# IV
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнения называется уравнением с частными производными. В главах 25 и 27 рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где $x$ – независимая переменная; $y=y(x)$ – искомая функция переменной $x$; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – ее производные; $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ – заданная функция своих аргументов. Отметим, что функция $F$ может не содержать некоторых своих аргументов, но непременно должна зависеть от $y^{(n)}$ (когда речь идет об уравнении $n$-го порядка).

Если данное уравнение разрешимо относительно производной $n$-го порядка, его можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая $n$ раз в интервале $(a, b)$, называется решением дифференциального уравнения в этом интервале, если она обращает данное уравнение в тождество, т.е.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$$

для всех $x \in (a, b)$.

График решения дифференциального уравнения $n$-го порядка называется интегральной линией (или интегральной кривой).

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу (1676, опубликовано в 1684 г.). Начало исследований по дифференциальным уравнениям восходит ко временам Лейбница, Ньютона, в работах которых исследовались первые задачи, приводящие к таким уравнениям. Лейбниц, Ньютон, братья Я. и И. Бернулли разрабатывали методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве универсального способа использовались разложения интегралов дифференциальных уравнений в степенные ряды. Некоторые классы уравнений были приведены к к уравнению с разделяющимися переменными.

Возникновение теории дифференциальных уравнений в частных производных было связано с расширением в XVIII в. области приложений математического анализа. Оно стимулировалось теми задачами естествознания, механики, физики, в которых появилась необходимость в функциях нескольких переменных.

Первые примеры интегрирования уравнений с частными производными даны в работах Эйлера (1734). Теорию уравнений с частными производными интенсивно развивали Эйлер, Д'Аламбер, Д. Бернулли,. Новые идеи в этой области в конце XVIII в. предложены в сочинениях Лагранжа, Лапласа, Монжа.

В 1807 г. Фурье вывел уравнение теплопроводности и для его решения разработал метод разделения переменных, названный его именем. Решением задач, возникавших в теории теплопроводности занимались многие математики, в том числе Гаусс, Пуассон, Грин, М. В. Остроградский и др.

Глава 25

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию этой переменной и ее производную. Если $y = y(x)$ – функция независимой переменной $x$, то в общем виде уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешимо относительно $y'$, то

$$y' = f(x, y),$$

откуда $dy - f(x, y)\,dx = 0$, или в более общем виде

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество. В случае, если эта функция задана в неявном виде, решение называют интегралом. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, где $C$ – произвольная постоянная, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение $\Phi(x, y, C) = 0$, заданное в неявном виде, называется общим интегралом этого уравнения.

Геометрически общее решение (и общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одного параметра $C$.

Частным решением уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении $C$: $y = \varphi(x, C_0)$, где $C_0$ – число. Аналогично определяется частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

**Задача Коши.** Найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$. Другими словами, найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

## 25.1. Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнение первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \qquad (25.1)$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ – функции только от $x$, $Y(y)$, $Y_1(y)$ – функции только от $y$.

Предположив, что $X_1(x)\,Y(y) \neq 0$, и разделив обе части уравнения (25.1) на это произведение, получим уравнение

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0,$$

которое называют уравнением с разделенными переменными; оно имеет общий интеграл

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C.$$

Замечание. Корни уравнений $X_1(x) = 0$, $Y(y) = 0$ являются решениями уравнения (25.1).

Пример 25.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = (1-x)/(2+y)$. Найти решение, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 5$.

Это уравнение можно записать в виде

$$dy/dx = (1-x)/(2+y), \text{ или } (x-1)\,dx + (y+2)\,dy = 0;$$

Интегрируя, получаем

$$(x-1)^2/2 + (y+2)^2/2 = C_1, \text{ или } (x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2 \quad (C^2 = 2C_1).$$

Общий интеграл данного уравнения геометрически представляет собой множество концентрических окружностей с центром в точке $S(1,-2)$. Найдем решение, удовлетворяющее указанному условию. Подставив в выражение для общего интеграла значения $x = 5$, $y = 1$, определим $C$: $(5-1)^2 + (1+2)^2 = C^2$, $C^2 = 25$. Следовательно, искомый частный интеграл имеет вид $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; он определяет окружность, проходящую через точку $M(5, 1)$.

