

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 27.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = y(x)$  и ее производные до порядка  $n$  включительно:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (27.1)$$

Решением дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется функция  $y = y(x)$ , подстановка которой и ее производных в это уравнение обращает его в тождество. График решения называется интегральной кривой.

**Задача Коши.** Найти решение  $y = y(x)$  уравнения (27.1), удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, \dots, \quad y^{n-1} = y^{n-1}_0 \quad \text{при } x = x_0, \quad (27.2)$$

где  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{n-1}_0$  – заданные числа, называемые начальными данными решения.

**Теорема 27.1.** Если в уравнении  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  и ее частные производные по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  непрерывны в некоторой замкнутой области  $G$ , определяемой неравенствами:

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad |y' - y'_0| \leq b, \dots, \quad |y^{(n-1)} - y^{(n-1)}_0| \leq b \quad (a > 0, b > 0),$$

и, следовательно, ограничены в ней, т.е.

$$\left| f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right| \leq C, \quad \left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}} \right| \leq C_1$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1, y^0 \equiv y),$$

где  $C > 0$ ,  $C_1 > 0$ ,  $M(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in G$ ,  $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in G$ , то существует единственное решение  $y = y(x)$  данного уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0 \quad \text{при } x = x_0.$$

Это решение определено и непрерывно вместе с производными до порядка  $n$  включительно в промежутке  $|x - x_0| \leq h$ , где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{\max_G (C, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right)$$

Общим решением дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (27.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (27.3)$$

обладающая следующими свойствами: 1) при любых значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  она обращает уравнение (27.1) в тождество; 2) значения постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  можно подобрать так, чтобы она удовлетворяла условиям (27.2).

Частным решением дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется решение, получающееся из общего решения (27.3) при фиксированных значениях произвольных постоянных, т.е. функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ , где  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  – некоторые числа.

Решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Общим интегралом дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (27.4)$$

неявно определяющее общее решение  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  этого уравнения. Частным интегралом дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется соотношение  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , полученное из общего интеграла путем фиксирования значений  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  произвольных постоянных.

## 27.2. Простейшие интегрируемые дифференциальные уравнения высших порядков

Если дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка (27.1) разрешимо относительно старшей производной, то его можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (27.5)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений (27.1) и (27.5). Пусть уравнение (27.1) не содержит  $k-1$  первых последовательных производных, т.е. имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (27.6)$$

Это уравнение подстановкой  $y^{(k)} = z$  приводится к уравнению  $F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ , порядок которого равен  $n-k$ .

Если правая часть уравнения (27.5) зависит только от  $x$ , тогда

$$y^{(n)} = f(x). \quad (27.7)$$

Общее решение уравнения (27.7) находится  $n$ -кратным интегрированием.

Пример 27.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y''' = \operatorname{sh} x + x$ .

Это уравнение вида (27.7), его общее решение находится трехкратным интегрированием:

$$\begin{aligned} y''' &= (y'')' = \frac{dy''}{dx}, \quad \frac{dy''}{dx} = \operatorname{sh} x + x, \quad dy'' = (\operatorname{sh} x + x) dx, \\ y'' &= \int (\operatorname{sh} x + x) dx = \operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1, \quad dy' = (\operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1) dx, \\ y' &= \int (\operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1) dx = \operatorname{sh} x + x^3/6 + C_1 x + C_2, \\ y &= \int (\operatorname{sh} x + x^3/6 + C_1 x + C_2) dx = \operatorname{ch} x + x^4/24 + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Пример 27.2. Найти решение уравнения  $xy^{(IV)} - y''' = 0$ , удовлетворяющее условиям:  $y_0 = 4$ ,  $y'_0 = 3$ ,  $y''_0 = -4$ ,  $y'''_0 = 24$  при  $x_0 = 1$ .

Найдем сначала общее решение данного уравнения, являющееся уравнением вида (27.6). Введем новую переменную  $z$  по формуле  $y''' = z$ , тогда  $y^{(IV)} = z'$ . Исходное уравнение примет вид  $xz' - z = 0$ . Интегрируя это дифференциальное уравнение первого порядка, находим

$$x \frac{dz}{dx} - z = 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln z = \ln x + \ln C_1, \quad z = C_1 x.$$

Так как  $y''' = z$ , то  $y''' = C_1 x$ . Находим общее решение этого уравнения:  $dy'' = C_1 x dx$ ,  $y'' = (C_1/2)x^2 + C_2$ ,  $dy' = ((C_1/2)x^2 + C_2) dx$ ,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3, \quad dy = \left( \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3 \right) dx, \\ y &= \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned} \quad (1)$$

