Глава 31

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

31.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \qquad (31.1)$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям $P_n(x_k)=y_k$, $k=0,1,2,\dots,n$, где x_k – узлы (или полюсы) интерполяции, y_k – заданные числа.

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \qquad (31.2)$$

Формулы (31.1) и (31.2) можно записать так:

$$P_n(x)=\omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{(x-x_k)\omega'(x_k)};\quad f(x)\approx\omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$$

где

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \qquad (31.3)$$

$$\omega'(x)=(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n).$$

Производя интерполирование функции $f(x)$ по формуле Лагранжа (31.2), заменяют эту функцию полиномом $P_n(x)$, совпадающим с ней в $n+1$ данных точках отрезка $[a, b]$. В остальных точках этого отрезка разность $R_n=f(x)-P_n(x)$ отлична от нуля и представляет собой погрешность метода. Эта разность, называемая остаточным членом интерполяции, определяется формулой

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(x)}{(n+1)!},$$

в которой $\omega(x)$ выражается равенством (31.3), ξ – точка промежутка $[a, b]$, зависящая от x.

Пример 31.1. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, который в точках $x_0=-3$, $x_1=-1$, $x_2=2$ принимает соответственно значения $y_0=-5$, $y_1=-11$, $y_2=10$.

При $n=2$ формула (31.1) имеет вид

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Подставляя в эту формулу заданные значения, находим

$$P_2(x)=-5\frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)}-11\frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)}+10\frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)},$$

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}(x^2-x-2)+\frac{11}{6}(x^2+x-6)+\frac{2}{3}(x^2+4x+3)=$$

$$=\frac{1}{6}[-3(x^2-x-2)+11(x^2+x-6)+4(x^2+4x+3)]=\frac{1}{6}(12x^2+30x-48).$$

Итак, $P_2(x)=2x^2+5x-8$.

Пример 31.2. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа $P_3(x)$, для которого $P_3(-1)=-11$, $P_3(1)=-3$, $P_3(2)=1$, $P_3(3)=13$.

В данном случае $x_0=-1$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $y_0=-11$, $y_1=-3$, $y_2=1$, $y_3=13$. При $n=3$ формула (31.1) принимает вид

$$P_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Подставляя в эту формулу данные значения, получаем

$$P_3(x)=-11\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)}-3\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)}+$$

$$+1\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)}+13\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)}=$$

$$=-11\frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{-24}-3\frac{(x^2-x-2)(x-3)}{4}+\frac{(x^2-1)(x-3)}{-3}+$$

$$+13\frac{(x^2-1)(x-2)}{8}=\frac{11}{24}(x^3-6x^2+11x-6)-\frac{3}{4}(x^3-4x^2+x+6)-$$

$$-\frac{1}{3}(x^3-3x^2-x+3)+\frac{13}{8}(x^3-2x^2-x+2)=x^3\left(\frac{11}{24}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{13}{8}\right)+$$

$$+x^2\left(-\frac{11}{4}+3+1-\frac{13}{4}\right)+x\left(\frac{121}{24}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{13}{8}\right)+$$

$$+\left(-\frac{11}{4}-\frac{18}{4}-1+\frac{13}{4}\right)=x^3-2x^2+3x-5.$$

Следовательно, $P_3(x)=x^3-2x^2+3x-5$.

Термин «интерполяция» впервые употребил Д. Валлис (1656) при составлении астрономических и математических таблиц.

31.2. Разности различных порядков. Разделенные разности

Рассмотрим значения $y_i = f(x_i)$ функции $y = f(x)$ в точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$ Выделим всевозможные пары соседних значений: (y_0, y_1), (y_1, y_2), $(y_2, y_3), \ldots$ и в каждом случае вычтем предыдущее значение из последующего, получим разности: $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2, \ldots, y_n - y_{n-1}, \ldots$ Эти разности называют конечными разностями первого порядка или просто первыми разностями. Обозначения первых разностей:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, \tag{31.4}$$

или

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Разностями второго порядка или вторыми разностями называют разности первых разностей $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n, \ldots$ Обозначают вторые разности через $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \tag{31.5}$$

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1},\ \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.$$

Разности третьего порядка (или третьи разности) определяются и обозначаются следующим образом:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n \ldots$$

Аналогично определяются последующее разности. Разности $(n+1)$-го порядка получаются из разностей n-го порядка по формулам

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0,\ \Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1, \ldots \tag{31.6}$$

Таблица разностей различных порядков строится согласно схеме (табл. 31.1).