## 25.2. Однородные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется однородной измерения $m$, если для любых $t$ выполняется тождество

$$F(tx, ty) = t^m F(x, y). \tag{25.2}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{25.3}$$

называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

С помощью новой переменной $u$, вводимой по формуле

$$y = ux, \tag{25.4}$$

однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{25.5}$$

также можно привести к однородному уравнению с помощью преобразования $x=u+h$, $y=v+k$, где $h$ и $k$ определяются системой уравнений

$$ah+bk+c=0,\quad a_1h+b_1k+c_1=0,$$

в случае, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Уравнение (25.5) сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью преобразования $ax+by=z$ в случае, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 25.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'=y\ln(y/x)$.

Это уравнение приводится к виду (25.3), где $P(x,y)=y\ln(y/x)$, $Q(x,y)=-x$ – однородные функции первого измерения; они удовлетворяют условию (25.2) при $m=1$. Полагая $y/x=u$, или $y=ux$ (см. (25.4)), находим $y'=u'x+ux'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем $x(u'x+ux')=ux\ln u$, $u'x=u\ln u-u$, $x\dfrac{du}{dx}=u(\ln u-1)$, $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$.

Вводя новую переменную $t$ по формуле $\ln u=t$ и интегрируя, находим

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dt}{t-1}=\ln(\ln u-1);$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+\ln C,\quad \ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C,$$

откуда $Cx=\ln u-1$, $Cx=\ln(y/x)-1$, $Cx+1=\ln(y/x)$, $y/x=e^{Cx+1}$, $y=xe^{Cx+1}$.

Следовательно, $y=xe^{Cx+1}$ – общее решение.

## 25.3. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Уравнение

$$\varphi_1(x)\,y'+\varphi_2(x)\,y+\varphi_3(x)=0,$$

или

$$y'+p(x)\,y=q(x), \tag{25.6}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение линейного уравнения ищут в виде произведения двух функций:

$$y(x)=u(x)\,v(x). \tag{25.7}$$

Подстановка выражений для $y$ и $y'$ в уравнение (25.6) приводит его к виду

$$v\frac{du}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}+p(x)v\right)u=q(x).$$

В качестве $v$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $v'(x)+p(x)v=0$, тогда функция $u$ определяется уравнением $vu'(x)=q(x)$.

Для решения уравнения (25.6) можно применить метод вариации произвольной постоянной, состоящий в следующем: сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения (т.е. уравнения, для которого $q(x)=0$); величину $C$, входящую в это общее решение, полагают функцией $x$ и находят ее.

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha$ – действительное число. Это уравнение является линейным в случае $\alpha=0$, $\alpha=1$. В других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки $u=y^{1-\alpha}$.

Пример 25.3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x^2+1.$$

Данное уравнение является линейным. Решение этого уравнения ищем в виде (25.7). Поскольку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, то

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}uv=x^2+1,$$

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x^2+1. \qquad (1)$$

В качестве $v$ выберем одну из функций, обращающих в нуль коэффициент при $u$ в уравнении (1), т.е. решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными $v$ и $x$. Разделив переменные, получим

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2+1},$$

откуда $\ln v=\ln(x^2+1)+\ln C$, $v=C(x^2+1)$.

Полагая $C=1$, получаем $v=x^2+1$. Уравнение (1) с учетом (2) сводится к уравнению

$$v\frac{du}{dx}=x^2+1, \text{ или } \frac{du}{dx}(x^2+1)=(x^2+1), \ \frac{du}{dx}=1,$$

из которого определяется $u=x+C$. По формуле (25.7) находим общее решение

$$y=uv=(x+C)(x^2+1).$$

## 25.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{25.8}$$

левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции, т.е.

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y). \tag{25.9}$$

Общий интеграл уравнения (25.8) определяется формулой

$$U(x, y) = C. \tag{25.10}$$

Поскольку

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy, \tag{25.11}$$

то из равенств (25.9) и (25.11) следуют уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y), \tag{25.12}$$

которыми определяется функция $U = U(x, y)$, входящая в формулу (25.10).

Необходимое и достаточное условие того, что уравнение (25.8) является уравнением в полных дифференциалах, выражается равенством

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25.13}$$

Если левая часть уравнения (25.8) не является полным дифференциалом, но становится таковым при умножении на некоторую функцию $\mu = \mu(x, y)$ $(\mu(Pdx + Qdy) = dU)$, то $\mu = \mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем.

Интегрирующий множитель зависит только от $x$, т.е. $\mu = \mu(x)$, если

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x),$$

и зависит только от $y$, если

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(y).$$

Пример 25.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(2x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$.