Поставляя в выражения для  $y, y', y'', y'''$  значение  $x_0 = 1$  и учитывая начальные данные, получаем систему уравнений

$$C_1/24 + C_2/2 + C_3 + C_4 = 4, \quad C_1/6 + C_2 + C_3 = 3, \quad C_1/2 + C_2 = -4, \quad C_1 = 24.$$

Из этой системы определяем значения произвольных постоянных:  $C_1 = 24$ ,  $C_2 = -16$ ,  $C_3 = 15$ ,  $C_4 = -4$ . Подставив эти значения в формулу (1), найдем ис- комое частное решение  $y = x^4 - 8x^2 + 15x - 4$ .

### 27.3. Линейные однородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – функции от  $x$  или постоянные.

Если  $f(x) \neq 0$ , то уравнение называется неоднородным; если  $f(x) \equiv 0$ , уравнение называют однородным, последнее имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (27.8)$$

Если функции  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$  являются линейно независимыми решениями уравнения (27.8), то его общее решение определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (27.9)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

В случае, когда коэффициенты уравнения (27.8) – постоянные величины, уравнение называется линейным однородным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение его находится так же, как и в случае уравнения второго порядка:

1) составляется соответствующее характеристическое уравнение  
 $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0;$

2) находятся корни характеристического уравнения  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ;

3) записываются частные линейно независимые решения, причем принимается во внимание, что:

а) каждому действительному простому корню  $k$  соответствует частное решение  $e^{kx}$ ;

б) каждой паре комплексно-сопряженных корней  $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$  соответствуют два частных решения:  $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ ;

в) каждому действительному корню  $k$  кратности  $\mu$  соответствуют  $\mu$  линейно независимых частных решений:  $e^{kx}, x e^{kx}, x^2 e^{kx}, \dots, x^{\mu-1} e^{kx}$ ;

г) каждой паре комплексно-сопряженных корней  $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$  кратности  $\mu$  соответствует  $2\mu$  частных решений:  $e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,

число частных решений равно степени характеристического уравнения (или порядку данного линейного дифференциального уравнения);

4) общее решение получается по формуле (27.9), в которой  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – линейно независимые решения.

**З а м е ч а н и е .** Функции

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (27.10)$$

называются линейно зависимыми на отрезке  $[a, b]$ , если существуют действительные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, такие, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \quad (27.11)$$

Функции (27.10) называются линейно независимыми, если тождество (27.11) выполняется лишь в случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Если функции  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$  линейно зависимы на отрезке  $[a, b]$ , то определитель Вронского  $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$  тождественно равен нулю на этом отрезке, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для линейно независимых функций определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке этого отрезка.

**Пример 27.3.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$ .

Характеристическое уравнение  $k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = 0$  имеет корни  $k_1 = -2, k_2 = 2, k_3 = 3$  (так как  $k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = k^2(k - 3) - 4(k - 3) = (k^2 - 4)(k - 3)$ ). Этим корням соответствуют линейно независимые решения  $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ . В соответствии с формулой (27.9) получаем общее решение  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$ .

**Пример 27.4.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y^{(IV)} + y'' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$ .

Составляем характеристическое уравнение  $k^4 + k^3 - 3k^2 - 5k - 2 = 0$ . Поскольку

$$\begin{aligned} k^4 + k^3 - 3k^2 - 5k - 2 &= k^4 + k^3 - 3k^2 - 3k - 2k - 2 = k^3(k+1) - \\ &- 3k(k+1) - 2(k+1) = (k+1)(k^3 - 3k - 2) = (k+1)(k^3 - k - 2k - 2) = \\ &= (k+1)[k(k^2 - 1) - 2(k+1)] = (k+1)^2(k(k-1) - 2) = \\ &= (k+1)^2(k^2 - k - 2) = (k+1)^3(k-2), \end{aligned}$$

то  $(k+1)^3(k-2) = 0$ , откуда

$$k_1 = k_2 = k_3 = -1, \quad k_4 = 2.$$

Корень  $k = -1$  является трехкратным, ему соответствуют линейно независимые решения  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = xe^{-x}$ ,  $y_3 = x^2e^{-x}$ , простому корню  $k_4 = 2$  соответствует решение  $y_4 = e^{2x}$ . Общее решение определяется формулой  $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4e^{2x}$ , или  $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x} + C_4e^{2x}$ .

**Пример 27.5.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y''' - y'' + y' - y = 0$ .

Характеристическое уравнение  $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$  имеет корни  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -i$ ,  $k_3 = i$  (поскольку  $k^3 - k^2 + k - 1 = k^2(k-1) + (k-1) = (k-1)(k^2+1)$ ). Общее решение имеет вид  $y = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ .

