Глава 38

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

38.1. Оригинал и изображение

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ вещественной переменной t, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ интегрируема на любом конечном промежутке оси Ot (локально интегрируема).
2. $f(t)=0$ для всех $t<0$.
3. $|f(t)|$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M>0$ и s, что для всех t

$$|f(t)|\le Me^{st}.$$

Нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется это неравенство, называется показателем роста функции $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t>0,\\ 0 \text{ при } t<0.\end{cases} \tag{38.1}$$

Очевидно, что

$$\varphi(t)\,\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t) \text{ при } t>0,\\ 0 \text{ при } t<0;\end{cases}$$

если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $\varphi(t)\eta(t)$ является функцией-оригиналом. Для сокращения записи вместо $\varphi(t)\eta(t)$ пишут $f(t)$, считая, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Изображением функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p=s+i\sigma$, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}dt. \tag{38.2}$$

Интеграл в правой части равенства называют интегралом Лапласа, а переход от оригинала к его изображению – преобразованием Лапласа.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением $f(t)$, символически записывают так:

$$f(t)\doteqdot F(p)$$

и называют операционным (или операторным) равенством. Употребляют и другие обозначения, например: $F(p) \to f(t)$; $F(p) = Lf(t)$; $f(t) = L^{-1}F(p)$.

Теорема 38.1. *Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

Следствие. *Изображение $F(p) \to 0$, если $p \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} p = s$ неограниченно возрастает, а p находится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$:*

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0.$$

Теорема 38.2. *Преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех $t > 0$.

Пример 38.1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{3t} \sin 2t \text{ при } t > 0, \\ 0 \text{ при } t < 0, \end{cases}$$

является функцией-оригиналом.

Убедимся в том, что все три условия, определяющие функцию-оригинал, выполняются для данной функции $f(t)$. Действительно, функция $f(t)$ локально интегрируема: интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{3t} \sin 2t dt$$

существует для любых конечных t_1 и t_2. Условие 2 выполняется в соответствии с определением функции $f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t < 0$). Наконец, $\left| e^{3t} \sin 2t \right| \le e^{3t}$ для любых вещественных t, так что в качестве M в условии 3 можно взять число ≥ 1, $s_0 = 3$.

Пример 38.2. Найти изображение единичной функции Хевисайда, определяемой формулой (38.1).

В соответствии с формулой (38.2) получаем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \to +\infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right).$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-pa} = 0$; в этом случае

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \tag{38.3}$$

$$F(p) = \frac{1}{p}, \quad \eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{38.4}$$

З а м е ч а н и е. Изображение (38.4) получено при условии $\operatorname{Re} p = s > 0$. При $s \le 0$ интеграл Лапласа не существует. Однако функция $1/p$ аналитическая на всей плоскости комплексной переменной p, кроме $p = 0$, и ее значение для $\operatorname{Re} p < 0$ можно рассматривать как значения изображения $F(p)$ при $\operatorname{Re} p < 0$. Для функции $f(t) = 1$ равенство $1 \doteqdot 1/p$ будет выполнятся для всех $p \ne 0$.

П р и м е р 38.3. Найти изображение функции $f(t) = e^{kt}$.

Принимая во внимание равенство (38.3), получаем

$$e^{kt} \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-k)t} dt = \frac{1}{p-k},$$

$$e^{kt} \doteqdot \frac{1}{p-k}, \tag{38.5}$$

когда $\operatorname{Re}(p-k) > 0$. Поскольку функция $1/(p-k)$ аналитическая при всех $p \ne k$, то ее можно рассматривать как изображение функции e^{kt} для таких p.

38.2. Основные правила и формулы операционного исчисления

Свойство линейности. Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, а C_1, C_2 – произвольные постоянные, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \doteqdot C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \tag{38.6}$$

В частности, изображение суммы функций определяется формулой

$$f_1(t) + f_2(t) \doteqdot F_1(p) + F_2(p).$$

Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\left.\begin{aligned}
&f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),\\
&f''(t) \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),
\end{aligned}\right\} \tag{38.7}$$

где $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ есть $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$, $f(0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$.