Для данного уравнения

$$P(x, y) = 2x - 3y, \quad Q(x, y) = 2y - 3x; \quad P'_y = -3, \quad Q'_x = -3.$$

Так как выполнено условие (25.13), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно, равенства (25.12) принимают вид

$$U'_x = 2x - 3y, \quad U'_y = 2y - 3x. \tag{1}$$

Интегрируя первое из этих уравнений ($y$ при этом считается постоянным), находим

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + \varphi(y), \tag{2}$$

где $\varphi(y)$ – функция, подлежащая определению.

Дифференцируя по $y$ функцию $U = U(x, y)$ и принимая во внимание второе из равенств (1), получаем $-3x + \varphi'(y) = 2y - 3x$, откуда

$$\varphi'(y) = 2y, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 2y, \quad d\varphi = 2ydy, \quad \varphi(y) = y^2 + C_1.$$

Подставив выражение для $\varphi(y)$ в равенство (2), найдем

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + C_1.$$

В соответствии с формулой (25.10) получаем

$$x^2 - 3xy + y^2 + C_1 = C_2, \text{ или } x^2 - 3xy + y^2 = C, \text{ где } C = C_2 - C_1.$$

Итак, $x^2 - 3xy + y^2 = C$ – общий интеграл данного уравнения.

Замечание. Это уравнение является также однородным; его можно проинтегрировать с помощью формулы (25.4).

## 25.5. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Решение многих научных и технических задач приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение линии или поверхности и т. п.

При решении таких задач можно руководствоваться следующим.

1. Необходимо сначала составить дифференциальное уравнение из условия задачи.
2. Определить тип полученного уравнения и выбрать метод решения.
3. Найти общее решение уравнения.
4. Получить частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.
5. В случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров (коэффициент пропорциональности и др.).
6. Если это требуется, найти численные значения искомых величин.

Составление дифференциального уравнения по условию научной или технической задачи состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, в нахождении выражения для производной.

В некоторых случаях приращения целесообразно сразу заменить соответствующими дифференциалами.

При составлении дифференциальных уравнений используются соответственно геометрический или механический смысл производной; кроме того, в зависимости от условия задачи применяются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук.

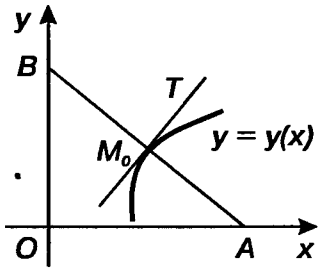

Рис. 25.1

Пример 25.5. Найти линию, у которой отрезок нормали в любой ее точке, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке. Составить уравнение такой линии, проходящей через точку $M(5,4)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка (рис. 25.1) искомой линии $y = y(x)$, где $y(x)$ – пока неизвестная функция аргумента $x$. Уравнение нормали к линии $y = y(x)$ в точке $M_0$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обозначим через $A$ и $B$ точки пересечения нормали с координатными осями. Положив в этом уравнении $y = 0$, найдем $x = x_0 + y_0 y'(x_0)$ – абсциссу точки $A$; при $x = 0$ из того же уравнения найдем $y = y_0 + \dfrac{x_0}{y'(x_0)}$ – ординату точки $B$.

Поскольку $M_0$ – середина отрезка $AB$, то

$$\frac{x_0 + y_0 y'(x_0)}{2} = x_0, \quad \frac{y_0 + x_0/y'(x_0)}{2} = y_0.$$

Каждое из этих уравнений приводится к уравнению

$$y'(x_0)\, y_0 - x_0 = 0. \qquad (1)$$

Уравнению (1) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ искомой линии, поэтому

$$y'(x)\, y - x = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем общий интеграл

$$y^2 - x^2 = C. \qquad (3)$$

Общий интеграл (3) определяет множество равносторонних гипербол с действительной осью $Oy$ при $C > 0$; множество равносторонних гипербол с действительно осью $Ox$ при $C < 0$; пару прямых $y = x$, $y = -x$ при $C = 0$. Найдем ту линию, которая проходит через точку $M(5,4)$. Подставив в уравнение (3) координаты точки $M$, определим значение параметра $C$: $4^2 - 5^2 = C$, $C = -9$. При $C = -9$ уравнение (3) принимает вид $y^2 - x^2 = -9$, или $x^2 - y^2 = 9$.