VI
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Глава 34

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

34.1. Классификация событий

Опытом или испытанием называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующие явление. Возможный результат опыта называют событием. Событие называется достоверным в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте. Событие называется невозможным в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может. Случайным называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти. Два события называются совместными в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и несовместными, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Два события называются противоположными, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. События считают равновозможными, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие. Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют полной группой, если они попарно несовместны, появление одного и только одного из них является достоверным событием. Например, полную группу образуют события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ где A_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ – событие «верхней гранью оказалась грань с цифрой k» (при подбрасывании игрального кубика).

34.2. Действия над событиями. Соотношения между событиями

Суммой или объединением двух событий называется событие, состоящие в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается через $A \cup B$ или $A + B$. Аналогично определяется и обозначается сумма n событий:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Эта сумма означает событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Произведением или пересечением двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через $A \cap B$ или AB. Произведение n событий

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \ldots A_n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

означает событие, состоящие в появлении всех событий $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Понятия суммы и произведения событий распространяются на бесконечные последовательности событий, в этих случаях соответственно применяют, например, обозначения

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B. Разность событий A и B обозначается так: $A \setminus B$ или $A - B$.

Если при каждом осуществлении комплекса условий, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечет за собой B, или A является частным случаем B, и обозначается так: $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A и B равносильны: $A = B$.

34.3. Различные определения вероятности события

Классическое определение вероятности. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n, \tag{34.1}$$

где n – число всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Свойства вероятности события: 1) вероятность достоверного события равна единице; 2) вероятность невозможного события равна нулю; 3) вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы; 4) вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \le P(A) \le 1$.

Геометрическое определение вероятности. Если событие A —попадание в область g точки, брошенной в область G, то его вероятность определяется формулой

$$P(A) = \operatorname{mes} g / \operatorname{mes} G, \tag{34.2}$$

где $\operatorname{mes} g$ – мера области g (длина, площадь, объем). Для одномерной двумерной и трехмерной области эта формула соответственно принимает вид

$$P(A)=l_g/l_G,\ P(A)=S_g/S_G,\ P(A)=V_g/V_G,$$

где l – длина, S – площадь, V – объем соответствующей области.

Статическое определение вероятности. Относительная частота события A (или просто частота) определяется формулой

$$W(A)=m/n, \tag{34.3}$$

где m – число опытов, в которых появилось событие A, n – число всех проведенных опытов. Условной называется частота одного события, вычисленная при условии, что другое событие наступило. Частота события обладает теми же простейшими свойствами, что и вероятность, а также следующими свойствами: а) частота суммы двух несовместимых событий равна сумме частот этих событий: $W(A+B)=W(A)+W(B)$; б) частота произведения двух событий равна произведению частоты одного на условную частоту другого: $W(AB)=$ $=W(A)\times W(B/A)$, $W(AB)=W(B)W(A/B)$.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Аксиоматическое определение вероятности. Пространством элементарных событий называют произвольное множество Ω, а его элементы ω – элементарными событиями. Эти понятия являются первоначальными. В реальных опытах элементарным событиям соответствуют взаимоисключающие итоги опыта. Подмножества множества Ω называют событиями и обозначают заглавными буквами A, B, C и т.п. Пустое множество $\varnothing$ называют невозможным событием, а множество Ω – достоверным событием. Случайным событием называют любое собственное (т.е. отличное от $\varnothing$ и Ω) подмножество Ω. Событие $\overline{A}=\Omega-A$ называют противоположным событию A; событие $\overline{A}$ означает, что A не произошло. События A и B называют несовместными, если $AB=\varnothing$.

Пусть Ω – пространство элементарных событий, L – некоторая система случайных событий. Система L случайных событий называется алгеброй событий, если выполнены условия: 1) $\Omega\in L$; 2) если $A\in L$, $B\in L$, то $AB\in L$, $(A+B)\in L$, $(A-B)\in L$. Из этих условий следует, что $\varnothing\in L$. Алгебра событий называется σ-алгеброй или борелевской алгеброй, если из того, что $A_n\in L$, $n=1,2,\ldots$, следует $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in L$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in L$.

Числовая функция $P(A)$, определенная на алгебре событий L, называется вероятностью, если выполнены следующие аксиомы.

