Глава 32

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

32.1. Формулы прямоугольников

Формулы прямоугольников имеют вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k = h\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \tag{32.1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k = h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \tag{32.2}$$

где

$$h = (b-a)/n,\ \ y_k = f(x_k),\ \ x_k = a + kh\ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{32.3}$$

Формула (32.1) называется формулой левых прямоугольников (рис. 32.1, а), формула (32.2) – формулой правых прямоугольников (рис. 32.1, б).

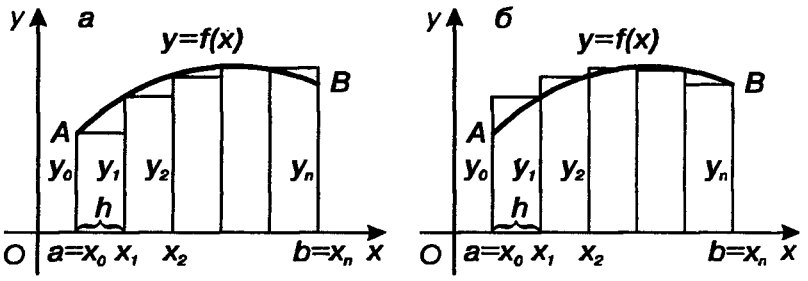

Рис. 32.1

Абсолютная погрешность метода прямоугольников определяется неравенством

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n}, \tag{32.4}$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Пример 32.1. По формулам прямоугольников, приняв $n=4$, вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$.

В данном случае $f(x)=1/(x+2)$, $a=1$, $b=9$. С помощью формул (32.3) находим

$$h=2,\ x_0=1,\ x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=7,\ x_4=9\ \ (x_0=a=1,\ x_4=b=9);$$

$$y_0=f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3},\ y_1=f(x_1)=\frac{1}{x_1+2}=\frac{1}{5},$$

$$y_2=f(x_2)=\frac{1}{7},\ y_3=f(x_3)=\frac{1}{9},\ y_4=f(x_4)=\frac{1}{11}.$$

По формулам (32.1) и (32.2) получаем

$$I_л=h(y_0+y_1+y_2+y_3)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=1{,}57046,$$

$$I_п=h(y_1+y_2+y_3+y_4)=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)=1{,}0753.$$

Пример 32.2. На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы с точностью до 0,1 вычислить $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$?

Абсолютная погрешность при вычислении определенного интеграла по методу прямоугольников определяется формулой (32.4). Если ставится задача, чтобы $|R_n(f)|\le\varepsilon$, т. е. $(b-a)^2M/2n\le\varepsilon$, то $n\ge(b-a)^2M/2\varepsilon$. В данном случае $a=2$, $b=7$, $\varepsilon=0{,}1$. Так как $f(x)=1/\sqrt{x+2}$, $f'(x)=-1/2\times\ 1/\sqrt{(x+2)^3}$, $M=\max\limits_{2\le x\le 7}|f'(x)|=1/16$, то $n\ge(7-2)^2(1/16)/2\cdot 0{,}1\approx 7{,}8$. Поскольку n – целое число, можно принять n=8 (для удобства вычислений можно взять n =10, так как b - a =5).

32.2. Формула трапеций

Формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right),\quad (32.5)$$

где $h=(b-a)/n$, $x_k=a+kh$ $y_k=f(x_k)$, $(k=0,1,2,\ldots,n)$.

Правая часть этой формулы выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h (рис. 32.2). Если R_n – остаточный член приближенной формулы (32.5), то

$$|R_n|\le(b-a)^3M/12n^2,\quad (32.6)$$

где $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

Пример 32.3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций, приняв $n=5$.

В данном случае по расчетной формуле $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, где $h = (1-0)/5 = 0{,}2$, получаем $x_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1$. Так как $y = 1/(1+x)$, то $y_k = 1/(1+x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$. Находим значение y_k: $y_0 = 1/(1+x_0) = 1$, $y_1 = 1/(1+x_1) = 1/1{,}2 = 0{,}833$, $y_2 = 1/(1+x_2) = 1/1{,}4 = 0{,}714$, $y_3 = 0{,}625$, $y_4 = 0{,}556$, $y_5 = 0{,}500$.

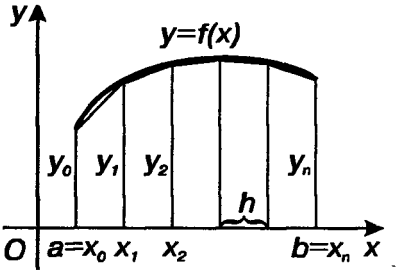

Рис. 32.2

По формуле (32.5) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}2\,(0{,}500 + 0{,}833 + 0{,}714 + 0{,}625 + 0{,}556 + 0{,}250) = 0{,}696$$

Пример 32.4. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл $\int_1^4 x(\ln x - 1)\,dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}1$, $\varepsilon_2 = 0{,}01$?

