Глава 26

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение относительно искомой функции, ее первой и второй производной. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где $F(x, y, y', y'')$ – заданная функция указанных аргументов.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ от x и двух независимых произвольных постоянных C_1 и C_2, обращающая данное уравнение в тождество. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, называют общим интегралом.

Частным решением уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$ называется решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающееся из общего путем фиксирования значений произвольных постоянных: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$.

Задача Коши. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее условиям: $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$. Числа C_1^0, C_2^0, определяющие искомое частное решение, находятся из системы уравнений:

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2),\ y_0' = \varphi_x'(x_0, C_1, C_2).$$

26.1. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Случаи понижения порядка

Если уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ разрешимо относительно старшей производной, то его можно представить в виде

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{26.1}$$

К простейшим интегрируемым дифференциальным уравнениям второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части равенства (26.1), зависит только от одного из трех аргументов:

$$y'' = f(x), \tag{26.2}$$

$$y'' = f(y), \tag{26.3}$$

$$y'' = f(y'). \tag{26.4}$$

Общее решение уравнения (26.2) находится двукратным интегрированием.

Уравнения (26.3) и (26.4) интегрируются подстановкой

$$y' = p, \tag{26.5}$$

которая дает возможность свести их к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p, \quad p\frac{dp}{dy} = f(y);$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = f(p).$$

Уравнение

$$y'' = f(x, y') \tag{26.6}$$

подстановкой (26.5) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с неизвестной функцией p.

Уравнение

$$y'' = f(y, y')$$

той же подстановкой сводится к уравнению первого порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

в котором роль независимой переменной играет y.

Пример 26.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' = \cos x - \sin x$.

Это уравнение вида (26.2). Преобразуя исходное уравнение, получаем

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}, \quad \frac{dy'}{dx} = \cos x - \sin x, \quad dy' = (\cos x - \sin x)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим производную искомой функции $y' = \sin x + \cos x + C_1$. Так как

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x + C_1, \quad dy = (\sin x + \cos x + C_1)\,dx,$$

то в результате интегрирования полученного уравнения находим общее решение $y = \sin x - \cos x + C_1 x + C_2$.

Пример 26.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $2y''y = 1$, удовлетворяющее условиям: $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 1$.

Данное уравнение можно разрешить относительно y'', правая часть его будет зависеть только от y; это уравнение вида (26.4).

Применяем подстановку (26.5), т.е. полагаем $y' = p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \quad 2\frac{dp}{dx}p = 1, \quad 2pdp = dx,$$

откуда $p^2 = x + C_1$, $p = \pm\sqrt{x + C_1}$. Из начального условия $p = y' = 1$ при $x = 1$

определяем $C_1 = 0$, поэтому $y' = p = \sqrt{x}$, $y' = \sqrt{x}$, $dy = \sqrt{x}dx$,

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2} + C_2. \qquad (1)$$

Используя начальное условие $y = 0$ при $x = 1$, определяем $C_2 = -2/3$. Функция (1) принимает вид $y = (2/3)(x^{3/2} - 1)$, она определяет искомое частное решение.

Пример 26.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Это уравнение вида (26.6). Применяем подстановку (26.5). Так как

$$y' = p \qquad (1)$$

и $y'' = p'$, то исходное уравнение можно записать так:

$$p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции p. Полагая

$$p = uv, \qquad (3)$$

находим $p' = u'v + uv'$ и подставляем выражения для p и p' в уравнение (2): $u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \sin 2x$,

$$uv' + v(u' + u \operatorname{tg} x) = \sin 2x. \qquad (4)$$

В качестве $u = u(x)$ возьмем функцию, для которой

$$u' + u \operatorname{tg} x = 0, \qquad (5)$$

тогда уравнение (4) примет вид

$$uv' = \sin 2x. \qquad (6)$$

Из уравнения (5) находим $u = u(x)$:

$$u' + u\frac{\sin x}{\cos x} = 0, \quad \frac{du}{dx} + u\frac{\sin x}{\cos x} = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad u = \cos x.$$

Подставив это выражение в уравнение (6), получим

$$\cos x \frac{dv}{dx} = \sin 2x, \quad dv = 2\sin x dx, \quad v = -2\cos x + C_1.$$

По формуле (3) найдем p: $p = uv = \cos x(-2\cos x + C_1)$, $p = C_1 \cos x - 2\cos^2 x$. Уравнение (1) примет вид

$$y' = C_1 \cos x - 2\cos^2 x, \quad dy = (C_1 \cos x - 2\cos^2 x)\,dx,$$

откуда

$$y = \int C_1 \cos x dx - 2\int \frac{1 + \cos 2x}{2}dx, \quad y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2.$$

26.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{26.7}$$

где a, b, c – постоянные ($a \neq 0$), называется дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (26.7) называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами или уравнением без правой части: $ay'' + by' + cy = 0$.