1. Каждому событию $A \in L$ ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$ – его вероятность, т.е. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in L$.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.
3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \varnothing$.
4. Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из L такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Тройка (Ω, L, P), в которой L является σ-алгеброй и функция $P(A)$ удовлетворяет аксиомам 1 – 4, называется вероятностным пространством.

Простейшие следствия из аксиом вероятности.

1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Если $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$, то $p + q = 1$, $p = 1 - q$.
2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.
3. Для любых событий A и B верны соотношения

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$
$$P(A+B) \leq P(A) + P(B).$$

4. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны (т. е. $A_i A_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$), то

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

5. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполняется неравенство

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

6. Если событие A влечет событие B $(A \subset B)$, то

$$P(A) \leq P(B).$$

7. Вероятность любого события выражается неотрицательным числом, не превосходящим единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$; другими словами, область значений функции $P(A)$ принадлежит отрезку $[0, 1]$.
8. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно несовместны и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L$, то $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

9. Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

10. Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

Пример 34.1. Найти вероятность появления верхней грани с числом очков, кратным 3, при бросании игрального кубика.

Поскольку всего элементарных исходов шесть, а благоприятных исходов два: A_3 (появилось 3 очка), A_6 (появилось 6 очков), то $P(A) = 2/6 = 1/3$.

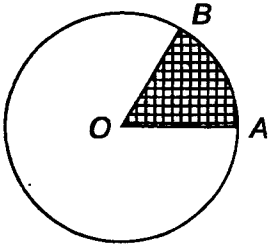

Рис. 34.1

Пример 34.2. Производится стрельба по мишени, имеющей форму круга и равномерно вращающейся вокруг центра O (рис. 34.1). Попадание в круг – событие достоверное. Сектор OAB, площадь которого равна одной шестой части площади всего круга, окрашена в черный цвет. Найти вероятность попадания в сектор OAB.

В данном случае $S_G = S$, $S_g = (1/6)S$, где S – площадь рассматриваемого круга, поэтому $P(A) = S_g/S_G = (1/6)S/S = 1/6$.

Пример 34.3. В результате 20 выстрелов по мишени получено 15 попаданий. Какова относительная частота попаданий?

Так как $m = 15$, $n = 20$, то по формуле (34.3) получаем $W(A) = 15/20 = 3/4$.

34.4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимость событий

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется условной вероятностью события B и обозначается так: $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Условные вероятности определяются формулами

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

где $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

Теорема 34.1. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \quad P(AB) = P(B)P(A/B). \tag{34.4}$$

По определению, событие B не зависит от события A, если

$$P(B/A)=P(B). \tag{34.5}$$

В этом случае также $P(A/B)=P(A)$, т. е. событие A не зависит от события B. Свойство независимости событий является взаимным. Если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Если события A и B независимы, то формулы (34.4) с учетом равенства (34.5) принимают вид

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

Теорема 34.2. *Вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили:*

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A/A_1A_2\ldots A_n). \tag{34.6}$$

В частности, для трех событий A, B, C эта формула имеет вид

$$P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB). \tag{34.7}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если каждое из них и произведение любого числа k остальных $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ являются независимыми.

Замечание. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{34.8}$$

Если A – появление хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n, \tag{34.9}$$

где $q_k=P(\overline{A}_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$; ($\overline{A}_k$ – событие, противоположное A_k).

Если все независимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одну и ту же вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из них определяется формулой $P(A)=1-q^n$.

Пример 34.4. В урне имеется 6 красных, 8 синих и 4 белых шара. Каждое испытание состоит в том, что из урны берут наудачу один шар и не возвращают обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании будет вынут красный шар (событие A), при втором – синий (событие B), при третьем – белый (событие C).

Поскольку $P(A)=6/18=1/3$, $P(B/A)=8/17$, $P(C/AB)=4/16=1/4$, то по формуле (34.7) получаем $P(ABC)=1/3\cdot 8/17\cdot 1/4=2/51$.

Пример 34.5. В каждом из трех ящиков имеется по 24 детали; при этом в первом ящике 18, во втором 20, в третьем 22 стандартные детали. Из каждого ящика берут по одной детали. Найти вероятность того, что все три извлеченные детали окажутся стандартными.