Таблица 31.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\vdots$	$\vdots$
		Δy_4		$\vdots$		
x_5	y_5		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Каждое число из этой таблицы (начиная с третьего столбца) является разностью двух смежных чисел столбца слева (из нижнего числа вычитается верхнее; разность записывается в следующем столбце между этими числами). Третий столбец содержит первые разности, четвертый – вторые и т. д.

Для контроля вычислений при составлении таблицы разностей пользуются следующим утверждением: сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца.

Разделенные разности первого порядка определяются формулами

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},\ f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ldots, f(x_n, x_{n-1}) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}. \qquad (31.7)$$

Разделенные разности второго порядка получаются из разделенных разностей первого порядка по формулам

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0},\ f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}. \qquad (31.8)$$

Аналогично определяются разделенные разности третьего порядка:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0},$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_4, x_3, x_2) - f(x_3, x_2, x_1)}{x_4 - x_1}. \qquad (31.9)$$

Разделенные разности n-го порядка получаются из разностей $(n-1)$-го порядка по формулам

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)}{x_n - x_0}. \qquad (31.10)$$

В случае равноотстоящих узлов с шагом h $(x_k = x_0 + kh)$ разделенные разности различных порядков имеют вид:

$$f(x_1, x_0) = \frac{\Delta y_0}{h},\ f(x_2, x_1) = \frac{\Delta y_1}{h}, \ldots, f(x_n, x_{n-1}) = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}; \qquad (31.11)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},\ f(x_3, x_2, x_1) = \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}, \ldots; \\ f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (31.12)$$

Пример 31.3. Составить таблицу разностей различных порядков при следующих значениях x и $y = f(x)$:

$$x_0 = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,$$

$$y_0 = 62,\ y_1 = 12,\ y_2 = 2,\ y_3 = 6,\ y_4 = 32.$$

По формулам (31.4) находим первые разности: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 12 - 62 = -50$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 2 - 12 = -10$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 6 - 2 = 4$, $\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 32-6=26$. В соответствии с формулами (31.5) получаем разности второго порядка:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ =-10-(-50)=40, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$ =4-(-10)=14, $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$ = =26-4=22. Аналогично находим разности третьего порядка: $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 14 - 40 = -26$, $\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 22 - 14 = 8$ и разность четвертого порядка $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 8 - (-26) = 34$.

Полученные разности можно представить в виде табл. 31.2.

Таблица 31.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
−3	62				
		−50			
−2	12		40		
		−10		−26	
−1	2		14		34
		4		8	
1	6		22		
		26			
2	32				
Σ		−30	76	−18	
S	−30	76	−18		

Замечание. Последние две строки служат для контроля вычислений: в строке Σ числа равны суммам всех чисел, расположенным в соответствующем столбце, в строке S – разности последнего и первого числа соответствующего столбца. Совпадение этих чисел ($\Sigma_1 = S_1$, $\Sigma_2 = S_2$, $\Sigma_3 = S_3$; в таблице – по диагонали) означает, что вычисления таблицы верны.

31.3. Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \cdots$$

$$\cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad (31.13)$$

в котором $f(x_0, x_1), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – разделенные разности различных порядков. Этот многочлен удовлетворяет условиям $y_k = f(x_k) = P_n(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Интерполяционной формулой Ньютона называется формула

$$f(x) \approx y_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \cdots$$

$$\cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n). \qquad (31.14)$$

Замечание 1. Поскольку любой k-й член многочлена Ньютона зависит только от k первых узлов интерполяции и от значений функции в этих узлах, добавление новых узлов вызывает в формуле (31.13) лишь добавление новых

членов без изменения первоначальных. Это является существенным преимуществом многочлена Ньютона по сравнению с многочленом Лагранжа.

Замечание 2. В силу единственности интерполяционного многочлена n-й степени интерполяционный многочлен Ньютона перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный многочлен Лагранжа и обратно.

В случае равноотстоящих узлов интерполяции ($x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$) из формулы (31.14) с учетом (31.12) получается интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования вперед»:

$$f(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \quad (31.15)$$

Формула (31.15) удобна при интерполировании функций для значений x, близких к наименьшему узлу x_0.

Интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования назад»:

$$f(x) \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + \quad (31.16)$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Формула (31.16) удобна при интерполировании функций для значений x, близких к наибольшему узлу x_n.

Замечание 3. В формуле (31.15) в коэффициенты многочлена входят конечные разности различных порядков, принадлежащие верхней (нисходящей) строке таблицы разностей (см. табл. 31.1). В формуле (31.16) в коэффициенты многочлена входят разности различных порядков, принадлежащие нижней (восходящей) строке таблицы разностей.