Последнее уравнение можно привести к виду

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{26.8}$$

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{26.9}$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (26.8).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (26.9) получаем общее решение уравнения (26.8) в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{26.10}$$

если корни действительны и различны;

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{k_1 x}, \tag{26.11}$$

если корни действительны и равны;

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \tag{26.12}$$

если $k_1 = \alpha - i\beta$, $k_2 = \alpha + i\beta$ – комплексные числа.

Пример 26.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$; найти частное решение, удовлетворяющее условиям: $y = 2$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Характеристическое уравнение (26.9) для данного уравнения принимает вид $k^2 + 2k - 3 = 0$. Так как $k_1 = 1$, $k_2 = -3$, то общее решение в соответствии с (26.10) определяется формулой

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}. \tag{1}$$

Чтобы найти указанное частное решение, подставим начальные данные $x = 0$, $y = 2$, $y' = 2$ в выражения для y и $y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x}$: $2 = C_1 + C_2$, $2 = C_1 - 3C_2$. Из этой системы находим $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

При этих значениях C_1 и C_2 функция (1) принимает вид $y = 2e^x$. Итак, $y = 2e^x$ – искомое частное решение.

Пример 26.5. Проинтегрировать уравнение $16y''+8y'+y=0$.

Характеристическое уравнение $16k^2+8k+1=0$ имеет два равных корня $k_1=k_2=-1/4$. Общее решение данного дифференциального уравнения в соответствии с (26.11) определяется формулой $y=(C_1+C_2x)\,e^{-x/4}$.

Пример 26.6. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+5y=0$.

Характеристическое уравнение $k^2-2k+5=0$ имеет комплексные корни $k_1=1+2i$, $k_2=1-2i$. Общее решение определяется формулой (26.12), в которой нужно положить $\alpha=1$, $\beta=2: y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

Пример 26.7. Решить уравнение $16y''+y=0$.

Характеристическое уравнение $16k^2+1=0$ имеет чисто мнимые корни $k_1=\frac{1}{4}i$, $k_2=-\frac{1}{4}i$. Пользуясь формулой (26.12), полагая в ней $\alpha=0$, $\beta=1/4$, получаем общее решение $y=C_1\cos(x/4)+C_2\sin(x/4)$.

26.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Если в уравнении (26.7) $f(x)\neq 0$, то оно называется неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами; это уравнение может быть приведено к виду

$$y''+py'+qy=\varphi(x). \tag{26.13}$$

Общее решение уравнения (26.13) определяется формулой

$$y=y_0+y_1, \tag{26.14}$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+py+qy=0$, а y_1 – частное решение уравнения (26.13).

В простейших случаях, когда функция $\varphi(x)$, входящая в уравнение (26.13), является показательной или многочленом, указанное частное решение находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$\varphi(x)=ae^{kx}, \tag{26.15}$$

где a, k – постоянные, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде

$$y_1=Ae^{kx}, \tag{26.16}$$

когда k не является корнем характеристического уравнения или в виде $y_1=Axe^{kx}$, когда k – простой корень характеристического уравнения, или $y_1=Ax^2e^{kx}$, когда k – кратный корень указанного уравнения.

Если $\varphi(x) = a\cos kx + b\sin kx$, где a, b, k – постоянные, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде $y_1 = A\cos kx + B\sin kx$, когда $p^2 + (q - k^2)^2 \neq 0$, и в виде $y_1 = x(A\cos kx + B\sin kx)$, когда $p = 0$, $q = k^2$.

Если $\varphi(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде $y_1 = Q_n(x)$ в случае, когда $q \neq 0$, и в виде $y_1 = xQ_n(x)$, когда $q = 0$, $p \neq 0$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Пусть дано неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{26.17}$$

правая часть которого есть сумма двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Если y_1 является частным решением уравнения $y'' + py' + qy = \varphi_1(x)$, а y_2 – частным решением уравнения $y'' + py' + qy = \varphi_2(x)$, то $y_1 + y_2$ – частное решение уравнения (26.17).