Если $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)=0$ $(k=1, 2, ..., n\text{-}1)$, то эти формулы принимают вид

$$f'(t) \doteqdot pF(p),\quad f''(t) \doteqdot p^2F(p), \ldots, f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p). \tag{38.8}$$

Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p: если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{38.9}$$

Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$: если $F(p) \doteqdot f(t)$, то

$$F'(p) \doteqdot -tf(t); \tag{38.10}$$

в общем случае

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t). \tag{38.11}$$

Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^{+\infty} F(p)\,dp$ сходится, то он является изображением функции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(u)\,du. \tag{38.12}$$

С помощью формулы (38.12) можно вычислять некоторые несобственные интегралы. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ сходится, то

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} F(p)\,dp, \tag{38.13}$$

где интеграл в правой части вычисляется по положительной полуоси.

Предельные соотношения. Если $F(t) \doteqdot f(p)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0), \tag{38.14}$$

где $p \to \infty$ вдоль положительного направления вещественной оси.

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и существует $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty). \tag{38.15}$$

Пример 38.4. Найти изображения тригонометрических функций: 1) $\sin \alpha t$; 2) $\cos \alpha t$.

На основании формулы (38.5) получаем

$$e^{i\alpha} \doteqdot \frac{1}{p-i\alpha}, \quad e^{-i\alpha} \doteqdot \frac{1}{p+i\alpha}.$$

В соответствии с формулой (38.6) при $f_1(t)=e^{i\alpha}$, $f_2(t)=e^{-i\alpha}$, $C_1=1/2i$, $C_2=-1/2i$ находим:

$$\sin\alpha t=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}) \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\alpha}{p^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2};$$

при $C_1=1/2$ $C_2=1/2$ получим

$$\cos\alpha t=\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \cos\alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

Пример 38.5. Найти изображения гиперболических функций: 1) $\operatorname{sh}\alpha t$; 2) $\operatorname{ch}\alpha t$.

Принимая во внимание формулы (38.5) и (38.6), находим:

$$\operatorname{sh}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},$$

$$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, \quad \operatorname{ch}\alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Пример 38.6. Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$ с помощью дифференцирования оригинала.

Используем первую из формул (38.7): $f'(t) \doteqdot pF(p)-f(0)$. Поскольку $f(0)=0$, то формула принимает вид $f'(t) \doteqdot pF(p)$; $f'(t)=2\sin t\cos t=$ $=\sin 2t$, $\sin 2t \doteqdot pF(p)$. Как известно (см. пример 38.4), $\sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}$, поэтому $\frac{2}{p^2+4}=pF(p)$, откуда $F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$, $\sin^2 t \doteqdot \frac{2}{p(p^2+4)}$.

Пример 38.7. Найти изображение функции $\int_0^t e^{\tau}d\tau$.

В соответствии с формулой (38.5), при $k=1$, получим $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$. На основании формулы (38.9) найдем, что

$$\int_0^t e^{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1/(p-1)}{p}; \quad \int_0^t e^{\tau}d\tau \doteqdot \frac{1}{p(p-1)}.$$

Пример 38.8. Найти изображение функции $f(t)=t^n$, где n – натуральное число.

Из равенства $1 \doteqdot 1/p$ (см. замечание к примеру 38.2), пользуясь правилом интегрирования оригинала, находим:

$$\int_0^t 1\cdot d\tau = t \doteqdot \frac{1}{p^2}; \quad \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{1\cdot 2} \doteqdot \frac{1}{p^3}; \quad \int_0^t \frac{\tau^2}{1\cdot 2}d\tau = \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} \doteqdot \frac{1}{p^4};$$

$$\int_0^t \frac{\tau^{n-1}d\tau}{1\cdot 2\ldots(n-1)} = \frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n} \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}}, \quad t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Пример 38.9. Найти изображения функций: 1) $t\sin\alpha t$; 2) $t\cos\alpha t$.

Поскольку $\sin\alpha t \doteqdot \alpha/(p^2+\alpha^2)$, $\cos\alpha t \doteqdot p/(p^2+\alpha^2)$ (см. пример 38.4), то с помощью правила дифференцирования изображения (см формулу (38.10)) получим:

$$-t\sin\alpha t \doteqdot \frac{0\cdot(p^2+\alpha^2)-2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2} = -\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2},$$

$$-t\cos\alpha t \doteqdot \frac{1\cdot(p^2+\alpha^2)-2p\cdot p}{(p^2+\alpha^2)^2} = \frac{p^2+\alpha^2-2p^2}{(p^2+\alpha^2)^2} = -\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

Таким образом,

$$t\sin\alpha t \doteqdot \frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}, \quad t\cos\alpha t \doteqdot \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

Пример 38.10. Найти изображение функции $f(t)=t^n e^{\alpha t}$, где n – натуральное число.

