VII
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 37

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

37.1. Понятие функции комплексной переменной. Предел и непрерывность

Комплексное число $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$), изображается точкой комплексной плоскости с координатами (x, y). Пусть D – область (открытое связное множество) комплексной плоскости C. Если каждой точке $z \in D$ по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное комплексное число $w = u + iv$, то говорят, что в области D определена однозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$ и пишут $w = f(z)$, $z \in D$. Функцию $w = f(z) = f(x + iy)$ можно рассматривать как комплексную функцию двух действительных переменных x и y, определенную в области D. Задание такой функции равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$, $w = u + iv$. Таким образом, если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{37.1}$$

Комплексное число c называется пределом однозначной функции $w = f(z)$ при $z \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z - a| < \varepsilon$ следует неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c$.

Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{37.2}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

Область D называется односвязной, когда она ограничена замкнутой линией Γ, не пересекающей себя (рис. 37.1). Область D называется двусвязной, когда она ограничена двумя замкнутыми линиями Γ_1 и Γ_2, которые не пересекаются и каждая не пересекает себя (рис. 37.2); внутренняя линия Γ_2, в частности, может вырождаться в точку или в дугу непрерывной линии. Аналогично определяется трехсвязная, четырехсвязная и т.д. области.

Замечание. Если существуют значения $z \in D$, каждому из которых поставлены в соответствие несколько значений w, то функция $w = f(z)$ называется многозначной.

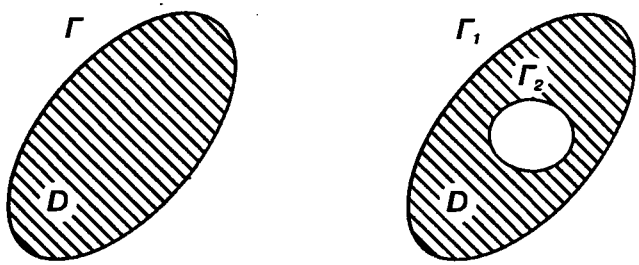

Рис. 37.1

Пример 37.1. Найти значения функции $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ при следующих значениях аргумента: 1) $z = i$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = 2 + i$.

Принимая во внимание значения степеней мнимой единицы (см. формулы (7.19)), получаем: $f(i) = i^3 - 2i^2 + 5i = -i + 2 + 5i = 2 + 4i$. Поскольку $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, $(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i$, то $f(1-i) = (1-i)^3 - 2(1-i)^2 + 5(1-i) = -2 - 2i - 2(-2i) + 5 - 5i = -2 - 2i + 4i + 5 - 5i = 3 - 3i$. Далее,

$$f(2+i) = (2+i)^3 - 2(2+i)^2 + 5(2+i) =$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 - 2(4 + 4i + i^2) + 5(2+i) =$$

$$= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 - 8 - 8i - 2i^2 + 10 + 5i = 8 + 12i - 6 - i - 8 - 8i + 2 + 10 + 5i = 6 + 8i.$$

Пример 37.2. Дана функция $f(z) = 1/(x - iy)$, где $z = x + iy$. Найти ее значения при $z = 1 + j$, $z = i$, $z = 3 - 2i$.

Сначала придадим функции вид (37.1):

$$f(z) = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x + iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2};$$

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Если $z=1+i$, то $x=1$, $y=1$, поэтому $f(1+i)=\frac{1}{1^2+1^2}+i\frac{1}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1+i}{2}$.
При $z=i$, это значит $x=0$, $y=1$, получим $f(i)=i$. В случае $z=3-2i$, т.е. $x=3$, $y=-2$, находим

$$f(3-2i)=\frac{3}{3^2+(-2)^2}+i\frac{-2}{3^2+(-2)^2}=\frac{3}{13}-\frac{2i}{13}=\frac{3-2i}{13}.$$

Замечание. Данную функцию можно записать и в таком виде: $f(z)=\frac{z}{x^2+y^2}$. С учетом этой формулы находим $f(1+i)=\frac{1+i}{2}$, $f(i)=i$, $f(3-2i)=\frac{3-2i}{13}$.

Пример 37.3. Доказать, что функция $w=z^2$ является непрерывной при любом значении z.

Зафиксируем значение z_0 и рассмотрим разность $z^2-z_0^2=(z-z_0)(z+z_0)$. Когда $z\to z_0$, то существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z|<M$, $|z_0|<M$, поэтому

$$\left|z^2-z_0^2\right|=\left|z-z_0\right|\left|z+z_0\right|<\left|z-z_0\right|\left(|z|+|z_0|\right)<2M\left|z-z_0\right|.$$

Выберем $\delta=\varepsilon/2M$. Из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует, что

$$\left|z^2-z_0^2\right|<2M\delta=2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon,\quad \left|z-z_0^2\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0} z^2=z_0^2$. Поскольку выполняется равенство (37.2), то функция $w=z^2$ непрерывна в точке z_0. Точка z_0 была зафиксирована произвольно; значит, функция $w=z^2$ непрерывна в любой точке.

37.2. Основные элементарные функции комплексной переменной

Функции комплексной переменной e^z, $\sin z$, $\cos z$ определяются как суммы соответствующих степенных рядов, сходящихся на всей комплексной плоскости:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \tag{37.3}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \tag{37.4}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \tag{37.5}$$

Показательная функция e^z имеет следующие свойства: 1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$, где z_1, z_2 – произвольные комплексные числа; 2) $e^{z+2k\pi i}=e^z$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, т. е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ – периодические с действительным периодом 2π; они имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ справедливы формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \tag{37.6}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.7}$$

Если $z = x + iy$, то $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, поэтому

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{37.8}$$

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все формулы тригонометрии остаются справедливыми и для тригонометрических функций комплексной переменной.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{37.9}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{37.10}$$

Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ можно рассматривать как суммы степенных рядов, сходящихся на всей комплексной плоскости:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{37.11}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= -i\operatorname{sh} iz, & sh z &= -i\sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i\operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i\operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i\operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= \operatorname{ctg} iz. \end{aligned}\right\} \tag{37.12}$$

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{37.13}$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется такое значение, которое получается при $k=0$; оно обозначается через $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \tag{37.14}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{37.15}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \ \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z, \ \operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \operatorname{Ln} z/n.$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответственно функциям $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$. Например, когда $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Все эти функции являются многозначными; они выражаются через логарифмические функции следующими формулами:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \tag{37.16}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{37.17}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{37.18}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \tag{37.19}$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, когда рассматриваются главные значения соответствующих логарифмических функций.