Пример 26.8. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 4i$, $k_2 = -2 - 4i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой $y_0 = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$.

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения. Так как в данном случае $\varphi(x) = 34e^{-x}$ (т.е. имеет вид (26.15): $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 34$, $m = -1$) и $m = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (26.16) ищем частное решение в виде $y_1 = Ae^{-x}$. Находя производные этой функции $y_1' = -Ae^{-x}$, $y_1'' = Ae^{-x}$ и подставляя выражения для y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение, получаем $Ae^{-x} - 4Ae^{-x} + 20Ae^{-x} = 34e^{-x}$. Так как y_1 – решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т.е. является тождеством: $17Ae^{-x} = 34e^{-x}$, откуда $17A = 34$, $A = 2$. Следовательно, частное решение имеет вид $y = 2e^{-x}$. На основании формулы (26.14) получаем общее решение

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 2e^{-x}.$$

Пример 26.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$.

Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 8$, $b = -4$, $c = -14$.

Так как $q \neq 0$, то частное решение ищем в виде $y_1 = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя выражения для y_1, $y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$ в данное уравнение, получаем $2A + 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 4x - 14$, или $4Ax^2 + (10A + 4B)x + (2A + 5B + 4C) = 8x^2 - 4x - 14$.

Поскольку y_1 – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться при всех x, т.е. являться тождеством, поэтому коэффи-

циенты при одинаковых степенях x, стоящие в разных частях, равны между собой: $4A=8$, $10A+4B=-4$, $2A+5B+4C=-14$.

Из полученной системы уравнений находим, что $A=2$, $B=-6$, $C=3$, поэтому $y_1=2x^2-6x+3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+5y'+4y=0$ определяется формулой $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$, так как характеристическое уравнение $k^2+5k+4=0$ имеет корни $k_1=-1$, $k_2=-4$.

На основании формулы (26.14) получаем общее решение

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+2x^2-6x+3.$$

Пример 26.10. Проинтегрировать уравнение

$$y''-2y'+2y=-85\cos 3x.$$

Это уравнение вида (26.13), где $\varphi(x)=a\cos 3x+b\sin 3x$, причем $a=-85$, $b=0$. Частное решение данного уравнения ищем в виде $y_1=A\cos 3x+B\sin 3x$, тогда $y_1'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$, $y_1''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$. Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим тождество $-9A\cos 3x-9B\sin 3x-2(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+2(A\cos 3x+B\sin 3x)=-85\cos 3x$, или $-(7A+6B)\cos 3x+(6A-7B)\sin 3x=-85\cos 3x$, откуда $-(7A+6B)=-85$, $6A-7B=0$. Решив последнюю систему уравнений, найдем, что $A=7$, $B=6$. Следовательно, $y_1=7\cos 3x+6\sin 3x$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-2y'+2y=0$ определяется формулой $y_0=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x$ (см. (26.12)), так как характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет комплексные корни $k_1=1-i$, $k_2=1+i$. На основании формулы (26.14) получаем общее решение $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+7\cos 3x+6\sin 3x$.

Пример 26.11. Проинтегрировать уравнение $y''-6y'+8y=14e^{2x}$.

Соответствующее однородное уравнение $y''-6y'+8y=0$ имеет общее решение $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (получено по формуле (26.10), ибо $k_1=2, k_2=4$ – различные действительные корни характеристического уравнения $k_2-6k+8=0$. Исходное уравнение является уравнением вида (26.13), где функция $\varphi(x)$ определяется формулой (26.15), причем $a=14$, $k=2$ и $k=2$ – корень характеристического уравнения.

Частное решение данного неоднородного уравнения в этом случае следует искать в виде $y_1=Axe^{2x}$. Так как $y_1'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$, $y_2''=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}$, то подстановка выражения для y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение приводит к тождеству $4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-6(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+8Axe^{2x}=14e^{2x}$, или $-2Ae^{2x}=14e^{2x}$, откуда $-2A=14$, $A=-7$. Таким образом, $y_1=-7xe^{2x}$, $y=y_0+y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-7xe^{2x}$.