$$

Ряды в правых частях формул (24.36) – (24.38) сходятся при всех комплексных z ($R=\infty$).

Связь между этими функциями устанавливают формулы Эйлера:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z;$$
$$\cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2,\quad \sin z=(e^{iz}-e^{-iz})/2i. \tag{24.39}$$

Отметим, что

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2},\quad e^{z+2\pi i}=e^z,\quad e^z=e^x(\cos y-i\sin y), \tag{24.40}$$

$$z=re^{i\varphi}, \tag{24.41}$$

где $z=x+iy$.

Вторая из формул (24.40) означает, что функция e^z имеет период $2\pi i$. Формула (24.41) представляет комплексное число $z=x+iy$ в показательной форме (r – модуль, φ – аргумент).

Пример 24.25. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ и его сумму.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n=1+|z|+|z|^2+\ldots$$

Полученный ряд является рядом с действительными членами, он представляет собой геометрический ряд. Следовательно, этот ряд сходится, когда $|z|<1$, т.е. в круге радиуса $R=1$ с центром в начале координат. Таким образом, данный ряд также сходится в круге $|z|<1$, который и является его областью сходимости.

Так как частная сумма ряда выражается формулой

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k=\frac{1-z^n}{1-z}$$

и $z^n \to 0$ при $n\to\infty$ $(|z|<1,\ z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi))$, то сумма ряда

$$S(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\frac{1}{1-z}.$$

Итак, получено следующее разложение:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1).$$

Пример 24.26. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z|^n}=1+\frac{1}{|z|}+\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^3}+\ldots$$

Этот ряд является геометрическим. Так как $q=1/|z|$, то ряд сходится при $|q|<1$, т.е. при $(1/|z|)<1$, или при $|z|>1$.

Итак, областью сходимости является множество точек, лежащих вне круга радиуса $R=1$ с центром в начале координат.

Пример 24.27. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

Поскольку $a_n=1/2^n$, $a_{n+1}=1/2^{n+1}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}:\frac{1}{2^{n+1}}\right|=2.$$

Итак, радиус сходимости данного ряда $R=2$.

Пример 24.28. Найти область сходимости ряда $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Поскольку $a_n=1/n!$, $a_{n+1}=1/(n+1)!$, то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}=n+1$$

и

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Данный ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Пример 24.29. Найти сумму $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

Используя третью из формул (24.39), получаем $\cos kx = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$, поэтому

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikx}\right).$$

Суммируя геометрические прогрессии, находим

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{e^{-ix} - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}}\right].$$

Разделив почленно первую дробь на $e^{ix/2}$, вторую на $e^{-ix/2}$, получим

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{ix/2} - e^{i(2n+1)x/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} + \frac{e^{-ix/2} - e^{-i(2n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(e^{(2n+1)x/2} - e^{-(2n+1)x/2})/2i - (e^{ix/2} - e^{-ix/2})/2i}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})/2i} = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}.$$

Итак, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}$.

Пример 24.30. С помощью разложения $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ |z| < 1)$ получить следующие:

$$\frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi; \quad \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$

Первое разложение получено в пример 24.25. Подставив в него выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, найдем

$$\frac{1}{(1 - r\cos\varphi) - ir\sin\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi + i\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\frac{1}{(1 - r\cos\varphi) - ir\sin\varphi} = \frac{(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi}{[(1 - r\cos\varphi) - ir\sin\varphi][(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi]} =$$

$$= \frac{(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi}{(1 - r\cos\varphi)^2 - i^2 r^2 \sin^2\varphi} = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} + i\,\frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} + i\,\frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi + i\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\varphi,$$

откуда

$$\frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi, \quad \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$