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется формулой

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \tag{37.20}$$

ее главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}. \tag{37.21}$$

Общая показательная функция $w = a^z$ ($a \neq 0$ – любое комплексное число) определяется формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}; \tag{37.22}$$

главное значение этой многозначной функции равно

$$a^z = e^{z \ln a}. \tag{37.23}$$

Пример 37.4. Доказать, что $e^{\pi i}=-1$, $e^{\pi i/2}=i$.

Число πi можно рассматривать как комплексное число $z=x+iy$, где $x=0$, $y=\pi$, поэтому в соответствии с первой из формул (37.6) находим

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1.$$

Аналогично получаем второе равенство:

$$e^{\pi i/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i.$$

Пример 37.5. Найти: 1) $\cos i$; 2) $\sin(1+2i)$.

По первой из формул (37.7) получаем

$$\cos i=\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\operatorname{ch}1=1{,}5431.$$

В соответствии со второй из формул (37.7) находим:

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\frac{e^{-2}e^{i}-e^{2}e^{-i}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=\frac{\cos 1\,(e^{-2}-e^{2})+i\sin 1(e^{2}+e^{-2})}{2i}=$$

$$=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1=\operatorname{ch}2\sin 1+i\operatorname{sh}2\cos 1=$$

$$=3{,}7622\cdot 0{,}8415+i3{,}6269\cdot 0{,}5403=3{,}1650+1{,}9596i.$$

Пример 37.6. Найти: 1) $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$; 3) $\ln i$; 4) $\operatorname{Ln}i$; 5) $\ln(3+4i)$; $\operatorname{Ln}(3+4i)$.

Поскольку $|-1|=1$, а главное значение аргумента равно π, то в соответствии с формулой (37.14) получим $\ln(-1)=\ln 1+\pi i$; по формуле (37.15) найдем: $\operatorname{Ln}(-1)=\pi i+2k\pi i=(2k+1)\pi i$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

На основании тех же формул и с учетом того, что $|i|=1$, $\arg i=\pi/2$, находим

$$\ln i=\ln 1+\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{2}i,\quad \operatorname{Ln}i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Так как $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\arg(3+4i)=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, то $\ln(3+4i)=$

$$=\ln 5+i\operatorname{arctg}\frac{4}{3},\quad \operatorname{Ln}(3+4i)=\ln 5+i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi i\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Пример 37.7. Найти: 1) i^{i}; 2) 2^{1+i}.

В соответствии с формулой (37.20) или (37.22) при $a=i$, $z=i$ и с учетом того, что $\operatorname{Ln}i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$ (см. пример 37.6) получаем

$$i^{i}=e^{i\operatorname{Ln}i}=e^{i(\pi i/2+2k\pi i)}=e^{-\pi/2-2k\pi}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Главное значение i^{i} равно $e^{-\pi/2}$.

На основании формулы (37.22) при $a=2$, $z=1+i$ находим:

$$2^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln}2}=e^{(1+i)(\ln 2+2k\pi i)}=e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)}=e^{\ln 2-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2).$$

Замечание. Здесь использована формула (37.8).

Пример 37.8. Найти: 1) $\operatorname{Arcsin}2$; $\operatorname{Arctg}(2i)$.

С помощью формул (37.13) и (37.16) находим

$$\operatorname{Arcsin}2=-i\operatorname{Ln}(2i\pm i\sqrt{3})=-i\operatorname{Ln}\left[(2\pm\sqrt{3})i\right]=-i\left[\ln(2\pm\sqrt{3})+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

В соответствии с формулами (37.13) и (37.18) получаем

$$\operatorname{Arctg}(2i)=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{i\ln 3}{2}+k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

37.3. Дифференцирование функций комплексной переменной

Рассмотрим функцию $w=f(z)$, определенную в некоторой области D комплексной плоскости, и точки $z\in D$, $(z+\Delta z)\in D$. Обозначим: $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$.

Производной функции $w=f(z)$ в точке z называется конечный предел отношения $\Delta w/\Delta z$, когда Δz произвольным образом стремится к нулю:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\tag{37.24}$$

Функция, имеющая производную в точке z, называется дифференцируемой в этой точке.

Если $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{37.25}$$

которые называют условиями Д'Аламбера – Эйлера (или условиями Коши – Римана).

Обратно, если в некоторой точке (x,y) функции $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x, y и, кроме того, удовлетворяют соотношениям (37.25), то функция $f(z)=u+iv$ является дифференцируемой в этой точке $z=x+iy$ как функция комплексной переменной z.

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в точке $z\in D$, если она дифференцируема в ней и некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой ее точке.

Для всякой аналитической функции $f(z)$ производная $f'(z)$ выражается через частные производные функций $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Если функция $f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости z на плоскость w; точнее: при $|f'(z_0)|>1$ будет растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ – сжатие. Аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу, на который необходимо повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, которая проходит через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости w при отображении $w=f(z)$. Отметим, что при $\varphi=\arg f'(z)>0$ поворот осуществляется против часовой стрелки, а при $\varphi<0$ – по часовой стрелке.

Отображение с помощью аналитической функции $w=f(z)$ называется конформным отображением.

