Глава 29

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

29.1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля

Пусть V – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области V задано скалярное поле, если каждой точке M из V поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$. Если введены декартовы координаты, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки M: $u = u(x, y, z)$, $u = u(x, y)$. В этом случае понятие скалярного поля совпадает с понятием функции трех или двух переменных.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет данное фиксированное значение C.

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$u(x, y, z) = C. \tag{29.1}$$

Поверхности уровня называют еще эквипотенциальными поверхностями (поверхностями одинакового потенциала) или изоповерхностями.

Если поле задано в плоской области, то равенство

$$u(x, y) = C \tag{29.2}$$

определяет некоторую линию. Эти линии называют линиями уровня или изолиниями.

Скалярные поля иногда обладают специальными свойствами симметрии. Если значения $u(M)$ зависят лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0, то поле называют сферическим. Поверхности уровня сферического поля – концентрические сферы.

Если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $u(M)$ переходит само в себя, т.е. существует такая декартова система координат, в которой поле можно задать функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то это поле называют плоскопараллельным или двумерным. Поверхности уровня таких полей цилиндрические.

Если поле $u(M)$ переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси, иначе, если существует цилиндрическая система координат, в которой поле может быть задано функцией, зависящей лишь от $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z, то такое поле называют осесимметрическим.

Поверхности уровня этого поля – поверхности вращения. Если поверхностями уровня являются круговые цилиндры, то $u(M)$ называют цилиндрическим.

Пример 29.1. Найти поверхность уровня скалярного поля $u=2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43$, проходящую через точку $M(-1,1,1)$.

Совокупность поверхностей уровня данного поля определяется уравнением $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43=C$. Среди этих поверхностей выберем ту, которая проходит через точку M, для чего нужно определить значение C. Подставляя координаты точки M в левую часть уравнения, находим $2(-1)^2-3\cdot 1^2+16(-1)-18\cdot 1-12\cdot 1+43=C$, или $2-3-16-18-12+43=C$, $C=-4$. Следовательно, уравнение искомой поверхности имеет вид $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43=-4$, или $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+47=0$. Выделяя полные квадраты в левой части этого уравнения, получаем $2(x+4)^2-3(y+3)^2=12(z+1)$, или $X^2/3-Y^2/2=2Z$, где $X=x+4$, $Y=y+3$, $Z=z+1$.

Итак, поверхностью уровня является гиперболический параболоид.

Пример 29.2. Найти линии уровня плоского скалярного поля, заданного функцией $u=x^2-y^2$.

В соответствии с формулой (29.2) линии уровня данного поля определяются уравнением $x^2-y^2=C$. При $C>0$ получаем равносторонние гиперболы с действительной осью Ox, при $C<0$ имеем сопряженные им гиперболы (с действительной осью Oy), при $C=0$ получаем асимптоты всех указанных гипербол.

29.2. Градиент скалярного поля. Производная по направлению

Линейной формой $\varphi(\Delta\mathbf{r})$ относительно вектора $\Delta\mathbf{r}$ называют скалярное произведение вектора $\Delta\mathbf{r}$ на некоторый вектор g, не зависящий от $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$ – радиус-вектор точки M, $\Delta\mathbf{r}$ – вектор, соединяющий точки M и M_0.

Скалярное поле $u(M)$ называется дифференцируемым в точке M_0 из области V, если приращение поля Δu в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u=\mathbf{g}\cdot\Delta\mathbf{r}+o(\rho), \tag{29.3}$$

где $\rho=\rho(M_0,M)$ – расстояние между точками M_0 и M, $\Delta u=u(M)-u(M_0)$.

Градиентом дифференцируемого в точке M_0 скалярного поля называют вектор $\mathbf{g}(M_0)$ из (29.3). Обозначение: $\operatorname{grad}u(M_0)=\mathbf{g}(M_0)$.

Если поле дифференцируемо в каждой точке области V, то оно дифференцируемо в V. В этом случае $\operatorname{grad}u(M)=\mathbf{g}(M)$.

При заданной декартовой системе координат

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{29.4}$$

Величина $\operatorname{grad} u$ определяется формулой

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (29.5)$$

Свойства градиента:

1) $\operatorname{grad} c = 0$, $c = \text{const}$;
2) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$, u, v – дифференцируемые скалярные поля;
3) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;
4) $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u$, $c = \text{const}$;
5) $\operatorname{grad}(u/v) = (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)/v^2$ $(v \neq 0)$;
6) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$, f – дифференцируемая функция;
7) $\operatorname{grad}|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис в ортогональной криволинейной системе координат g_1, g_2, g_3, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial g_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial g_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial g_3}\mathbf{e}_3,$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе, определенные формулой

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_j}\right)^2}, \quad j = 1, 2, 3; \qquad (29.6)$$

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z;$$

в сферической системе координат

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Дифференциалом скалярного поля $u(M)$ называют скалярное произведение $\operatorname{grad} u \cdot \Delta\mathbf{r}$:

$$du = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Пусть $\mathbf{e}$ – единичный вектор, указывающий направление l в точке M_0 области V, M – произвольная точка V, отличная от M_0 и такая, что вектор $\mathbf{M_0M}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$.