**Пример 27.6.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y^{(V)} - y^{(IV)} - 81y' + 81y = 0$ .

Характеристическое уравнение  $k^5 - k^4 - 81k + 81 = 0$  имеет корни  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = -3$ ,  $k_4 = 3i$ ,  $k_5 = -3i$  (так как  $k^5 - k^4 - 81k + 81 = k^4(k-1) - 81(k-1) = (k-1)(k^4 - 81) = (k-1)(k^2 - 9)(k^2 + 9)$ ). Следовательно, уравнение имеет общее решение  $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x} + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$ .

## 27.4. Линейные неоднородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \quad (27.12)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad (27.13)$$

у которого коэффициенты те же, что и в уравнении (27.12).

Общее решение уравнения (27.12) определяется формулой

$$y = y_0 + y_1, \quad (27.14)$$

где  $y_0$  – общее решение уравнения (27.13),  $y_1$  – частное решение уравнения (27.12).

Частное решение уравнения (27.12) можно находить способом вариации произвольных постоянных. В простейших случаях, когда правая часть этого уравнения – алгебраический или тригонометрический многочлен и др., частные решения находят с помощью метода неопределенных коэффициентов:

1. Пусть

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \quad (27.15)$$

где  $P_n(x)$  – многочлен степени  $n$ , число  $\alpha$  не является корнем характеристического уравнения, тогда

$$y_1 = Q_n(x) e^{\alpha x}, \quad (27.16)$$

где  $Q_n(x)$  – многочлен той же степени  $n$  с неопределенными коэффициентами; если  $\alpha$  – корень кратности  $k$  названного уравнения, тогда

$$y_1 = x^k Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

2. Пусть  $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ , где  $a, b$ ,  $\beta$  – постоянные, и  $\beta i$  не является корнем характеристического уравнения, тогда  $y_1 = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ , где  $A$  и  $B$  – постоянные неопределенные коэффициенты, и  $y_1 = x^\lambda (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ , если  $\beta i$  – корень кратности  $\lambda$  характеристического уравнения.

3. Пусть

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  – многочлены от  $x$ , тогда

$$y_1 = U_v(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_v(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad v = \max(m, n)$$

в случае, когда число  $\alpha + i\beta$  не является корнем характеристического уравнения, и

$$y_1 = x^\lambda (U_v(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_v(x) e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

в случае, когда  $\alpha + i\beta$  – корень кратности  $\lambda$  указанного уравнения.

Пример 27.7. Проинтегрировать линейное неоднородное уравнение  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15$ .

Соответствующее однородное уравнение  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$  имеет общее решение  $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ .

Найдем частное решение исходного уравнения, правая часть которого является многочленом третьей степени (функция (27.15) в случае  $n=3$ ,  $\alpha=0$ ;  $P_3(x)=4x^3-4x^2-20x+15$ ). В соответствии с формулой (27.16) полагаем  $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ . Поскольку  $y'_1 = 3Ax^2 + 2Bx + C$ ,  $y''_1 = 6Ax + 2B$ ,  $y'''_1 = 6A$ , то

$$\begin{aligned} 6A - 2(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) &= \\ &= 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2Ax^3 + (2B - 3A)x^2 + (2C - 2B - 12A)x + (6A - 4B - 3C + 2D) &= \\ &= 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему уравнений

$$2A = 4, \quad 2B - 3A = -4, \quad 2C - 2B - 12A = -20, \quad 6A - 4B - C + 2D = 15,$$

из которой находим  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 3$ ,  $D = 5$ . Следовательно,  $y_1 = 2x^3 + x^2 + 3x + 5$ . По формуле (27.14) получаем общее решение  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + 2x^3 + x^2 + 3x + 5$ .

## 27.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется совокупность  $n$  уравнений вида

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ &\dots \\ y'_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{aligned} \quad (27.17)$$

где  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$ , ...,  $y_n = y_n(x)$  – неизвестные функции переменной  $x$ ,  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) – постоянные величины,  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – заданные функции. Если  $f_k(x) \equiv 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Решением системы называется совокупность  $n$  функций

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, \quad y_n = \varphi_n(x),$$

обращающих каждое из уравнений этой системы в тождество.

**Задача Коши.** Найти решение системы (27.17), удовлетворяющее условиям:

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \dots, \quad y_n = b_n \text{ при } x = x_0.$$

Методом исключения ( $n-1$ ) неизвестных функций систему (27.17) в некоторых случаях можно привести к линейному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами относительно одной из функций.