Дифференцирование элементарных функций. Производные элементарных функций z^n, $\ln z$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ находятся по формулам:

$$(z^n)'=nz^{n-1},\ (\ln z)'=\frac{1}{z},$$

$$(e^z)'=e^z,\ (\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z,$$

$$(\arcsin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ (\arccos z)'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ (\operatorname{arctg} z)'=\frac{1}{1+z^2},$$

$$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,\ (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z.$$

Гармоническая функция. Функция $\varphi(x,y)$ называется гармонической в области D, если она имеет в ней непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (37.26)$$

Если функция $f(z)=u+iv$ аналитическая в области D, то ее действительная часть $u=u(x,y)$ и мнимая часть $v=v(x,y)$ являются гармоническими функциями в этой области.

Однако, если $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ – две произвольные гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ вовсе не обязана быть аналитической функцией: для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции $u_1 = u_1(x, y)$, $v_1 = v_1(x, y)$ удовлетворяли условиям Д'Аламбера – Эйлера.

Пример 37.9. Выяснить, является ли аналитической функция $w = z^2$.

Поскольку $z = x + iy$, то $w = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$; $w = (x^2 - y^2) + +2ixy$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Находим частные производные функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$; условия (37.25) выполнены для всех точек плоскости Oxy. Значит, функция $w = z^2$ является аналитической на всей плоскости.

Пример 37.10. Выяснить, является ли аналитической функция $w = \bar{z}$.

Если $w = \bar{z}$, то $u + iv = x - iy$, $u = x$, $v = -y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \ \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, первое из условий (37.25) не выполняется. Функция $w = \bar{z}$ не имеет производной ни в одной точке плоскости и поэтому не является аналитической.

Пример 37.11. Выяснить, является ли аналитической функция $w = z\mathrm{Re}z$.

Если $w = z\,\mathrm{Re}\,z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$; $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x} = y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Равенства (37.25) выполняются только при $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом, функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической.

Пример 37.12. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Поскольку

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -4y,$$

то из равенств (37.25) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1.$$

Из первого уравнения находим $u = \int -4y dx = -4xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция. Для определения функции $\varphi(y)$ продифференцируем по y функцию $u = -4xy + \varphi(y)$ и подставим полученную производную во второе уравнение: $-4x + \varphi'(y) = -4x - 1$, откуда $\varphi'(y) = -1$, $\varphi(y) = -y + C$. Следова-

тельно, $u=-4xy-y+C$, поэтому $w=u+iv=-4xy-y+C+i(2x^2-2y^2+x)=$ $=2i(x^2-y^2+2ixy)+i(x+iy)+C$, $w=f(z)=2iz^2+iz+C$, где $z=x+iy$.

Пример 37.13. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если ее действительная часть $u(x,y)=x^2-y^2-x$.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$$

то из равенств (37.25) следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$$

Из первого уравнения находим $v=\int(2x-1)\,dy=2xy-y+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция. Для определения функции $\varphi(x)$ находим $v'_x=2y+\varphi'(x)$ и подставляем во второе уравнение: $2y+\varphi'(x)=2y$, откуда $\varphi'(x)=0$, $\varphi(x)=C$. Значит, $v=2xy-y+C$, поэтому $f(z)=u+iv=x^2-y^2-$ $-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2ixy-(x+iy)+Ci=(x+iy)^2-(x+iy)+Ci$, или $f(z)=z^2-z+Ci$.

Пример 37.14. При каком условии трехчлен $u=ax^2+2bxy+cy^2$ является гармонической функцией?

Находим частные производные первого и второго порядка: $u'_x=2ax+$ $+2by$, $u'_y=2bx+2cy$, $u''_{xx}=2a$, $u''_{yy}=2c$. Вторые частные производные удовлетворяют уравнению (37.26), т.е. $2a+2c=0$, когда $a+c=0$. При этом условии данный трехчлен будет гармонической функцией.

37.4. Интегрирование функций комплексной переменной

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области D. Пусть C – кусочно-гладкая дуга линии, которая целиком принадлежит области D; дуга C ограничена точками z_0 (начальная) и Z (конечная). Разделим дугу C на n элементарных дуг, занумеруем точки деления z_k в направлении от точки z_0 до конечной точки Z, причем $z_n=Z$ (рис. 37.3, $n=5$). Введем обозначения: $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $\lambda=\max|\Delta z_k|$. На каждой элементарной дуге z_{k-1}, z_k выберем одну точку z'_k (один из концов или внутреннюю точку) и запишем сумму

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}f(z'_k)\,\Delta z_k\ .$$

Интегралом от функции $f(z)$ по дуге C называется конечный предел суммы I_n при $\lambda \to 0$:

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k')\,\Delta z_k.$$

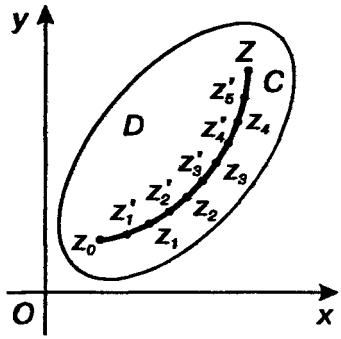

Рис. 37.3

Интеграл от функции комплексной переменной имеет следующие свойства:

1. $\int_C (f(z)+\varphi(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C \varphi(z)\,dz.$

2. $\int_C af(z)\,dz = a\int_C f(z)\,dz$ (a – постоянная).

3. Если дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой C, но имеет направление, противоположное направлению дуги C (для $\overline{C}$ начальная точка Z, а конечная z_0), то

$$\int_{\overline{C}} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

4. Если дуга C состоит из дуг $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (рис. 37.4, $n=3$), то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

5. $\int_C dz = Z - z_0.$

6. Если $|f(z)| < M$ во всех точках дуги C и длина дуги C равна l, то

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le Ml.$$

7. $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$, где $\int_C |f(z)|\,|dz| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(z_k')|\,|\Delta z_k|.$

Вычисление интеграла от однозначной функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int v\,dx + u\,dy, \qquad (37.27)$$

где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

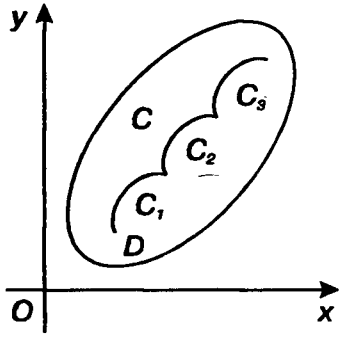

Рис. 37.4

Интеграл $\int\limits_C f(z)\,dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования C.