Пример 31.4. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения: $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(4) = 45$.

В данном случае $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $y_0 = 6$, $y_1 = 24$, $y_2 = 45$. Отметим, что узлы не являются равноотстоящими (так как $x_1 - x_0 \neq x_2 - x_1$). Интерполяционный многочлен (31.13) при $n = 2$ с учетом равенств (31.11) принимает вид

$$P_2(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_2, x_1, x_0).$$

Вычисляем разделенные разности

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{24 - 6}{3 - 1} = 9, \quad f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45 - 24}{4 - 3} = 21,$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{21-9}{4-1} = 4.$$

Подставляя в выражение для $P_2(x)$ соответствующие значения, находим интерполяционный многочлен Ньютона $P_2(x) = 6 + 9(x-1) + 4(x-1)\times(x-3)$.

Замечание 4. Раскрывая скобки и группируя члены, получаем $P_2(x) = 4x^2 - 7x + 9$.

Пример 31.5. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = 2^x$ по ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$ и $f(2{,}5)$.

Вычислим сначала значения функции в данных равноотстоящих узлах: $y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$, $y_1 = f(x_1) = f(0) = 2^0 = 1$, $y_2 = f(x_2) = f(1) = \ = 2$, $y_3 = f(x_3) = f(2) = 4$, $y_4 = f(x_4) = f(3) = 8$. Составим таблицу разностей различных порядков (табл. 31.3).

Таблица 31.3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1	$\underline{0{,}5}$				
0	1	$\underline{0{,}5}$			
1	2	1	$\underline{0{,}5}$		
2	4	2	1	$\underline{0{,}5}$	
3	$\underline{\underline{8}}$	$\underline{\underline{4}}$	$\underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{1}}$	$\underline{0{,}5}$

Числа, подчеркнутые одной чертой входят в интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования вперед». Многочлен в правой части формулы (31.15) в данном случае $(h = 1)$ принимает вид

$$P_в(x) = 0{,}5 + 0{,}5(x+1) + \frac{0{,}5}{2!}(x+1)x +$$

$$+ \frac{0{,}5}{3!}(x+1)x(x-1) + \frac{0{,}5}{4!}(x+1)x(x-1)(x-2),$$

$$P_в(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x +$$

$$+ \frac{1}{12}(x+1)x(x-1) + \frac{1}{48}(x+1)x(x-1)(x-2). \qquad \text{(I)}$$

С помощью этого многочлена вычислим значение функции $f(x) = 2^x$ при $x = -0{,}5$ (значение аргумента ближе к $x_0 = -1$). Подставляя значение $x = -0{,}5$ в формулу (I), находим

$$P_в\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{15}{48\cdot 16}=0{,}700.$$

Числа табл. 31.3, подчеркнутые двумя чертами (и число 0,5 в столбце $\Delta^4 y$), входят в интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования назад». Многочлен в правой части формулы (31.16) в данном случае принимает вид

$$P_н(x)=8+4(x-3)+\frac{2}{2!}(x-3)(x-2)+\frac{1}{3!}(x-3)(x-2)(x-1)+$$

$$+\frac{0{,}5}{4!}(x-3)(x-2)(x-1)x,$$

$$P_н(x)=8+4(x-3)+(x-3)(x-2)+\frac{1}{6}(x-3)(x-2)(x-1)+$$

$$+\frac{1}{48}(x-3)(x-2)(x-1)x. \qquad \text{(II)}$$

С помощью многочлена (II) вычислим значение данной функции $f(x)=2^x$ при $x=2{,}5$ (это значение аргумента ближе к $x_4=3$). Подставляя значение $x=2{,}5$ в формулу (II), получаем

$$P_н(2{,}5)=8+4(-0{,}5)+(-0{,}5)(0{,}5)+\frac{1}{6}(-0{,}5)\,0{,}5\cdot 1{,}5+$$

$$+\frac{1}{48}(-0{,}5)\,0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=8-2-0{,}25-\frac{1}{6}\cdot 0{,}375-$$

$$-\frac{1}{48}\cdot 0{,}9375=5{,}658;$$

$f(2{,}5)=2^{2{,}5}\approx 5{,}658$. Следовательно, $f(-0{,}5)=0{,}700$, $f(2{,}5)=5{,}658$.

Замечание 5. Многочлены (I) и (II) различаются лишь формой записи. Действительно, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$P_в(x)=P_н(x)=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{24}x^3+\frac{11}{48}x^2+\frac{17}{24}x+1.$$