**Замечание.** Если аргумент функций обозначать через  $t$ , систему (27.17) можно записать так:

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^n a_{ki}y_i + f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (27.18)$$

где  $\dot{y}_k$  – производная функция  $y_k = y_k(t)$  по этому аргументу.

**Пример 27.8.** Найти общее решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами  $\frac{dx}{dt} = 3x + y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 8x + y$ .

Данную систему запишем в виде

$$\dot{x} = 3x + y, \quad \dot{y} = 8x + y.$$

Дифференцируя по  $t$  первое уравнение системы и используя данные уравнения, находим  $\ddot{x} = 3\dot{x} + \dot{y} = 3\dot{x} + (8x + y) = 3\dot{x} + 8x + (\dot{x} - 3x) = 4\dot{x} + 5x$ ,  $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ . Полученное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет общее решение  $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$ . Поскольку  $y = \dot{x} - 3x$  и  $\dot{x} = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t}$ , то  $y = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - 3(C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}) = 2C_2 e^{5t} - 4C_1 e^{-t}$ .

Следовательно, общее решение данной системы определяется формулами  
 $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$ ,  $y = 2C_2 e^{5t} - 4C_1 e^{-t}$ .

Пример 27.9. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений  
 $\ddot{x} = 12x - 11y + t$ ,  $\dot{y} = 13x - 12y - t$ .

Эта система является неоднородной. Дифференцируя первое уравнение и учитывая данные уравнения, получаем  $\ddot{x} = 12\dot{x} - 11\dot{y} + 1 = 12(12x - 11y + t) - 11(13x - 12y - t) + 1 = x + 23t + 1$ . Интегрируя неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами  $\ddot{x} - x = 23t + 1$ , находим его общее решение  $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 23t - 1$ . Поскольку  $\dot{x} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 23$ , то из первого уравнения системы можно найти  $y$ :

$$y = \frac{1}{11}(12x - \dot{x} + t) = \frac{1}{11}[12(C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 23t - 1) - (-C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 23) + t] = \frac{13}{11}C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 25t + 1.$$

Следовательно, данная система имеет общее решение

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 23t - 1, \quad y = (13/11)C_1 e^{-t} + C_2 e^t - 25t + 1.$$

## 27.6. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{27.19}$$

где  $y_k = y_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – искомые функции независимой переменной  $x$ ,  $F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  – заданные функции указанных аргументов. Порядком нормальной системы называется число входящих в нее уравнений. Решением системы (27.19) в интервале  $(a, b)$  называется совокупность  $n$  функций  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ , определенных и непрерывно дифференцируемых в этом интервале, если она обращает в тождество каждое из уравнений данной системы:

$$y'_k(x) \equiv F_k(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ для всех } x \in (a, b).$$

**Задачи Коши для системы (27.19).** Найти решение

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \dots, \quad y_n = y_n(x), \tag{27.20}$$

удовлетворяющее условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0, \quad (27.21)$$

где  $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  – заданные числа.

Совокупность  $n$  функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 &= f_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned} \quad (27.22)$$

называется общим решением системы (27.19), если:

1) система (27.22) разрешима относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_2, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_n; \end{aligned} \quad (27.23)$$

2) совокупность функций (27.22) является решением системы (27.19) при всех значениях постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , определяемых формулами (27.23).

Решение, получающееся из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным.

Каждое из равенств (27.23), т. е.  $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), называется первым интегралом системы (27.19), а каждая из функций  $\varphi_k = \varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  – интегралом этой системы. Совокупность первых интегралов называется общим интегралом системы (27.19).

Первые интегралы (27.23), образующие общий интеграл системы (27.19), обладают тем свойством, что интегралы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  независимы, т. е. между функциями  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  не существует соотношения вида  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$  ни при каком выборе функции  $\Phi$ .

При некоторых условиях, наложенных на правые части уравнений системы (27.19), эта система имеет  $n$  независимых интегралов.

Перепишем систему (27.19) так:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{F_1} = \frac{dy_2}{F_2} = \dots = \frac{dy_n}{F_n}, \quad (27.24)$$

где  $F_i = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Система (27.24) дифференциальных уравнений первого порядка называется системой в симметрической форме, соответствующей нормальной системе (27.19).

Это частный случай системы в симметрической форме общего вида:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})} = \dots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}.$$

Если дана система дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (27.25)$$

то, принимая  $x_n$  за независимую переменную, ее можно привести к следующей нормальной системе  $(n-1)$ -го порядка:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \quad (27.26)$$

Решение, интеграл, первый интеграл, общее решение и общий интеграл системы (27.26) называют соответственно решением, интегралом, первым интегралом, общим решением и общим интегралом системы (27.25).