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то значение интеграла $\int\limits_C f(z)\,dz$ не зависит от линии C, а только от начальной и конечной точки этой линии.

Теорема 37.1 (Коши). *Для всякой функции $f(z)$, аналитической в некоторой односвязной области D, интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, целиком принадлежащему области D, равен нулю:*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{37.28}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитическая в однозначной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \tag{37.29}$$

где $F(z)$ – первообразная для функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$ в области D.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ – аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 – произвольные точки этой области, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,\varphi'(z)\,dz = [f(z)\,\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\,f'(z)\,dz. \tag{37.30}$$

Замена переменной в интегралах от функций комплексной переменной проводится аналогично случаю функции действительной переменной. Если аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно линию C_1 в w-плоскости на линию C в z-плоскости, то

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw. \tag{37.31}$$

Если путь интегрирования является лучом, исходящим из точки z_0 или окружностью с центром в точке z_0, то целесообразна подстановка

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}. \tag{37.32}$$

В первом случае $\varphi = \text{const}$, ρ – действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho = \text{const}$, а φ – действительная переменная интегрирования.

Пример 37.15. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z}dz$, где L – линия, соединяющая точки $z = -1$, $z = 1$, причем: 1) L – отрезок действительной оси от точки $z = -1$ до точки $z = 1$; 2) L – верхняя полуокружность $|z| = 1$.

Поскольку для комплексного числа $z = x + iy$ сопряженным является число $\bar{z} = x - iy$, то на действительной оси $z = x$, $dz = dx$ и $\bar{z} = x$. В первом случае получаем

$$\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_{-1}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Верхнюю полуокружность $|z| = 1$ можно задать так: $z = e^{i\varphi}$, где $0 \le \varphi \le \pi$, причем φ убывает. Поскольку $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}$, то во втором случае

$$\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_{\pi}^{0} e^{-i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi i.$$

Замечание. Функция $w = \bar{z}$ не является аналитической (для функций $w = \bar{z} = x - iy$ не выполняются условия (37.25)); значение интеграла от этой функции зависит от пути интегрирования, соединяющего указанные точки.

Пример 37.16. Вычислить интеграл $\int\limits_L (1 + i - 2\bar{z})\, dz$, где L – отре-зок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Перепишем подынтегральную функцию в виде (37.1)

$$1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = 1 - 2x + i(1 + 2y),$$

здесь $u(x, y) = 1 - 2x$, $v(x, y) = 1 + 2y$.

На основании формулы (37.27) получаем

$$\int\limits_L (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int\limits_L (1 - 2x)\, dx - (1 + 2y)\, dy + i\int\limits_L (1 + 2y)\, dx + (1 - 2x)\, dy.$$

Отрезок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$ имеет уравнение $y = x$ $(0 \le x \le 1)$, поэтому $dy = dx$; пределы интегрирования соответственно равны: $a = 0$, $b = 1$. Следовательно,

$$\int_L (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)]\, dx + i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)]\, dx =$$

$$= -4 \int_0^1 x dx + 2i \int_0^1 dx = -2 + 2i = 2\,(i - 1).$$

Пример 37.17. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z - a}$, где L – окружность радиуса r с центром в точке a.

Переходим к новой переменной в соответствии с формулой (37.32): $z = a + re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. На основании формулы (37.31) получаем

$$\int_L \frac{dz}{z - a} = \int_{L_1} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\, d\varphi = i \int_{L_1} d\varphi.$$

Поскольку L_1 – отрезок действительной оси от точки 0 до точки 2π, то

$$\int_{L_1} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Таким образом, $\int_L \frac{dz}{z - a} = i \int_{L_1} d\varphi = 2\pi i.$

Пример 37.18. Вычислить интеграл $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz.$

Поскольку подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ является аналитической везде, то с помощью формулы Ньютона-Лейбница находим:

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2 + i)^3 + (2 + i)^2 - (1 - i)^3 - (1 - i)^2 =$$

$$= (2 + 11i) + (3 + 4i) - (-2 - 2i) - (-2i) = 7 + 19i.$$

Пример 37.19. Вычислить интеграл $\int_0^i z \sin z dz.$

Функция $f(z) = z \sin z$ является аналитической на всей плоскости z, поэтому интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $z = 0$ и $z = i$.

На основании формулы интегрирования по частям (37.30) и формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_0^i z\sin z dz = \int_0^i z(-\cos z)'\, dz = -z\cos z\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz =$$

$$= -z\cos z\Big|_0^i + \sin z\Big|_0^i = -i\cos i + \sin i = i\,(\mathrm{sh}\,1 - \mathrm{ch}\,1) = i\,(1{,}1752 - 1{,}5431) = -0{,}3679i.$$

Замечание. Здесь использованы равенства $\mathrm{sh}\,z = -i\sin iz$, $\mathrm{ch}\,z = \cos iz$ при $z = 1$ (см. формулы (37.12)): $\mathrm{sh}\,1 = -i\sin i$, $\mathrm{ch}\,1 = \cos i$, поэтому $-i\cos i = -i\,\mathrm{ch}\,1$, $\sin i = i\,\mathrm{sh}\,1$.

37.5. Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в области G, ограниченной кусочно-гладким контуром L, и на самом контуре, то верна интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \qquad (z_0 \in G), \tag{37.33}$$

где контур L обходится так, чтобы область G все время оставалась слева (обход контура против часовой стрелки).