Предел $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta u/\rho$ $(\Delta u = u(M) - u(M_0))$, $(\rho = \rho(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M), если он существует, называют производной поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\mathbf{e}$ и обозначают символом

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \to 0}\frac{\Delta u}{\rho}.$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (29.7)$$

где

$$\mathbf{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\operatorname{grad}u\cdot\mathbf{e}=\text{пр}_{\mathbf{e}}\operatorname{grad}u.$$

Если $\mathbf{e}$ имеет направление $\operatorname{grad}u$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{\max}=\left|\operatorname{grad}u\right|.$$

Пример 29.3. Найти величину и направление градиента скалярного поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точке $M_0(2,1,-1)$.

Находим частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy,$$

их значения в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=15,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=9,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-3.$$

По формуле (29.4) получаем $\operatorname{grad}u(M_0)=15\mathbf{i}+9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Величину градиента находим по формуле (29.5):

$$\left|\operatorname{grad}u(M_0)\right|=\sqrt{15^2+9^2+(-3)^2}=3\sqrt{35}.$$

Пример 29.4. Найти производную поля $u=x^2y-3xyz+xz^2y^2$ в точке $M_0(1,2,-1)$ по направлению вектора $\mathbf{e}$, образующего с координатными осями острые углы $\alpha,\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/3$. Установить характер изменения поля в данном направлении.

Частные производные функции u в точке M_0 имеют значения:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0=(2xy-3yz+y^2z^2)\Big|_{M_0}=14,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=(x^2-3xz+2xyz^2)\Big|_{M_0}=8,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=(-3xy+2xy^2z)\Big|_{M_0}=-14.$$

По условию задачи $\cos\beta=\cos\pi/4=\sqrt{2}/2$, $\cos\gamma=\cos\pi/3=1/2$. Поскольку $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, а угол α – острый, то $\cos\alpha=\sqrt{1-1/2-1/4}=1/2$. По формуле (29.7) находим

$$\frac{\partial u}{\partial e}=14\cdot\frac{1}{2}+8\frac{\sqrt{2}}{2}+(-14)\frac{1}{2}=4\sqrt{2}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial e}>0$, скалярное поле $u(M)$ возрастает в данном направлении.

29.3. Векторное поле. Векторные линии

Если каждой точке M области V поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{F}(M)$, то говорят, что в V задано векторное поле.

В декартовой системе координат $\mathbf{F}(M)$ можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся координатами вектора $\mathbf{F}(M)$. Обозначим их $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, тогда

$$\mathbf{F}(M) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Иногда векторные поля обладают специальными свойствами симметрии.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называют одномерным, если существует декартова система координат такая, что координаты $\mathbf{F}(M)$ имеют вид $P(x), 0, 0$.

Если существует такая цилиндрическая система координат, что $\mathbf{F}(M)$ зависит от ρ и z, но не зависит от φ, то поле $\mathbf{F}(M)$ называют осесимметрическим. Если $\mathbf{F}(M)$ зависит лишь от ρ, то поле называют цилиндрическим.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называют плоскопараллельным, если существует декартова система координат такая, что координаты $\mathbf{F}(M)$ можно задать функциями двух переменных $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$.

Векторной линией (силовой линией, линией тока) векторного поля $\mathbf{F}(M)$ называется линия L, лежащая в V, если в каждой точке L направление касательной к ней совпадает с направлением $\mathbf{F}(M)$ в этой точке.

Параметрическое дифференциальное уравнение векторной линии, проходящей через точку M_0, выражается формулами

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda\mathbf{F}, \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки M_0, λ – произвольное число, t_0 – начальное значение параметра, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – уравнение векторной линии.

Система дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{29.8}$$

При непрерывно дифференцируемых функциях P, Q, R, ни в одной точке V не обращающихся одновременно в нуль, через каждую точку V пройдет единственная векторная линия.

Часть пространства, в котором задано векторное поле $\mathbf{F}(M)$, ограниченное некоторой поверхностью σ, называется векторной трубкой, если в каждой точке поверхности σ нормаль к ней ортогональна $\mathbf{F}(M)$ в этой же точке, т. е. векторная трубка – часть пространства, состоящая из целых векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки или целиком находящаяся вне ее.

Пример 29.5. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Система (29.8), из которой находятся векторные линии, в данном случае имеет вид $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$. Эту систему уравнений можно записать так: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, $dz = 0$. Из этих уравнений находим $x^2 + y^2 = C^2$, $z = C_1$. Эти уравнения определяют векторные линии – окружности в плоскости $z = C_1$.

29.4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция. Соленоидальное поле. Теорема Остроградского

Потоком векторного поля $\mathbf{F}(M)$ через поверхность σ в сторону, определяемую единичным вектором $\mathbf{n}$ нормали к поверхности σ, называют интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint\limits_{\sigma} F_n d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

В декартовой системе координат, если $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy.$$

Способы вычисления этого поверхностного интеграла указаны в п. 22.2.

Пусть $V(\sigma)$ – объем области V, ограниченной замкнутой поверхностью σ. В этом случае поток через внешнюю сторону поверхности σ записывают в виде $\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma$.

Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\mathbf{F}(M)$ в точке M области V называется $\lim\limits_{\sigma \to M} \frac{\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$, если такой предел существует. Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oiint\limits_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)} = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oiint\limits_{\sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma}{V(\sigma)}.$$

Теорема 29.1. *Если P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными в области V, то дивергенция поля $\mathbf{F}$, заданного координатами P, Q, R, существует во всех точках области V и в любой декартовой системе координат выражается формулой*

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (29.9)$$

Если $\operatorname{div}\mathbf{F}(M)>0$, то точка M – источник векторных линий, если $\operatorname{div}\mathbf{F}(M)<0$, то точка M – сток силовых линий.

Свойства дивергенции:

1) $\operatorname{div}\mathbf{c}=0$, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор;

2) $\operatorname{div}(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\operatorname{div}\mathbf{F}_1+\operatorname{div}\mathbf{F}_2$;

3) $\operatorname{div}(u\mathbf{F})=u\operatorname{div}\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}u$, u – скалярное поле.

В криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial g_1}+\frac{\partial(A_2H_1H_3)}{\partial g_2}+\frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial g_3}\right),$$

где A_1, A_2, A_3 – координаты $\mathbf{F}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе, определенные формулой (29.6); в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z};$$

в сферических координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$(x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta).$$

Векторное поле, дивергенция в каждой точке которого равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым.

Теорема 29.2 (теорема Остроградского). *Формула* (22.12) *для векторного поля* $\mathbf{F}(M)$ *имеет вид*

$$\oiint\limits_{\sigma}F_n d\sigma=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\mathbf{F}dV. \qquad (29.10)$$

Пример 29.6. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности $x^2+y^2+y^2=R^2$.

Воспользуемся формулой (29.10), выражающей поток векторного поля через тройной интеграл. Так как $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3x^2+3y^2+3z^2=3r^2$, то по формуле (29.10) имеем $\oiint\limits_{\sigma}F_n d\sigma=3\iiint\limits_{V}r^2dV$. Введя сферические координаты $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, вычислим тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V}r^2dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{R}r^4dr=(4/5)\,\pi R^5.$$

Следовательно, $\oiint\limits_{\sigma}F_n d\sigma=(12/5)\,\pi R^5$.

Пример 29.7. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}(M)=(2x^2y-3xz^3+5x^3yz)\,\mathbf{i}+(4xy^3+xyz+8z^2)\,\mathbf{j}+(6xy^2z^3-7xz^2+9yz)\,\mathbf{k}$ в точке $M(1,1,1)$.

Вычислим P'_x, Q'_y, R'_z в точке $M(1,1,1)$:

$$(P'_x)_0=(4xy-3z^3+15x^2yz)\Big|_M=16,\ (Q'_y)_0=(12xy^2+yz)\Big|_M=13,$$

$$(R'_z)_0=(18xy^2z^2-14xz+9y)\Big|_M=13.$$

Подставляя полученные значения в формулу (29.9), получаем $\operatorname{div}\mathbf{F}\big|_M=42$.

29.5. Циркуляция векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\mathbf{F}(M)$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл

$$\int_L F_\tau dl=\int_L \mathbf{F}\cdot\vec{\tau}dl,$$

где L – гладкая или кусочно-гладкая линия, F_τ – тангенциальная составляющая поля $\mathbf{F}(M)$ на L, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к линии L в точке M.

В декартовой системе координат

$$\int_L F_\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz,$$

P, Q, R – непрерывные составляющие поля $\mathbf{F}$. Вычисление полученного криволинейного интеграла второго рода описано в п. 21.2.

Если $\mathbf{F}(M)=P(M), Q(M), R(M)$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль линии L представляет собой работу этого поля вдоль линии L.

Пример 29.8. Найти работу, производимую силой $\mathbf{F}(M)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ вдоль линии L, описываемой уравнениями $x=t^2,\ y=t^4,\ z=t^6\ (0\le t\le 1)$.

По формуле, выражающей циркуляцию в декартовой системе координат, находим

$$\int_L F_\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_0^1(2t^{11}+4t^{11}+6t^{11})\,dt=\int_0^1 12t^{11}dt=t^{12}\Big|_0^1=1.$$

29.6. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Ротором (вихрем) поля $\mathbf{F}(M)$ в точке M называется

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_\sigma(\mathbf{n}\times\mathbf{F})\,d\sigma}{V},$$

если этот предел существует. Здесь V – область, ограниченная замкнутой гладкой или кусочно-гладкой поверхностью σ, V – объем области V, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности σ в точке M.

Для декартовой системы координат с непрерывными вместе со своими частными производными P, Q, R

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \qquad (29.11)$$

В символической форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Свойства ротора: $\operatorname{rot}\mathbf{c}=0$, $\mathbf{c}=\text{const}$; $\operatorname{rot}\mathbf{r}=0$, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{i}+z\mathbf{k}$; $\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\operatorname{rot}\mathbf{F}_1+\operatorname{rot}\mathbf{F}_2$; $\operatorname{rot}(u\mathbf{F})=u\operatorname{rot}\mathbf{F}+\operatorname{grad}u\times\mathbf{F}$.

В ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial g_2}-\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial g_3}\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\frac{1}{H_1H_3}\left(\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial g_3}-\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial g_1}\right)\mathbf{e}_2+\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial g_1}-\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial g_2}\right)\mathbf{e}_3,$$

где A_1, A_2, A_3 – координаты $\mathbf{F}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе (см. формулы (29.6));
в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(A_\varphi\rho)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z;$$

в сферических координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

$$(x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta).$$

Формула Стокса. Формула (22.11) в векторной форме имеет вид

$$\oint_L F_\tau dl=\iint_\sigma(\operatorname{rot}\mathbf{F})_n d\sigma,$$

т. е. циркуляция векторного поля $\mathbf{F}$ вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, ограниченную этим

контуром. Из последней формулы

$$(\operatorname{rot}\mathbf{F}(M))_n = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oint\limits_L F_\tau dl}{S},$$

S – площадь поверхности σ, $(\operatorname{rot}\mathbf{F}(M))_n$ – проекция ротора на нормаль.

Пример 29.9. Найти вихрь векторного поля $\mathbf{F} = y^2z^2\mathbf{i} + x^2z^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$ в произвольной точке.

Находим частные производные: $P'_x = 0$, $P'_y = 2yz^2$, $P'_z = 2y^2z$, $Q'_x = 2xz^2$, $Q'_y = 0$, $Q'_z = 2x^2z$, $R'_x = 2xy^2$, $R'_y = 2x^2y$, $R'_x = 0$. По формуле (29.11) имеем $\operatorname{rot}\mathbf{F}(M) = 2x^2(y-z)\,\mathbf{i} + 2y^2(z-x)\,\mathbf{j} + 2z^2(x-y)\,\mathbf{k}$.

29.7. Потенциальное поле

Пусть V – односвязная область, в которой задано поле $\mathbf{F}(M)$.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называется потенциальным, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\mathbf{F}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Поле $\mathbf{F}$ потенциально в V тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot}\mathbf{F}(M) = \mathbf{0}$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Это условия (21.16). При непрерывных P, Q, R со своими частными производными задача о нахождении потенциала свелась к задаче восстановления функции по ее полному дифференциалу (см. п. 21.3).

Пример 29.10. Найти потенциал поля

$$\mathbf{F} = (4xy + 12x^2z)\,\mathbf{i} + (2x^2 - 3z^3)\,\mathbf{j} + (4x^3 - 9yz^2)\,\mathbf{k},$$

если он существует.

Исследуем потенциальность поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (R'_y - Q'_z)\,\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\,\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\,\mathbf{k} =$$

$$= (-9z^2 + 9z^2)\,\mathbf{i} + (12x^2 - 12x^2)\,\mathbf{j} + (4x - 4x)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Поле $\mathbf{F}$ потенциально. Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u'_z = R$, то получаем

$$u(x, y, z) = \int (4xy + 12x^2z)\,dx + \varphi(y, z) = 2x^2y + 4x^3z + \varphi(y, z),$$

$$u(x, y, z) = \int (2x^2 - 3z^3)\,dy + \psi(x, z) = 2x^2y - 3yz^3 + \psi(x, z),$$

$$u(x, y, z) = \int (4x^3 - 9yz^2)\,dz + f(x, y) = 4x^3z - 3yz^3 + f(x, y).$$

Следовательно, $u(x, y, z) = 2x^2y - 3yz^3 + 4x^3z + C$.

29.8. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе. Оператор Лапласа

Оператор Гамильтона (оператор набла) – линейный дифференциальный оператор по определению записывают в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

С учетом этого оператора основные операции теории поля можно записать так:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \ \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \ \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}.$$

С помощью оператора набла удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа, причем эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. При выполнении действий с оператором ∇ следует учитывать, что это оператор дифференциальный и векторный, т. е. пользоваться правилами дифференциального исчисления и векторной алгебры. При этом следует помнить, что, если ∇ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывают его дифференциальные свойства, а затем векторные. Входящие в состав формулы величины, которые подвергаются воздействию оператора набла, обозначают стрелкой, в окончательном результате они должны стоять слева от него. Рассмотрим операцию взятия дивергенции от векторного произведения полей $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\cdot(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\times\mathbf{F}_2) + \nabla\cdot(\mathbf{F}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2}) =$$
$$= \mathbf{F}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}_2,$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\times\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2 = \nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\times\mathbf{F}_2 + \nabla\times\mathbf{F}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2} =$$
$$= -\nabla\times\mathbf{F}_2\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1} + \nabla\times\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2(\nabla\cdot\mathbf{F}_1) + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 +$$
$$+\mathbf{F}_1(\nabla\cdot\mathbf{F}_2) - (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1\operatorname{div}\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2\operatorname{div}\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2.$$

Здесь была использована формула $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. С использованием последней получим

$$\operatorname{grad}(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2) = \nabla(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\cdot\mathbf{F}_2) + \nabla(\mathbf{F}_1\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2}) = \mathbf{F}_2\times(\nabla\times\mathbf{F}_1) + \mathbf{F}_1\times(\nabla\times\mathbf{F}_2) +$$
$$+(\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2.$$

Если $\mathbf{F}_j = (P_j, Q_j, R_j)$, $j = 1, 2$, то

$$(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \left(P_1\frac{\partial P_2}{\partial x} + Q_1\frac{\partial P_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(P_1\frac{\partial Q_2}{\partial x} +\right.$$
$$\left.+Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(P_1\frac{\partial R_2}{\partial x} + Q_1\frac{\partial R_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

Эту операцию можно рассматривать как результат применения операции $(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)$ к каждой составляющей вектора $\mathbf{F}_2$.