Для определения числа n отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся формулой (32.6). Неравенство $|R_n| < \varepsilon$ будет выполнено, если $(b-a)^3 M/12n^2 \le \varepsilon$, откуда $n \ge \sqrt{(b-a)^3 M/12\varepsilon}$. Поскольку $f(x) = x(\ln x - 1)$, $f'(x) = \ln x$, $f''(x) = 1/x$, $M = \max\limits_{1 \le x \le 4}(1/x) = 1$, то $n_1 \ge \sqrt{(4-3)^3 \cdot 1/12 \cdot 0{,}1} = \sqrt{22{,}5}$, $n_1 = 5$. Аналогично находим $n_2 = 15$.

32.3. Формула парабол

Формула парабол (или формула Симпсона) имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{2n-2}) + y_{2n}), \qquad (32.7)$$

где

$$h = (b-a)/2n, \quad x_k = a + kh, \quad y_k = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n). \qquad (32.8)$$

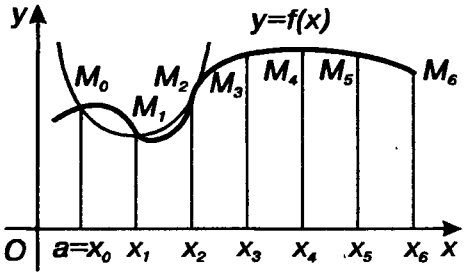

Рис. 32.3

Правая часть формулы (32.7) выражает площадь фигуры, составленной из параболических трапеций $x_0M_0M_2x_2$, $x_2M_2M_4x_4$ и т.д. (рис. 32.3). Дуга $M_0M_1M_2$ графика подынтегральной функции здесь заменена дугой параболы, проходящей через точки M_0, M_1, M_2. Аналогичная замена произведена и для остальных дуг.

Для остаточного члена формулы (32.7) выполняется неравенство

$$|R_n| \le (b-a)^5 M / 180\,(2n)^4, \qquad (32.9)$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(IV)}(x) \right|$.

Пример 32.5. По формуле парабол вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$, приняв $2n=8$.

По первой из формул (32.8) находим $h = (b-a)/2n = (1-0)/8 = 0{,}125$. Составляем таблицу значений $y_k = f(x_k) = 1/(x_k^2+1)$ (табл. 32.1). В последней строке этой таблицы стоят числа, равные суммам чисел, находящихся в соответствующих столбцах.

Таблица 32.1

k	x_k	x_k^2+1	y_0, y_{2n}	y_k (k нечетное)	y_k (k четное)
0	0	1,00000	1,0		
1	0,125	1,01563		$y_1 = 0{,}98461$	
2	0,250	1,06250			$y_2 = 0{,}94118$
3	0,375	1,14063		$y_3 = 0{,}87670$	
4	0,500	1,25000			$y_4 = 0{,}80000$
5	0,625	1,39063		$y_5 = 0{,}71910$	
6	0,750	1,56250			$y_6 = 0{,}64000$
7	0,875	1,76563		$y_7 = 0{,}56637$	
8	1,000	2,00000	0,5		
Σ			1,5	3,14678	2,38118

По формуле (32.7) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8\right] =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 4 \cdot 3{,}14678 + 2 \cdot 2{,}38118 + 0{,}5) = \frac{1}{24}(1 + 12{,}58712 +$$

$$+ 4{,}76236 + 0{,}5) = 0{,}785395.$$

32.4. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с заданной точностью.

Пример 32.6. Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,00001.

Разделив почленно ряд для $\sin x$ на x, получим

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Интегрируя этот ряд почленно (это возможно, так как пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости данного ряда), получаем

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x\Big|_0^{1/4} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!}\Bigg|_0^{1/4} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!}\Bigg|_0^{1/4} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!}\Bigg|_0^{1/4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!}\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5 \cdot 5!}\frac{1}{4^5} - \frac{1}{7 \cdot 7!}\frac{1}{4^7} + \ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, находим

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!4^3} \approx 0{,}25000 - 0{,}00087 = 0{,}24913.$$

Погрешность не превзойдет первого отброшенного члена:

$$\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}=\frac{1}{5\cdot 120\cdot 1024}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{100000}.$$

Пример 32.7 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 0,001.

Подынтегральная функция разлагается в степенной ряд

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\frac{5}{128}x^{12}+\ldots\quad(|x|<1)$$

Интегрируя этот ряд почленно в промежутке $[0, 1/2]$, находим

$$\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx=\left(x+\frac{x^4}{8}-\frac{x^7}{56}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{5x^{13}}{1664}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\frac{1}{2^4}-\frac{1}{56}\frac{1}{2^7}+\frac{1}{160}\frac{1}{2^{10}}-\frac{5}{1664}\frac{1}{2^{13}}+\ldots$$

Поскольку $1/56\cdot 2^7=1/56\cdot 128=1/7168<0{,}001$, то для вычисления данного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, т.е.

$$\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{128}=0{,}508.$$