Если функция $f(z)$ аналитическая в области G и на ее границе L, то для любого натурального n верна формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{37.34}$$

где $z_0 \in G$, $z \in L$, $f^{(n)}(z_0)$ – значение n–ой производной функции $f(z)$ в точке z_0.

Формулы (37.33) и (37.34) дают возможность вычислить следующие интегралы:

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0) \tag{37.35}$$

$$\int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{37.36}$$

Пример 37.20. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z^2+1}$, где L – окружность радиуса R=1 с центром в точке z=i, причем обход контура осуществляется против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться формулой (37.35), преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}, \quad f(z) = \frac{1}{z+i}.$$

Функция $f(z)=1/(z+i)$ является аналитической внутри рассматриваемого круга и на его границе, поэтому справедливы формулы (37.33) и (37.35). В соответствии с последней формулой получаем

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1}=\int_L \frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i\cdot f(i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi.$$

Пример 37.21. Вычислить интеграл $\int_L \frac{\sin z}{z^2}dz$, где L – любой замкнутый контур, который не проходит через точку $z=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

Если точка $z=0$ находится вне контура L, то функция $\frac{\sin z}{z^2}$ будет аналитической на контуре L и в области, ограниченной этим контуром, поэтому в соответствии с теоремой 37.1 интеграл равен нулю:

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2}dz=0.$$

Если точка $z=0$ принадлежит области, ограниченной контуром L, то справедливыми будут формулы (37.34) и (37.36) для функции $f(z)=\sin z$, $z_0=0$, $n=1$. На основании формулы (37.36) для этого случая, поскольку $f'(z)=(\sin z)'=\cos z$, получим

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2}dz=2\pi i\cos 0=2\pi i.$$

Пример 37.22. Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$, где L – окружность $|z-2|=5$.

В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеются две точки $z=0$, $z=6$, в которых знаменатель дроби равен нулю. Формулой (37.33) непосредственно пользоваться нельзя. В этом случае вычислить интеграл можно следующим образом. Разложим дробь $1/(z^2-6z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-6}-\frac{1}{z}\right).$$

С учетом этого равенства и в соответствии с формулой (37.35) получаем (при $z_0=6$ и $z_0=0$ соответственно):

$$\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\int_L \frac{e^{x^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z}=\frac{1}{6}2\pi i e^{36}-\frac{1}{6}2\pi i=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Пример 37.23. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, где L – окружность $|z-1|=1$.

Подынтегральная функция $\sin \pi z/(z^2-1)^2$ является аналитической в области $|z-1|\le 1$ везде, кроме точки $z_0=1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, аналитическую в круге $|z-1|\le 1$. Для этого запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\sin \pi z/(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

и в качестве $f(z)$ рассмотрим функцию $\sin \pi z/(z+1)^2$.

На основании формулы (37.36) при $n=1$ и $z_0=1$ получим

$$\int\limits_L \frac{\sin \pi z/(z+1)^2}{(z-1)^2}\,dz=2\pi i f'(1).$$

Найдем производную функции $f(z)=\sin \pi z/(z+1)^2$ и ее значение при $z=1$:

$$f'(z)=\left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{\pi \cos \pi z\cdot(z+1)-2\sin \pi z}{(z+1)^3},\quad f'(1)=\frac{2\pi \cos \pi}{2^3}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz=-\frac{\pi^2 i}{2}.$$

37.6. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в точке $z=z_0$, разлагается в окрестности этой точки в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n, \tag{37.37}$$

коэффициенты C_n которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{37.38}$$

где Γ – окружность с центром в точке $z=z_0$, расположенная в окрестности точки z_0, в которой функция $f(z)$ аналитическая. Центр окружности круга сходимости находится в точке z_0; эта окружность проходит через особую точку ξ функции $f(z)$, ближайшую к точке z_0, т.е. радиус сходимости ряда (37.37) будет равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Для функций $1/(1-z)$, $1/(1+z)$, $(1+z)^{\alpha}$, $\ln(1+z)$ ряды Тейлора имеют следующий вид:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.39}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.40}$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.41}$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots \quad (R=1). \tag{37.42}$$

Формула (37.42) определяет разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ главного значения логарифма. Чтобы получить ряд Тейлора для других значений многозначной функции $\mathrm{Ln}(1+z)$, необходимо в правой части добавить числа $2n\pi i$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$:

$$\mathrm{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+2n\pi i.$$

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ (не исключены случаи $r=0$, $R=+\infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n, \tag{37.43}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots), \tag{37.44}$$

где Γ – произвольная окружность с центром в точке z_0, расположенная внутри этого кольца.

В формуле (37.43) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

называется главной частью ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\cdots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Пример 37.24. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(2-z)$ в окрестности точки $z_0=0$.

Преобразуем эту функцию следующим образом:

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2(1-z/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

Поскольку (см. формулу (37.39))

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots \qquad (|t|<1), \tag{37.45}$$

то при $t=z/2$ получим

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots \qquad \left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\cdots.$$

Полученный ряд сходится при $|z/2|<1$, или $|z|<2$.

Пример 37.25. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(5-3z)$ в окрестности точки $z_0=1$.

Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{5-3(z-1)-3}=\frac{1}{2-3(z-1)}=\frac{1}{2(1-3(z-1)/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}.$$

В соответствии с формулой (37.45) при $t=3(z-1)/2$ получаем

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}=1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\cdots$$

Итак,

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3(z-1)/2}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}(z-1)+\frac{3^2}{2^3}(z-1)^2+\cdots+\frac{3^n}{2^{n+1}}(z-1)^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится при $|3(z-1)/2|<1$, или $|z-1|<2/3$.

Пример 37.26. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\operatorname{tg}z$ в окрестности точки $z_0=0$.