Попарные комбинации операций градиента дивергенции и ротора называют операциями второго порядка. Применительно к скалярному полю имеют смысл две операции $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = (\nabla \cdot \nabla)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Символ $\nabla \cdot \nabla$ называют оператором Лапласа и обозначают Δ:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применительно к векторной величине $\mathbf{F} = (P, Q, R)$

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta P \mathbf{i} + \Delta Q \mathbf{j} + \Delta R \mathbf{k}.$$

В криволинейных ортогональных координатах

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial g_1}\right) + \frac{\partial}{\partial g_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial g_2}\right) + \frac{\partial}{\partial g_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial g_3}\right)\right);$$

в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе (см. формулы (29.6)).

Операции второго порядка для векторного поля:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F},\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F};$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ – поле, являющееся ротором некоторого поля $\mathbf{F}$, соленоидально;

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\,\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F};$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{F} = (P, Q, R)).$$

29.9. Полилинейные функции векторного аргумента. Понятие тензора

Если каждому вектору $\mathbf{x}$ из V_n поставлено в соответствие число $\varphi = \ = \varphi(\mathbf{x})$ так, что для любых векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из V_n $\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\varphi(\mathbf{x}_1)+\ +\varphi(\mathbf{x}_2)$ и для любого числа α $(\alpha \neq 0)$ $\varphi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x})$, то $\varphi(\mathbf{x})$ называют линейной функцией или линейной формой.

Обозначая $x^1, x^2, ..., x^n$ координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, получаем

$$\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k \text{ и } \varphi(\mathbf{x})=\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(x^k\mathbf{e}_k)=\sum_{k=1}^{n} x^k\varphi(\mathbf{e}_k)=\sum_{k=1}^{n} x^k\varphi_k.$$

Числа $\varphi_1=\varphi(\mathbf{e}_1)$, $\varphi_2=\varphi(\mathbf{e}_2), \ldots, \varphi_n=\varphi(\mathbf{e}_n)$ называют коэффициентами линейной формы. Линейную форму считают заданной, если в некотором базисе заданы ее коэффициенты.

Если любым векторам $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ из V_n поставлено в соответствие число $\varphi=\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p)$ так, что $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p)$ – функция линейная относительно всех своих аргументов, то $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p)$ называют полилинейной функцией или полилинейной формой.

В этом случае при

$$\mathbf{x}_1=\sum_{k_1=1}^{n} x^{k_1}\mathbf{e}_{k_1},\ \mathbf{x}_2=\sum_{k_2=1}^{n} x^{k_2}\mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{x}_p=\sum_{k_p=1}^{n} x^{k_p}\mathbf{e}_{k_p},$$

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p)=\varphi\left(\sum_{k_1=1}^{n} x^{k_1}\mathbf{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} x^{k_2}\mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \sum_{k_p=1}^{n} x^{k_p}\mathbf{e}_{k_p}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\ldots\sum_{k_p=1}^{n} x^{k_1}x^{k_2}\ldots x^{k_p}\varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_p})=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\ldots\sum_{k_p=1}^{n} x^{k_1}x^{k_2}\ldots x^{k_p}\varphi_{k_1k_2\ldots k_p}.$$

Числа $\varphi_{k_1k_2\ldots k_p}=\varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_p})$ называют коэффициентами полилинейной формы. Всего их n^p. При $p=2$ форму называют билинейной.

В тензорном исчислении принято соглашение о суммировании: если в некотором одночленном выражении одинаковый буквенный индекс встречается

дважды – один раз вверху и один раз внизу, то это означает сумму выражений этого рода для значений индекса $1, 2, \ldots, n$. Например,

$$a_j^j = \sum_{j=1}^{n} a_j^j = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n, \quad a_{kjl}^{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kjl}^{ik}, \quad a_{ikl}^{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ikl}^{ik}.$$

Обозначение индексов суммирования не играет роли: $a_j^j = a_k^k = a_i^i$, $j = k = i = 1, 2, \ldots, n$.

