Глава 28

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

28.1. Основные определения

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных, ее аргументов и частных производных различных порядков. Если искомая функция u зависит от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то дифференциальное уравнение с частными производными имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$, F – заданная функция.

Порядком дифференциального уравнения с частными производными называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Решением дифференциального уравнения с частными производными называется функция, имеющая соответствующие частные производные и обращающая это уравнение в тождество. Проинтегрировать дифференциальное уравнение с частными производными – значит найти все его решения.

Пример 28.1. Проинтегрировать уравнение $u'_x(x, y) = 0$.

Этому уравнению удовлетворяет любая дифференцируемая функция $u = f(y)$, зависящая только от y, так как $f'_x(y) = 0$.

Пример 28.2. Проинтегрировать уравнение $u''_{yx}(x, y) = 0$.

Обозначим $u'_y = v$, тогда $u''_{yx} = (u'_y)'_x = v'_x$ и $v'_x = 0$, $v = f(y)$, где $f(y)$ – произвольная функция переменной y. Поскольку $u'_y = v = f(y)$, то $u(x, y) = \int f(y)\,dy + \psi(x)$, где $\psi(x)$ – произвольная функция аргумента x. Первое слагаемое последней формулы представляет собой произвольную функцию от y; обозначим ее через $\varphi(y)$, тогда $u(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$. Полученное решение содержит две произвольные функции.

28.2. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка от функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в общем виде можно записать так:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad u'_{x_1}, u'_{x_2}, \ldots, x'_{x_n}) = 0, \tag{28.1}$$

где F – заданная функция своих аргументов.

Линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{28.2}$$

где

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; X_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; X_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{28.3}$$

– заданные функции n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция.

Наряду с уравнением (28.2) рассматривают соответствующую ему систему дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{28.4}$$

в которой функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определяются формулами (28.3). Систему (28.4) можно записать и в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \; \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{28.5}$$

Теорема 28.1. *Если* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *интеграл системы* (28.4) *или* (28.5), *то* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *решение уравнения* (28.2).

Теорема 28.2. *Если* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *решение уравнения* (28.2), *то* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *интеграл системы* (28.4) *или* (28.5).

Теорема 28.3. *Если* $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$ $\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *независимые интегралы системы* (28.4), *то*

$$u = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{28.6}$$

где F – *произвольная функция, имеющая непрерывные частные производные по аргументам* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *является решением уравнения (28.2).*

Линейным неоднородным (или квазилинейным) уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = U, \tag{28.7}$$

где заданные функции $n+1$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ выражаются формулами

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ X_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots,$$

$$X_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \tag{28.8}$$

$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция. Не исключается случай, когда $U(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \equiv 0$, но хотя бы одна из функций X_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) зависит от u.

Наряду с уравнением (28.7) рассматривают систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{U}. \tag{28.9}$$

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ($\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$) – независимые интегралы системы (28.9), то

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{28.10}$$

где $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, будет решением.

Пример 28.3. Проинтегрировать уравнение $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Это уравнение вида (28.2), в котором $u = z$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $X_1 = 1$, $X_2 = -1$. Записываем систему (28.4) и интегрируем ее:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1},\ dx + dy = 0,\ d(x+y) = 0,\ x + y = C,\ \varphi(x, y) = x + y.$$

Формула (28.6) принимает вид $z = F(\varphi) = F(\varphi(x, y)) = F(x+y)$, $z = F(x+y)$, где F – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 28.4. Проинтегрировать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Это уравнение вида (28.7), в котором $z = u$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $X_1 = x$, $X_2 = y$, $U = 2z$. Записываем систему (28.9) и интегрируем ее:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z},\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z},\ \frac{y}{x} = C_1,\ \frac{z}{x^2} = C_2,$$

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{y}{x},\ \varphi_2(x, y, z) = \frac{z}{x^2}.$$

В соответствии с формулой (28.10) получаем решение $F(y/x; z/x^2) = 0$, где F – произвольная дифференцируемая функция.

28.3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Уравнение с частными производными второго порядка называется линейным относительно старших производных, если оно содержит эти производные лишь в первой степени.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка относительно функции $u = u(x, y)$ двух переменных x и y можно записать так:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (28.11)$$

где $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $F = F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ – заданные функции своих аргументов. Уравнение (28.11) называется уравнением гиперболического типа в данной области, если $B^2 - AC > 0$ в этой области; уравнением параболического типа, если $B^2 - AC = 0$; уравнением эллиптического типа, если $B^2 - AC < 0$. Если выражение $B^2 - AC$ в данной области меняет знак, то уравнение (28.11) называется уравнением смешанного типа.