Ближайшая от начала координат особая точка функции $\operatorname{tg} z$ есть $z=\pi/2$, поэтому функция $\operatorname{tg} z$ разлагается в ряд $C_0+C_1z+C_2z^2+\ +C_3z^3+\cdots$ в круге $|z|<\pi/2$.

Заметив, что $\operatorname{tg} z$ – нечетная функция, поэтому в разложении будут только члены с нечетными показателями, использовав равенство $\sin z=\cos z\cdot\operatorname{tg} z$ и ряды для $\sin z$ и $\cos z$ (см. формулы (37.4) и (37.5)), получим

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)(C_1z+C_3z^3+C_5z^5+C_7z^7+\cdots).$$

Сравнивая коэффициенты при $z, z^3, z^5, z^7, \ldots$ в обеих частях равенства, находим

$$1=C_1,\ -\frac{1}{3!}=C_3-\frac{1}{2!}C_1,\ \frac{1}{5!}=C_5-\frac{1}{2!}C_3+\frac{1}{4!}C_1,\ -\frac{1}{7!}=C_7-\frac{1}{2!}C_5+\frac{1}{4!}C_3-\frac{1}{6!}C_1,\ldots.$$

Из этих уравнений определяем коэффициенты: $C_1=1$, $C_3=1/3$, $C_5=2/15$, $C_7=17/315$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots. \qquad (37.46)$$

Пример 37.27. Найти первые три члена ряда Тейлора по степеням z функции $f(z)=e^{\sin z}$.

Поскольку (см. формулу (37.3))

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots,$$

то при $t=\sin z$ получим

$$e^{\sin z}=1+\frac{\sin z}{1!}+\frac{\sin^2 z}{2!}+\frac{\sin^3 z}{3!}+\cdots,$$

$$e^{\sin z}=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots=$$

$$=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots=$$

$$=1+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

Итак,

$$e^{\sin z}=1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots.$$

Пример 37.28. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в следующих «кольцах»: 1) $0<|z|<1$; 2) $|z|>1$; 3) $0<|z-1|<1$.

Во всех этих кольцах данная функция является аналитической и поэтому может быть разложена в них в соответствующий ряд Лорана. Представим эту функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

1. Поскольку $|z|<1$, то с учетом формулы (37.39) получим

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots.$$

Главная часть ряда Лорана здесь имеет только один член.

2. Если $|z|>1$, то $|1/z|<1$, поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots.$$

В этом разложении отсутствует правильная часть.

3. Если $0<|z-1|<1$, то функцию $\frac{1}{z}$ нужно разложить в геометрический ряд со знаменателем $z-1$:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{1-z}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots.$$

Главная часть полученного ряда Лорана содержит только один член.

Пример 37.29. Функцию $f(z)=1/(z-1)(z-2)$ разложить в ряд Лорана, приняв $z_0=0$.

Данная функция имеет две особые точки: $z=1$, $z=2$. Следовательно, имеется три кольца с центром в точке 0, в каждом из которых функция аналитическая: 1) круг $|z|<1$; 2) кольцо $1<|z|<2$; 3) внешность круга $|z|\le 2$, т. е. $|z|>2$.

Функцию $f(z)$ разлагаем на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1};\quad \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

1. Поскольку $|z|<1$, $|z/2|<1$, то с учетом (37.39) получим

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}+\cdots, \qquad \text{(I)}$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots. \qquad \text{(II)}$$

Сложив ряды (I) и (II), найдем, что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\cdots.$$

Полученный ряд является рядом Тейлора.

2. Если $1<|z|<2$, то ряд (I) сходящийся (ибо $(|z/2|<1)$, но ряд (II) расходится (так как $|z|>1$). Разложение (II) заменим другим:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right). \qquad \text{(III)}$$

Ряд (III) сходится, поскольку $|z|>1$ и $|1/z|<1$.

Сложив ряды (I) и (III), получим ряд Лорана для данной функции:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots,$$

в котором $C_n=-1/2^{n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $C_{-n}=-1$ $(n=1,2,\ldots)$.

3. Когда $|z|>2$, то равенство (III) верно, поскольку и $|z|>1$, но ряд в правой части формулы (I) уже будет расходящимся. Разложение (I) заменим другим:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\cdots \qquad \text{(IV)}$$

Этот ряд сходится, так как $|z|>2$ и, следовательно, $|2/z|<1$. Сложив (III) и (IV) получим разложение данной функции в ряд Лорана

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\frac{2^3-1}{z^4}+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots,$$

для которого $C_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $C_{-n}=2^{n-1}-1$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Пример 37.30. Функцию $f(z)=z^4/(z-2)^2$ разложить в ряд Лорана по степеням $z-2$.

Обозначим $z-2=Z$, тогда

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(Z+2)^4}{Z^2}=\frac{Z^4+8Z^3+24Z^2+32Z+16}{Z^2}=$$

$$=\frac{16}{Z^2}+\frac{32}{Z}+24+8Z+Z^2,$$

т.е.

$$\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2.$$

Здесь главная часть ряда Лорана имеет два члена, а правильная – три члена. Поскольку полученное разложение содержит только конечное количество членов, то оно справедлива для любой точки плоскости, кроме $z=2$.

37.7. Нули функции. Особые точки

Нули функции. Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в точке z_0. Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, когда выполняются условия:

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\dots,f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0. \qquad (37.47)$$

Если $n=1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Значение z_0 тогда и только тогда является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, когда в некоторой ее окрестности верно равенство

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z), \qquad (37.48)$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Особые точки. Особой точкой функции $f(z)$ называется точка z_0, в которой эта функция не является аналитической. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, когда существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитическая всюду, кроме z_0. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется устранимой, когда существует конечный предел этой функции в данной точке: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$. Точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$, когда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем функции

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}. \qquad (37.49)$$

Точку z_0 называют полюсом порядка $n\,(n\geq 1)$ функции $f(z)$, когда эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z)=1/f(z)$. В случае $n=1$ полюс называют простым.