Если в V_n выбраны два базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{29.12}$$

и

$$\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}, \tag{29.13}$$

то каждый вектор системы (29.13) можно разложить по базису (29.12):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1'} &= t_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + t_{1'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1'}^n \mathbf{e}_n = t_{1'}^j \mathbf{e}_j, \\
\mathbf{e}_{2'} &= t_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + t_{2'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2'}^n \mathbf{e}_n = t_{2'}^j \mathbf{e}_j, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{e}_{n'} &= t_{n'}^1 \mathbf{e}_1 + t_{n'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + t_{n'}^n \mathbf{e}_n = t_{n'}^j \mathbf{e}_j.
\end{aligned} \tag{29.14}$$

Матрица перехода от базиса (29.12) к базису (29.13) имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} t_{1'}^1 & t_{2'}^1 & \ldots & t_{n'}^1 \\ t_{1'}^2 & t_{2'}^2 & \ldots & t_{n'}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1'}^n & t_{2'}^n & \ldots & t_{n'}^n \end{bmatrix}. \tag{29.15}$$

Матрица перехода от базиса (29.13) к базису (29.12) является обратной матрице (29.15):

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^{1'} & t_2^{1'} & \ldots & t_n^{1'} \\ t_1^{2'} & t_2^{2'} & \ldots & t_n^{2'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n'} & t_2^{n'} & \ldots & t_n^{n'} \end{bmatrix}. \tag{29.16}$$

Учитывая соглашение о суммировании, формулы (29.14) можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{j'} = t_{j'}^j \mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ j' = 1', 2', \ldots, n'). \tag{29.17}$$

Аналогично, учитывая матрицу (29.16) и соглашение о суммировании, получаем

$$\mathbf{e}_j = t_j^{j'} \mathbf{e}_{j'}. \tag{29.18}$$

Преобразования, в которых участвуют элементы матрицы (29.15), называют ковариантными (сопреобразующимися, изменяющимися так же). Преобразования, с участием элементов матрицы (29.16), называют контравариантными (противопреобразующимися).

Ковариантным тензором ранга q (тензором типа $(0, q)$ или $\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix}$) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства V_n задается n^q упорядоченными системами чисел $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ в базисе (29.12) и $a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}$ в базисе (29.13)). которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуются по закону

$$a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}} = t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_q}, \tag{29.19}$$

$t_{i'}^{i}$ – элементы матрицы (29.15). Ранг тензора называют также валентностью.

Пусть $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q)$ – линейная форма порядка q с коэффициентами $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ в базисе (29.12) и $\varphi_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}$ в базисе (29.13). Учитывая определение коэффициентов полилинейной формы, соотношение (29.17) и свойства линейности, можно получить

$$\varphi_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}} = \varphi(\mathbf{e}_{i_{1'}}, \mathbf{e}_{i_{2'}}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{q'}}) = \varphi(t_{i_{1'}}^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}, t_{i_{2'}}^{i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, t_{i_{q'}}^{i_q} \mathbf{e}_{i_q}) =$$

$$= t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} \varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}) = \qquad t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_q}.$$

Таким образом, линейная форма порядка q является ковариантным тензором типа $(0, q)$. Удобно считать, что и тензор типа $(0, q)$ является линейной формой порядка q.

Контравариантным тензором ранга p (тензором типа $(p, 0)$ или $\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}$) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства V_n задается n^p упорядоченными системами чисел $a^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ в базисе (29.12) и $a^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}}$ в базисе (29.13)), которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуются по закону

$$a^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}} = t_{j_1}^{j_{1'}} t_{j_2}^{j_{2'}} \ldots t_{j_p}^{j_{p'}} a^{j_1 j_2 \ldots j_p}, \tag{29.20}$$

$t_{j}^{j'}$ – элементы матрицы (29.16).

Если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе (29.12), $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ – в базисе (29.13), то $\mathbf{x} = x^{j'} \mathbf{e}_{j'}$ и $\mathbf{x}_{j'} = x^j \mathbf{e}_j$. Следовательно, $x^{j'} \mathbf{e}_{j'} = x^j \mathbf{e}_j = x^j t_j^{j'} \mathbf{e}_{j'}$. Приравнивая координаты при $\mathbf{e}_{j'}$, получаем

$$x^{j'} = t_j^{j'} x^j.$$

Таким образом, вектор – это контравариантный тензор, т.е. тензор типа (1, 0). Наоборот, тензор типа (1, 0) можно рассматривать как вектор. Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называют контравариантными координатами вектора.

Тензором типа (p, q) (q раз ковариантным и p раз контравариантным) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства V_n задается n^{p+q} упорядоченными системами чисел ($a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$ в базисе (29.12) и $a^{j_{1'} j_{2'} \dots j_{p'}}_{i_{1'} i_{2'} \dots i_{q'}}$ в базисе (29.13)), которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуется по закону

$$a^{j_{1'} j_{2'} \dots j_{p'}}_{i_{1'} i_{2'} \dots i_{q'}} = t^{j_{1'}}_{j_1} t^{j_{2'}}_{j_2} \dots t^{j_{p'}}_{j_p} t^{i_1}_{i_{1'}} t^{i_2}_{i_{2'}} \dots t^{i_q}_{i_{q'}} a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q},$$

$t^{j'}_{j}$, $t^{i}_{i'}$ – элементы матриц (29.15) и (29.16). Числа $a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$ называют координатами тензора в базисе (29.12), $a^{j_{1'} j_{2'} \dots j_{p'}}_{i_{1'} i_{2'} \dots i_{q'}}$ – координатами тензора в базисе (29.13).

29.10. Действия над тензорами

Пусть заданы два тензора одинакового строения (p, q), т. е. заданы координаты $a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$, $b^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$. Их суммой будет тензор того же строения с координатами

$$c^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} = a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} + b^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}.$$

Сказанное остается в силе и при сложении нескольких тензоров одинакового строения.