Уравнение (28.11) можно привести к каноническому виду переходом к новым переменным ξ и η по формулам

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \qquad (28.12)$$

где $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции аргументов x, y. Чтобы найти эти функции, рассматривают характеристическое уравнение

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0, \qquad (28.13)$$

которое равносильно системе двух уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}, \qquad (28.14)$$

где A, B, C те же, что и в уравнении (28.11).

Интегральные кривые уравнения (28.13), или, что то же самое, уравнений (28.14), называются характеристиками уравнения (28.11). Если уравнение (28.11) гиперболического типа, то первые интегралы $\varphi_1(x, y) = C_1$ и $\varphi_2(x, y) = C_2$ действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик уравнения (28.11). С помощью замены переменных $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ – интегралы системы (28.14), уравнение (28.11) приводят к каноническому виду уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

З а м е ч а н и е. Уравнение гиперболического типа с помощью замены переменных $\xi = \mu + \nu$, $\eta = \mu - \nu$ можно привести к другому каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}=\Phi_1\left(\mu, \nu, u, \frac{\partial u}{\partial \mu}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right).$$

Если уравнение (28.11) параболического типа, то уравнения (28.14) совпадают; в этом случае получают один первый интеграл системы (28.14) $\varphi(x, y)=C$. Формулы (28.12) принимают вид $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – интеграл системы (28.14), а $\psi(x, y)$ – любая функция, удовлетворяющая условию – якобиан функций φ и ψ отличен от нуля:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (28.15)$$

Уравнение (28.11) приводят к каноническому виду параболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Если уравнение (28.11) эллиптического типа, то первые интегралы системы (28.14) будут комплексно-сопряженными: $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=C_1$, $\varphi(x, y)-i\psi(x, y)=C_2$. С помощью замены переменных по формулам $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ уравнение (28.11) приводят к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

называемому каноническим видом уравнения эллиптического вида.

Пример 28.5. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3x \frac{\partial u}{\partial x}-3y \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

и проинтегрировать его.

Это уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости, кроме точек, лежащих на осях координат, поскольку для него $A=x^2$, $B=0$, $C=-y^2$, $B^2-AC=-x^2(-y^2)=x^2y^2>0$, если $x \neq 0$, $y \neq 0$. Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $x^2dy^2-y^2dx^2=0$, или $y^2dx^2-x^2dy^2=0$; оно равносильно двум уравнениям: $ydx+xdy=0$, $ydx-xdy=0$. Интегрируя эти уравнения, получаем $xy=C_1$, $y/x=C_2$. Введем новые переменные ξ и η по формулам (28.12): $\xi=xy$, $\eta=y/x$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y \frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Проинтегрируем уравнение $u''_{\xi\eta}+(1/\xi)\,u'_\eta=0$. Обозначим $u'_\eta=w$, тогда $u''_{\eta\xi}=w'_\xi$, $w'_\xi+(1/\xi)\,w=0$, $w'/w+1/\xi=0$, $\ln|w|+\ln|\xi|=\ln|\varphi_1(\eta)|$, $w\xi=\varphi_1(\eta)$, $u'_\eta\xi=\varphi_1(\eta)$, $\xi u=\int\varphi_1(\eta)\,d\eta+\psi_1(\xi)=\varphi(\eta)+\psi_1(\xi)$. Следовательно, $u=(1/\xi)\,\varphi(\eta)+\psi(\xi)$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов. Возвращаясь к переменным x, y, получаем $u=(1/xy)\,\varphi(y/x)+\psi(xy)$.

Пример 28.6. Найти общее решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Это уравнение параболического типа на всей плоскости Oxy, так как для него $A=x^2$, $B=-xy$, $C=y^2$, $B^2-AC=(-xy)^2-x^2y^2=0$. Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=0$, $(xdy+\ +ydx)^2=0$, $xdy+ydx=0$. Поскольку $xdy+ydx=d(xy)$, то $d(xy)=0$, откуда $xy=C$, $\varphi(x,y)=xy$. В формулах (28.12) положим $\xi=xy$, а в качестве функции η возьмем любую функцию, удовлетворяющую условию (28.15), в частности $\eta=y$. Преобразуем данное уравнение, введя новые переменные ξ и η по формулам $\xi=xy$, $\eta=y$. Находим выражения для частных производных по x и y через частные производные ξ, η:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \ \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Введем новую функцию w по формуле $w = u'_\eta$, тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \ \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} + w = 0, \ \frac{w'_\eta}{w} + \frac{1}{\eta} = 0,$$

$$\ln|w| + \ln|\eta| = \ln|\varphi(\xi)|, \ w\eta = \varphi(\xi), \ u'_\eta \eta = \varphi(\xi),$$

$$u'_\eta = (1/\eta)\varphi(\xi), \ u = \varphi(\xi)\ln|\eta| + \psi(\xi).$$

Следовательно, общее решение уравнения определяется формулой $u = \varphi(xy)\ln|y| + \psi(xy)$, где $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции от произведения xy аргументов x и y.