Для того, чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было привести к виду

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}, \tag{37.50}$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, когда в ней функция $f(z)$, не имеет ни конечного ни бесконечного предела.

Справедливы следующие утверждения.

1. Точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда ее лорановское разложение в окрестности точки z_0 не содержит главной части.
2. Точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки z_0 содержит только конечное число членов:

$$f(z)=\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,(z-z_0)^n \quad (C_{-k}\neq 0). \tag{37.51}$$

   Наибольший из показателей степени разности $z-z_0$ в знаменателях совпадает с порядком полюса.
3. Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки z_0 содержит бесконечное множество членов.

Пример 37.31. Доказать, что точка $z_0=0$ является нулем второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z$.

Разложим в ряды данную функцию и ее первую и вторую производные:

$$f(z)=1-\cos z=1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right),$$

$$f(z)=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots,\quad f'(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

$$f''(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

Поскольку $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$, т.е. выполняются условия (37.47) при $n=2$, то $z_0=0$ – нуль второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z$.

Пример 37.32. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=z^7/(z-\sin z)$.

Использовав разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{z^7}{z-\sin z}=\frac{z^7}{z-(z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots)}=\frac{z^7}{z^3/3!-z^5/5!+\cdots},$$

$$f(z)=z^4\cdot\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\ldots};\ f(z)=z^4\varphi(z),\ \varphi(z)=\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\cdots}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ записана в виде (37.48), где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$. Значит, точка $z_0=0$ – нуль четвертого порядка для данной функции.

Пример 37.33. Найти нули функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$ и определить их порядки.

Когда $f(z)=0$ или $(z^2+1)^3\sin z=0$, то $z^2+1=0$ либо $\sin z=0$. Из первого равенства следует, что $z=-i$, $z=i$, а со второго, что $z=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

Пусть $z=-i$, тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде (37.48): $f(z)=(z+i)^3\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)=(z-i)^3\sin z$ является аналитической в точке $z=-i$, причем $\varphi(-i)=-8i\sin i=8\operatorname{sh}1\neq 0$. Значит, точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что $z=i$ – нуль третьего порядка. Функция $\sin z$ имеет нули $z=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Действительно,

$$\sin z=(-1)^k\sin(z-k\pi)=(-1)^k\left[(z-k\pi)-\frac{(z-k\pi)^3}{3!}+\frac{(z-k\pi)^5}{5!}-\cdots\right].$$

Это нули первого порядка для функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$: $f(k\pi)=0$, но $f'(k\pi)\neq 0$, ибо $f'(z)=6z(z^2+1)^2\sin z+(z^2+1)^3\cos z$.

Пример 37.34. Доказать, что точка $z_0=0$ для функции $f(z)=(e^z-1)/z$ является устранимой особой точкой.

Действительно, поскольку $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$, $\frac{e^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$, то $z_0=0$ – устранимая особая точка.

Пример 37.35. Найти полюсы функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

Так как для функции $\varphi(z)=1/f(z)=(z^2-1)(z^2+1)^2/z$ точки $z_1=-1$, $z_2=1$ – нули первого порядка, $z_3=-i$, $z_4=i$ – нули второго порядка, то для функции $f(z)$ точки ± 1 – полюсы первого порядка, точки $\pm i$ – полюсы второго порядка.

Замечание. Если $f(z)=P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих корней, то корни многочлена $Q(z)$ (и только они) являются полюсами функции $f(z)$. Порядок полюсов $f(z)$ совпадает с кратностью соответствующих корней многочлена $\varphi(z)$. Например, когда

$$f(z)=\frac{z-1}{(z+i)(z-3)^2(z+4)^3},$$

то $z_1=-i$ – простой полюс, $z_2=3$ – полюс второго порядка, $z_3=-4$ – полюс третьего порядка.

Пример 37.36. Исследовать особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

Поскольку $z^3+z^2-z-1=z^2(z+1)-(z+1)=(z+1)(z^2-1)=(z+1)^2\times\ \times(z-1)$, то функция имеет особые точки $z=-1$, $z=1$. Исследуем точку $z=-1$. Функцию $f(z)$ приведем к виду (37.50):

$$f(z)=\frac{\sin z/(z-1)}{(z+1)^2},\ f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},\ \varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1},$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в окрестности точки $z=-1$, причем $\varphi(-1)=\dfrac{\sin(-1)}{-2}\neq 0$. Следовательно, точка $z=-1$ является полюсом второго порядка.

Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{\sin z/(z+1)^2}{z-1},\ f(z)=\frac{\varphi_1(z)}{z-1},\ \varphi_1(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^2},$$

заключаем, что $z=1$ – простой полюс данной функции.

Пример 37.37. Найти особые точки функции $f(z)=e^{1/z}$ и определить их типы.

Принимая во внимание, что (см. (37.3))

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots,$$

при $t=1/z$ получим

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

Этот ряд сходится всюду, кроме точки $z=0$. Его можно рассматривать как разложение функции $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$. Поскольку главная часть ряда имеет бесконечное множество членов, то точка $z=0$ является существенно особой точкой для функции $e^{1/z}$.

37.8. Вычеты функций

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, которое обозначают через $\operatorname{res} f(z_0)$[1] и определяют формулой

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)\, dz, \tag{37.52}$$

где интеграл взят в положительном направлении по контуру γ. (Используются и другие обозначения: $\operatorname{res}[f(z), z_0]$, $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$). В качестве контура γ рассматривается окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса; такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек этой функции. Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{res} f(z_0) = C_{-1}. \tag{37.53}$$

Вычет функции в устранимой особой точке равен нулю.

Если z_0 – полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z-z_0)^n\}. \tag{37.54}$$

В случае простого полюса $(n=1)$

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z-z_0)]. \tag{37.55}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 является частным двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, т. е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{37.56}$$

Если z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для нахождения $\operatorname{res} f(z_0)$ необходимо найти коэффициент C_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0; это и будет $\operatorname{res} f(z_0)$.