Введем обозначения: извлечение стандартной детали из первого ящика – событие A_1, из второго – событие A_2, из третьего – событие A_3, тогда $P(A_1)=18/24=3/4$, $P(A_2)=20/24=5/6$, $P(A_3)=22/24=11/12$, по формуле (34.8) при $n=3$ получаем $P(A_1A_2A_3)=3/4\cdot 5/6\cdot 11/12=55/96$.

Пример 34.6. Три стрелка в одинаковы и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

Введем обозначения: поражение цели первым стрелком – A_1, вторым A_2, третьим – A_3; попадание в цель только первым стрелком – B_1, только вторым стрелком – B_2, только третьим – B_3. Пусть $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)= \ =p_2$, $P(A_3)=p_3$, тогда $P(\overline{A}_1)=q_1$, $P(\overline{A}_2)=q_2$, $P(\overline{A}_3)=q_3$. Поскольку $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $B_2=A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$, $B_3=A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$ и события B_1, B_2, B_3 несовместны, то вероятность того, что только один стрелок попадет в цель, выражается формулой $P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$. Так как $P(B_1)= \ =P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=p_1q_2q_3$, $P(B_2)=P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3)=p_2q_1q_3$, $P(B_3)=P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)= \ =p_3q_1q_2$, то

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2. \qquad \text{(I)}$$

Пусть C_1 – попадание в цель только вторым и третьим стрелками, C_2 – только первым и третьим, C_3 – только первым и вторым, т. е. $C_1=A_2A_3\overline{A}_1$, $C_2=A_1A_3\overline{A}_2$, $C_3=A_1A_2\overline{A}_3$, тогда вероятность того, что только два стрелка попадут в цель, выразится формулой

$$P(C_1+C_2+C_3)=p_2p_3q_1+p_1p_3q_2+p_1p_2q_3. \qquad \text{(II)}$$

Вероятность того, что три стрелка попадут в цель, определяется формулой

$$P(A_1A_2A_3)=p_1p_2p_3. \qquad \text{(III)}$$

По условию задачи $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}7$. Следовательно, $q_1=1-p_1= \ =0{,}1$, $q_2=1-p_2=0{,}2$, $q_3=1-p_3=0{,}3$. Подставляя эти значения в формулы (I) – (III), находим искомые вероятности:

$$P_1=P(B_1+B_2+B_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}092;$$

$$P_2=P(C_1+C_2+C_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}398;$$

$$P_3=P(A_1A_2A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

34.5. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Предположим, что событие A может осуществляться с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, для которых известны вероятности $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$. Другими словами, положим, что $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$, тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i). \qquad (34.10)$$

Это равенство называют формулой полной вероятности.

Произведен опыт, в результате которого появилось событие A. Требуется найти условные вероятности $P(H_k/A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно теореме умножения вероятностей

$$P(AH_k) = P(A)\, P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k),$$

откуда

$$P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k)/P(A),$$

или

$$P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k) \Big/ \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i), \qquad (34.11)$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Формулы (34.11) носят название формул Бейеса.

В применениях формул Бейеса события H_k называют гипотезами, $P(H_k)$ – априорными вероятностями гипотез, $P(H_k/A)$ – апостериорными вероятностями этих гипотез.

Пример 34.7. Имеется 5 урн с белыми и черными шарами: 2 урны – по 2 белых и 3 черных шара (состав H_1), 2 урны – по 1 белому и 4 черных шара (состав H_2), 1 урна – 4 белых и 1 черный шар (состав H_3). Из одной наудачу выбранной урны вынут шар, который оказался черным (событие A). Чему равна апостериорная вероятность того, что шар вынут из урны второго состава?

Полагая в (34.11) $k = 2$, $n = 3$, получаем формулу, которой надлежит пользоваться в данном случае:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\, P(A/H_2)}{P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3)}.$$

Найдем соответствующее вероятности: $P(H_1)=2/5$, $P(H_2)=2/5$, $P(H_3)=1/5$, $P(A/H_1)=3/5$, $P(A/H_2)=4/5$, $P(A/H_3)=1/5$ и подставим их в данную формулу

$$P(H_2/A) = \frac{2/5 \cdot 4/5}{2/5 \cdot 3/5 + 2/5 \cdot 4/5 + 1/5 \cdot 1/5} = \frac{8/25}{15/25} = \frac{8}{15}.$$

Аналогично можно найти $P(H_1/A) = 6/15$, $P(H_3/A) = 1/15$.