Пример 28.7. Найти решение уравнения $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в полосе $0 \le x \le a$, $0 \le y \le +\infty$, удовлетворяющее условиям $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = A(1 - x/a)$, $u(x, +\infty) = 0$.

Это каноническое уравнение эллиптического типа. Решение будем искать с помощью метода Фурье (метода разделения переменных). Искомую функцию $u(x, y)$ представим в виде произведения

$$u(x, y) = X(x)\,Y(y), \tag{I}$$

где $X(x)$ – функция только от x, $Y(y)$ – функция только от y. Так как $u''_{xx} = X''(x)\,Y(y)$, $u''_{yy} = X(x)\,Y''(y)$, то уравнение принимает вид $X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$, откуда $X''(x)/X(x) + Y''(y)/Y(y) = 0$, или $Y''(y)/Y(y) = -X''(x)/X(x)$. Поскольку функция (I) – решение уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x и y, что возможно лишь тогда, когда обе части не зависят ни от x, ни от y, т. е. являются постоянными. Обозначив эту постоянную буквой c, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Y''(y) - cY(y) = 0, \ X''(x) + cX(x) = 0. \tag{II}$$

Считая $c = \lambda^2 > 0$, находим решения этих уравнений:

$$Y(y) = Ae^{-\lambda y} + Be^{\lambda y}, \ X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

(характеристические уравнения для уравнений (II): $k^2 - \lambda^2 = 0$, $k^2 + \lambda^2 = 0$).

Следовательно, формула (I) примет вид

$$u(x, y) = (Ae^{-\lambda y} + Be^{\lambda y})(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x).$$

Так как $u(0, y)=0$, т. е. $C\cos 0+D\sin 0=0$, то $C=0$. Условие $u(a, y)=0$ приводит к равенству $(Ae^{-\lambda y}+Be^{\lambda y})D\sin\lambda a=0$, откуда $\sin\lambda a=0$, $\lambda a=n\pi$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $\lambda=\pi n/a$. Поскольку $u(x, +\infty)=0$, или $(Ae^{-\lambda\infty}+Be^{\lambda\infty})\times$ $\times D\sin\lambda x=0$, то $B=0$. Таким образом $u(x, y)=Ae^{-\lambda y}D\sin\lambda x$, где $\lambda=n\pi/a$, т.е. решением является любая функция

$$u_n(x,y)=A_ne^{-(n\pi/a)y}D_n\sin(n\pi/a)x=b_ne^{-(n\pi/a)y}\sin(n\pi/a)x,$$

где $b_n=A_nD_n$, и ряд из этих функций

$$u(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-(n\pi/a)y}\sin(n\pi/a)x.$$

Постоянные b_n определим так, чтобы выполнялось условие $u(x, 0)=A(1-x/a)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}=A\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Значит, числа b_n являются коэффициентами ряда Фурье для функции $A(1-x/a)$. Эти коэффициенты находим по формуле

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a A\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Вычислив интеграл, получим $b_n=2A/\pi n$.

Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$u(x, y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi/a)y}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

28.4. Основные дифференциальные уравнения математической физики

Волновое уравнение – уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+g(M, t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u, \tag{28.16}$$

где Δu – оператор Лапласа, $g(M, t)$ – функция точки M из данной области (одномерной, двумерной, трехмерной) и времени t; первое называют неоднородным, второе – однородным. Волновыми уравнениями описываются различные колебательные процессы. Каждое волновое уравнение имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти решение, описывающее соответствующий физический процесс, необходимо задать дополнительные условия.

Одномерное волновое уравнение, или уравнение колебаний струны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ – отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой x в момент времени t; a – постоянная; $g(x,t)$ – заданная функция. Первое из этих уравнений называется уравнением вынужденных колебаний, второе – уравнением свободных колебаний. Дополнительные условия состоят из начальных и краевых. Предположим, что струна имеет длину l, левый конец ее закреплен в точке $x=0$, правый – в точке $x=l$. Если за начальный момент времени принять $t=0$, то начальные условия запишутся так: $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=F(x)$, где $f(x)$, $F(x)$ – известные функции, определенные на отрезке $[0,l]$. Так как концы струны закреплены, то краевые условия имеют вид $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ $(t>0)$. Задача, содержащая только начальные условия, называется задачей Коши; задача, содержащая начальные и краевые условия, – смешанной задачей.

Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Найти решение $u=u(x,t)$ линейного однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a \neq 0), \tag{28.17}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \tag{28.18}$$

где $f(x)$, $F(x)$ – заданные функции, определенные в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Для решения задачи о свободных колебаниях бесконечной струны используют метод характеристик, или метод Д'Аламбера.

Уравнение (28.17) является уравнением гиперболического типа (в чем можно убедиться, положив $t=y$ и сравнив его с уравнением (28.11)). Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $a^2dt^2 - dx^2 = 0$, или $dx^2 - a^2dt^2 = 0$. Оно распадается на два уравнения: $dx - adt = 0$, $dx + adt = 0$, откуда получаем $x - at = C_1$, $x + at = C_2$. Введя новые переменные ξ и η формулами $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, уравнение (28.17) преобразуем к виду $u''_{\xi\eta} = 0$, откуда (см. пример 28.2) $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, или

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{28.19}$$

где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции. Если эти функ-

ции выбрать так, чтобы удовлетворить условиям (28.18), то

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz. \qquad (28.20)$$

Эта формула, называемая формулой Д'Аламбера, дает решение задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны.

Уравнения теплопроводности – уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \text{ или } \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+g(M,t), \qquad (28.21)$$

где Δu – оператор Лапласа, a – постоянная, $g(M,t)$ – заданная функция точки M данной области (одномерной, двумерной, трехмерной). Первое уравнение называют однородным, второе – неоднородным.

Запишем соответственно трехмерное, двумерное и одномерное однородные уравнения вида (28.21):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Первое из этих уравнений описывает распространение тепла в пространстве, второе – в пластинке, третье – в стержне.

Уравнением вида (28.21) описываются различные процессы: диффузия, движение вязкой жидкости и др.

Начальное условие для уравнения теплопроводности в пространстве определяется равенством

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z); \qquad (28.22)$$

оно задает температуру каждой точки тела в начальный момент времени $t_0=0$ ($f(x,y,z)$ – известная функция).

Краевое условие имеет вид

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=h(u|_{\Gamma}-\tilde{u}), \qquad (28.23)$$

где $\tilde{u}$ – температура окружающей среды на границе Г, u – температура тела, h – коэффициент теплообмена, k – коэффициент теплопроводности, u'_n – производная функции $u=u(x,y,z,t)$ по направлению внешней нормали к поверхности Г.

Краевое условие (28.23) принимает вид $u'_n\big|_{\Gamma}=0$ при $h=0$ (на границе тела нет теплообмена с окружающей средой) или $u\big|_{\Gamma}=\tilde{u}$ при $h\to\infty$ (на границе поддерживается постоянная температура).

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = 0, \tag{28.24}$$

где Δu – оператор Лапласа. Уравнению (28.24) удовлетворяет стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры в теле, потенциал стационарного электрического поля в области, где отсутствуют заряды. К уравнению Лапласа приводят и другие задачи. Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

Краевая задача для уравнения Лапласа. Найти функцию $u = u(x, y, z)$, гармоническую внутри области, ограниченной замкнутой поверхностью Г, и удовлетворяющую граничному условию

$$H\frac{\partial u}{\partial n} = u\big|_{\Gamma} - \tilde{u}, \tag{28.25}$$

где H и $\tilde{u}$ – функции, заданные на границе Г.

Важный частный случай краевой задачи получается при $H = 0$: $u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}$. Эта краевая задача называется задачей Дирихле.

Задача Дирихле для круга: найти функцию $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (в полярных координатах)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и условию $u(r, \varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – заданная функция, R – радиус круга.

Решение данной задачи выражается формулой

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)\, f(t)\, dt}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2}.$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона.

Пример 28.8. Найти решение $u = u(x, t)$ уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, удовлетворяющее условиям: $u(x, 0) = e^x$, $u'_t(x, 0) = \omega x$.

Это частный случай задачи Коши для уравнения (28.17) при $f(x) = e^x$, $F(x) = \omega x$. В соответствии с формулой (28.20) получаем искомое решение

$$u(x, t) = \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\omega z dz =$$

$$= \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \frac{\omega}{2a}\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{x-at}^{x+at},$$

$$u(x, t) = \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \omega x t.$$