---

[1] res – сокращение французского слова résidu, что означает вычет.

Теорема 37.2. *Если функция $f(z)$ является аналитической на границе Γ области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k). \tag{37.57}$$

Этой теоремой (ее называют теоремой Коши о вычетах) пользуются при вычислении определенных интегралов и нахождении сумм рядов.

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки. Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической в бесконечно удаленной точке $z=\infty$, если функция

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

аналитична в точке $\xi = 0$. Например, функция $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ аналитична в точке $z=\infty$, поскольку функция $\varphi(\xi) = f(1/\xi) = \sin\xi$ аналитична в точке $\xi = 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z=\infty$).

Говорят, что $z=\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует предел этой функции при $z \to \infty$.

Критерии типа бесконечно удаленной особой точки, связанные с рядом Лорана, изменяются в сравнении с критериями для конечных особых точек.

Теорема 37.3. *Если $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то ее лорановское разложение в окрестности данной точки не содержит положительных степеней z; когда $z=\infty$ – полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z, в случае существенно особой точки – бесконечное множество положительных степеней z.*

При этом лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называют разложение $f(z)$ в ряд Лорана, сходящийся всюду вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z=0$ (кроме, быть может, самой точки $z=\infty$).

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой окрестности точки $z=\infty$ (кроме, быть может, самой этой точки).

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечности называется величина

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{37.58}$$

где γ – окружность достаточно большого радиуса $|z| = \rho$, которую точка z проходит по часовой стрелке (при этом окрестность точки $z=\infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = z_0$).

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$, взятому со знаком минус:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}. \tag{37.59}$$

Известные разложения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ (см. п. 37.2) можно рассматривать как лорановские ряды в окрестности точки $z=\infty$. Поскольку каждый ряд содержит бесконечное множество положительных степеней z, то указанные функции имеют в точке $z=\infty$ существенную особенность.

Теорема 37.4. *Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю:*

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0, \tag{37.60}$$

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Последнее равенство используется при вычислении некоторых интегралов.

Пример 37.38. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$.

Данную функцию можно записать так: $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$ и рассматривать эту сумму как разложение в ряд Лорана по степеням z, для которого $C_{-1} = 1$. В соответствии с формулой (37.53) находим, что $\operatorname{res} f(0) = 1$ ($z_0 = 0$ – особая точка).

Замечание. Вычет можно найти и с помощью формулы (37.54). Поскольку $z_0 = 0$ – полюс второго порядка, то

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d\left(\left((z+1)/z^2\right) \cdot z^2\right)}{dz} = \lim_{z \to 0} \frac{d(z+1)}{dz} = 1.$$

Пример 37.39. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-4)}$.

Эта функция имеет два простых полюса: $z=2$ и $z=4$. В соответствии с формулой (37.55) находим:

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z \to 2} \frac{z}{(z-2)(z-4)} \cdot (z-2) = \lim_{z \to 2} \frac{z}{z-4} = \frac{2}{2-4} = -1,$$

$$\operatorname{res} f(4) = \lim_{z \to 4} \frac{z(z-4)}{(z-2)(z-4)} = \lim_{z \to 4} \frac{z}{z-2} = \frac{4}{4-2} = 2.$$

Пример 37.40. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$.

Поскольку $z_0=1$ – полюс третьего порядка, то на основании формулы (37.54) получаем

$$\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2((z^2/(z-1)^3)\cdot(z-1)^3)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

Пример 37.41. Найти вычет функции $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-1}$.

Точка $z_0=1$ является единственной конечной особой точкой функции $f(z)$. Чтобы найти $\operatorname{res} f(1)$, разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$; при этом используем ряд Тейлора для $\cos t$ (см. (37.5))

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\dots$$

при $t=1/(z-1)$. Это разложение принимает вид

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=[1+(z-1)]^2\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\dots\right]=$$

$$=[1+2(z-1)+(z-1)^2]\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\dots\right].$$

Нас интересует только коэффициент при $1/(z-1)$. Соответствующий член ряда имеет вид $2(z-1)\cdot\left(\dfrac{-1}{2!(z-1)^2}\right)=\dfrac{-1}{z-1}$. Значит, $C_{-1}=-1$, поэтому $\operatorname{res} f(1)=C_{-1}=-1$.

Пример 37.42. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz$, где γ – окружность $|z|=1/2$, которую точка z проходит в положительном направлении.

В круге $|z|\le 1/2$ содержится только одна особая точка подынтегральной функции – это полюс второго порядка $z=0$. Вычет функции $f(z)$ в точке $z=0$ найдем в соответствии с формулой (37.54):

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{\ln(z+2)}{z^2}\right]'=\lim_{z\to 0}[\ln(z+2)]'=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}.$$

На основании формулы (37.52) получаем:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz,\quad \int_\gamma\frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz=\pi i.$$

Пример 37.43. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$ в следующих случаях: 1) γ – окружность $|z|=1$; 2) γ – окружность $|z|=3$; 3) γ – окружность $|z|=5$.

В соответствии с формулой (37.55) найдем сначала вычеты функции $f(z)=1/z(z+2)(z+4)$ относительно простых полюсов $z_1=0, z_2=-2, z_3=-4$:

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)(z+4)}=\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to -2}(z+2)f(z)=\lim_{z\to -2}\frac{1}{z(z+4)}=-\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res} f(-4)=\lim_{z\to -4}(z+4)f(z)=\lim_{z\to -4}\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{8}.$$

Интегралы найдем с помощью формулы (37.57).

В первом случае в области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится только один полюс $z=0$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi i}{4}.$$

Во втором случае окружность $|z|=3$ ограничивает область, которая содержит полюсы $z_1=0$ и $z_2=-2$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{4}.$$

В третьем случае внутри области, ограниченной контуром $|z|=5$, находятся три полюса: $z_1=0$, $z_2=-2$, $z_3=-4$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=0.$$