**Пример 27.10.** Найти общий интеграл системы  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ,  $\frac{dz}{dx} = -\frac{2z}{x}$ .

Интегрируем эту нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|z| = -2\ln|x| + \ln|C_2|,$$

$$y = C_1/x, \quad z = C_2/x^2, \quad (I)$$

$$xy = C_1, \quad x^2z = C_2. \quad (II)$$

Формулы (I) определяют общее решение системы. Каждое из равенств (II) является первым интегралом системы, а их левые части – интегралы системы. Поскольку интегралы  $\varphi_1 = xy$  и  $\varphi_2 = x^2z$  независимы, то общий интеграл системы определяется равенствами (II).

**Замечание.** Данную систему можно записать и в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-y/x} = \frac{dz}{-2z/x}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-2z}.$$

Из последней системы следует, что имеется еще один первый интеграл  $y^2/z = C_3$ . Соответствующий интеграл  $\varphi_3 = y^2/z$  выражается через независимые интегралы  $\varphi_1 = xy$  и  $\varphi_2 = x^2z$ , а именно  $\varphi_3 = \varphi_1^2/\varphi_2$ .

## 27.7. Применение матриц к решению систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

**Производная от матрицы.** Рассмотрим матрицу  $[a_{ik}(t)]$ , элементами которой являются дифференцируемые функции  $a_{ik}(t)$  аргумента  $t$ :

$$[a(t)] = [a_{ik}(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Производной матрицы  $[a(t)]$  называется матрица, элементы которой являются производными соответствующих элементов матрицы  $[a(t)]$ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} [a(t)] = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{bmatrix}.$$

Употребляют следующие символические записи этого равенства:

$$\frac{d}{dt} [a(t)] = \left[ \frac{d}{dt} a_{ik}(t) \right], \quad \frac{d}{dt} [a(t)] = \left[ \frac{d}{dt} [a(t)] \right], \quad D[a] = [Da].$$

**Матричная запись системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее решений.** Рассмотрим систему  $n$  линейных дифференциальных уравнений с искомыми функциями  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{27.27}$$

где  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $a_{ik}$  — постоянные.

Если

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},$$

$$[a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то систему (27.27) в матричной форме можно записать так:

$$\frac{d}{dt} [x(t)] = [a] \cdot [x], \text{ или } \frac{dx}{dt} = ax,$$

где  $x = [x] = [x(t)]$ ,  $a = [a] = [a_{ik}]_{nn}$ .

Решение системы (27.27) в матричной форме имеет вид  $[x] = [\alpha] \times [Ce^{kt}]$ , или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{k_n t} \end{bmatrix}, \quad (27.28)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – корни характеристического уравнения матрицы  $[a_{ik}]_{nn}$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \quad (27.29)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{bmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \vdots \\ \alpha_n^i \end{bmatrix},$$

числа  $\alpha'_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), соответствующие каждому значению  $k$ , определяются из системы уравнений  $[a - kE] \cdot [\alpha] = 0$ , или

$$\begin{bmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0. \quad (27.30)$$

Пример 27.11. Записать в матричной форме систему и решение системы линейных дифференциальных уравнений  $\dot{x}_1 = 4x_1 - 5x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2$ .

Так как

$$[a] = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ то } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

получена матричная форма данной системы уравнений.

Составляем характеристическое уравнение (по формуле (27.29)) и систему (27.30) для определения значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\begin{vmatrix} 4 - k & -5 \\ 3 & -4 - k \end{vmatrix} = 0, \quad (4 - k)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - (4 + k)\alpha_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение  $-(4 - k)(4 + k) + 15 = 0$ ,  $k^2 - 1 = 0$  имеет корни  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$ . Системы уравнений для определения чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  принимают вид

$$\begin{array}{ll} 5\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, & 3\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0, & 3\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0. \end{array} \quad (\text{I}) \quad (\text{II})$$

Из системы (I) следует, что  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Полагая  $\alpha_1^1 = 1$ , получаем  $\alpha_2^1 = 1$ . Из системы (II) находим  $\alpha_2 = (3/5)\alpha_1$ . Полагая  $\alpha_1^2 = 1$ , вычисляем  $\alpha_2^2 = 0,6$ . В соответствии с (27.28) получаем общее решение системы в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^t \end{bmatrix},$$

или в обычном виде  $x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$ ,  $x_2 = C_1 e^{-t} + 0,6C_2 e^t$ .