Если $a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$ – координаты тензора типа (p, q) и $b^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_s}$ – координаты тензора типа (r, s), то произведением этих тензоров будет тензор, координаты которого выражаются следующим образом:

$$c^{j_1 j_2 \dots j_p k_1 k_2 \dots k_r}_{i_1 i_2 \dots i_q l_1 l_2 \dots l_s} = a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} \cdot b^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_s},$$

т.е. в каждом базисе каждую координату первого тензора умножают на каждую координату второго тензора и полученные произведения принимают за координаты нового тензора типа $(p+r, q+s)$. Указанным способом можно перемножать любое число тензоров. Результат умножения зависит не только от типа сомножителей, но и от их порядка.

Операция свертывания тензора имеет специфически тензорный характер, и применяется к тензорам смешанного типа. Пусть дан произвольный тензор, имеющий хотя бы один верхний и хотя бы один нижний индексы. Индексы выбирают произвольно и отбирают те координаты тензора, для которых выбранные индексы имеют одинаковые значения $1, 2, \dots, n$. Это означает, что производится суммирование всех выбранных координат при фиксированных значениях остальных индексов. Получаем тензор, утративший по сравнению с исходным по одному нижнему и верхнему индексу. Если тип исходного тензора (p, q), то полученный

тензор имеет тип $(p-1, q-1)$. Пусть $a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$, выбираем, например, индексы j_1 и i_1 и рассматриваем $i_1 = j_1$, т.е.

$$a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} = a^{1 j_2 \dots j_p}_{1 i_2 \dots i_q} + a^{2 j_2 \dots j_p}_{2 i_2 \dots i_q} + \dots + a^{n j_2 \dots j_p}_{n i_2 \dots i_q} = a^{j_2 \dots j_p}_{i_2 \dots i_q}.$$

В связи с тем, что валентность тензора при свертывании понижается на две единицы, эта операция является весьма важным источником получения инвариантов – величин, не зависящих от выбора базиса. Если у тензора одинаковое число верхних и нижних индексов, то, применяя операцию свертывания столько раз, сколько верхних или нижних индексов, получают число. При сворачивании тензора типа $(1,1)$ получаем $a^j_i = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3 + \dots + a^n_n = a$ – след соответствующей матрицы. Особенно часто применяется свертывание к тензорам, полученным как произведение. Так, запись линейной формы $\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i$ можно рассматривать как получение инварианта $\varphi(\mathbf{x})$ путем свертывания произведения тензоров x^p и φ_r.

Транспонирование тензоров (операция подстановки индексов) по двум ковариантным или двум контравариантным индексам – преобразование рассматриваемого тензора в тензор того же типа, координаты которого отличаются от координат исходного тензора порядком транспонируемых индексов. Например,

$$a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} \to b^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q} = a^{j_1 j_2 j_3 \dots j_p}_{i_2 i_1 i_3 \dots i_q}.$$

Операция симметрирования по группе p ковариантных или контравариантных индексов заключается в следующем: транспонируют тензор, совершая всевозможные перестановки индексов выбранной группы. Полученные таким образом $p!$ тензоров складывают и делят эту сумму на $p!$. Полученный тензор обозначается заключением выбранной группы индексов в круглые скобки. Так, тензор $a^{j_1}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, симметрированный по индексам i_2, i_3, i_4, имеет вид

$$a^{j_1}_{i_1 (i_2 i_3 i_4)} = \frac{1}{3!}\left(a^{j_1}_{i_1 i_2 i_3 i_4} + a^{j_1}_{i_1 i_2 i_4 i_3} + \right.$$
$$\left. + a^{j_1}_{i_1 i_3 i_2 i_4} + a^{j_1}_{i_1 i_3 i_4 i_2} + a^{j_1}_{i_1 i_4 i_3 i_2} + a^{j_1}_{i_1 i_4 i_2 i_3}\right).$$

Операция альтернирования (альтернации) по группе p ковариантных или контравариантных индексов производится следующим образом: транспонируем тензор, совершая всевозможные перестановки индексов выбранной группы. Получаем $p!$ тензоров. Далее складываем тензоры, полученные четными перестановками и из этого результата вычитаем тензоры, полученные нечетными перестановками, окончательный результат делим на $p!$. Полученный тензор обозначается заключением выбранной группы индексов в квадратные скобки. В результате альтерни-

рования тензора a_{ij} получаем $a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$. Альтернирование тензора $a^{j_1}_{i_1i_2i_3i_4}$, по индексам i_1, i_2, i_3:

$$a^{j_1}_{[i_1i_2i_3]i_4}=\frac{1}{3!}(a^{j_1}_{i_1i_2i_3i_4}+a^{j_1}_{i_3i_1i_2i_4}+$$
$$+a^{j_1}_{i_2i_3i_1i_4}-a^{j_1}_{i_2i_1i_3i_4}-a^{j_1}_{i_3i_2i_1i_4}-a^{j_1}_{i_1i_3i_2i_4}).$$

Тензор называют кососимметрическим по нескольким одноименным индексам, если он умножается на -1 при транспонировании любых двух из этих индексов. Примером кососимметрического тензора может быть тензор типа $(0,2)$, координаты которого образуют кососимметрическую матрицу $a_{ij}=-a_{ji}$, т. е. матрицу вида $\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, или тензор типа $(0,3)$, координаты которого обладают свойством

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}=-a_{jik}=-a_{kji}=-a_{ikj}.$$

В результате альтернирования получают кососимметрический тензор по индексам, участвующим в альтернации.

29.11. Тензоры в евклидовом пространстве

В евклидовом пространстве E_n введено скалярное произведение двух векторов – билинейная форма. Иначе говоря, евклидово пространство – это линейное пространство, в котором определен тензор типа $(0,2)$. Если $\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y}=y^j\mathbf{e}_j$, то $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x^i\mathbf{e}_i\cdot y^j\mathbf{e}_j)=x^iy^j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=g_{ij}x^iy^j$, где $g_{ij}=(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i)=g_{ji}$. Симметричный тензор g_{ij} называют метрическим. В результате свертывания тензоров g_{ij} и x^i получают числа – ковариантные координаты вектора $\mathbf{x}$: $g_{ij}x^i=x_j$. Ковариантные координаты – это проекции вектора $\mathbf{x}$ на базисные векторы, так как $\mathbf{x}_i=g_{ij}\mathbf{x}^j=(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)x^j=(\mathbf{e}_i\cdot x^j\mathbf{e}_j)$, т. е. $x_i=\mathbf{x}\mathbf{e}_i$. Дважды контравариантный тензор g^{ij} с матрицей, обратной матрице тензора g_{ij}, называют контравариантным метрическим тензором. Любой одновалентный ковариантный тензор x_j путем свертывания с тензором g^{ij} можно преобразовать в контравариантный $g^{ij}x_j=x^i$. Операцию перехода от контравариантных координат вектора к его ковариантным координатам называют операцией «опускания индекса», а операцию перехода от ковариантных координат к контравариантным – операцией «поднятия индекса». Операцию опускания или поднятия индекса в евклидовом пространстве применяют к тензорам любой структуры.

Если базис ортонормирован, то нет необходимости различать ковариантные и контравариантные тензоры, так как матрица (29.16) получена в этом случае транспонированием матрицы (29.15) и во всех преобразованиях участвуют лишь элементы матрицы (29.15). В этом базисе $x_i = x^i$.

Примером двухвалентного тензора является тензор деформации, который определяет положение точек тела после деформации по отношению к их положению до деформации. Если x_1, x_2, x_3 – декартовы прямоугольные координаты точки тела до деформации, u_1, u_2, u_3 – координаты вектора перемещения и деформация мала, то координаты тензора деформации имеют вид $u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ и матрица этого тензора

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

29.12. Тензорное поле

Если каждой точке M области $V \subset E_n$ поставлен в соответствие тензор одного и того же типа, то говорят, что в области V задано тензорное поле. При переходе от одной системы координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ к другой $(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ базисные векторы преобразуются следующим образом: $\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_i$. Поле тензора валентности $p+q$ определяется в каждой системе координат n^{p+q} функциями точки $a^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_q}(M)$, которые при переходе к другой системе координат преобразуются по закону

$$a^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}}_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}} = \frac{\partial x^{j_{1'}}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x^{j_{2'}}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_{p'}}}{\partial x^{j_p}} a^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_q}.$$

Чтобы определить изменение тензора при переходе от одной точки к другой, надо учитывать не только изменение компонент тензора, но и изменение локального базиса. Например, для контравариантного векторного поля u^j приращение

векторного поля (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равно

$$Du^j = du^j + \Gamma^j_{ik} u^i dx^k, \tag{29.21}$$

Γ^j_{ik} – символы Кристоффеля:

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right).$$

Слагаемое du^j в (29.21) учитывает зависимость координат приращения тензора от приращения его координат, а слагаемое $\Gamma^j_{ik} u^i dx^k$ учитывает зависимость компонент приращения тензора от изменения системы координат при переходе от точки к точке.

Вектор $\mathbf{D}u^j$ называют ковариантным или абсолютным дифференциалом векторного поля. Ковариантной или абсолютной производной этого поля называют совокупность величин

$$\nabla_l u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^l} + \Gamma^j_{il} u^i.$$

Аналогично вводят ковариантную производную ковариантного векторного поля

$$\nabla_l u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^l} - \Gamma^i_{jl} u_i.$$

Для тензорного поля u^j_i ковариантная производная вычисляется по формуле

$$\nabla_l u^j_i = \frac{\partial u^j_i}{\partial x^l} + \Gamma^j_{il} u^i - \Gamma^i_{jl} u^j.$$

Так же определяется ковариантная производная для тензорного поля любой структуры. Ковариантная производная тензорного поля – тензорное поле, ковариантная валентность которого на единицу выше исходного поля.

Абсолютный дифференциал любого тензорного поля $\mathrm{T} : D\mathrm{T} = \nabla_l \mathrm{T} dx^l$.

В прямоугольных системах координат $\Gamma^j_{il} = 0$ и ковариантное дифференцирование переходит в обычное.

Ковариантное дифференцирование перестановочно со свертыванием Правила ковариантного дифференцирования для суммы и произведения тензоров совпадают с правилами обычного дифференцирования.