Из формулы $e^{\alpha t} \doteqdot 1/(p-\alpha)$ (см. равенство (38.5)) n-кратным дифференцированием изображения (см. формулу (38.11)) получаем

$$(-t)^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{(-1)^n n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad t^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

Пример 38.11. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

На основании равенства $\sin t \doteqdot 1/(p^2+1)$ (см. пример 38.4) и правила интегрирования изображения (см. формулу (38.12)) находим

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \operatorname{arcctg} p.$$

(Для многозначных функций $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Ln} z$ и т. д. рассматривают ветви, для которых $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\ln 1 = 0$ и т. д).

Пример 38.12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Принимая во внимание равенство $\sin t \doteqdot 1/(p^2+1) = F(p)$, с помощью формулы (38.13) получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 38.13. Проверить, выполняются ли предельные соотношения для следующих функций: $\eta(t)$, $\sin t$, $e^{\alpha t}$, где α – вещественное число.

Равенство (38.14) выполняется для всех этих функций. Действительно, поскольку $\eta(t) \doteqdot 1/p$, $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, $e^{\alpha t} \doteqdot 1/(p-\alpha)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} p\dfrac{1}{p} = 1 = \eta(0)$,

$\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{p^2+1} = 0 = \sin 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{p-\alpha} = 1 = e^0$.

Равенство (38.15) для функции $\sin t$ не выполняется, так как $\lim\limits_{t\to\infty} \sin t$ не существует; для функции $e^{\alpha t}$ при $\alpha > 0$ оно также не выполняется по той же причине. Для функций $\eta(t)$ и $e^{\alpha t}$ при $\alpha < 0$ это равенство будет справедливым;

$\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p} = \lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = 1$, $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p}{p-\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$.

38.3. Основные теоремы операционного исчисления

Теорема 38.3. (Теорема подобия). *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$ *и* $\lambda > 0$, *то умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число:*

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{38.16}$$

Теорема 38.4. (Теорема смещения). *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$ *и* α – *произвольное комплексное число, то изменение (смещение) аргумента изображения на величину* α *приводит к умножению оригинала на величину* $e^{\alpha t}$:

$$F(p-\alpha) \doteqdot e^{\alpha t} f(t). \tag{38.17}$$

Теорема 38.5. (Теорема запаздывания). *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$ *и* $\Theta > 0$, *то запаздывание аргумента оригинала на положительное число* Θ *приводит к умножению изображения на величину* $e^{-p\Theta}$:

$$f(t-\Theta) \doteqdot e^{-p\Theta} F(p). \tag{38.18}$$

Теорема 38.6. (Теорема умножения). *Если* $F_1(p) \doteqdot f_1(t)$, $F_2(p) \doteqdot f_2(t)$, *то*

$$F_1(p) F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{38.19}$$

Замечание. Интеграл в правой части этой формулы называется складкой, или сверткой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, а операция получения складки называется свертыванием функций. В связи с этим теорему умножения можно сформулировать так: умножение изображений приводит к свертыванию их оригиналов. Эту теорему называют также теоремой свертывания и теоремой Бореля.

Свертка функций обладает переместительным свойством:

$$F_1(p) F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau)\, d\tau.$$

Поскольку функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$ равна нулю при $t = 0$, то, пользуясь правилом дифференцирования оригинала, получаем следующую запись теоремы умножения:

$$pF_1(p) F_2(p) \doteqdot \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{38.20}$$

Интеграл в правой части этой формулы называется интегралом Дюамеля. Если выполнить дифференцирование в интеграле Дюамеля, то теорема умножения примет вид

$$pF_1(p)F_2(p) \doteqdot f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau,$$

или, учитывая равноправность функций $F_1(p)$ и $F_2(p)$,

$$pF_1(p)F_2(p) \doteqdot f_2(t)f_1(0)+\int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

Примененное здесь правило дифференцирования интеграла по переменной, входящей в качестве параметра в подынтегральную функцию и в верхний предел интегрирования, определяется формулой

$$\left(\int_a^t f(x,t)\,dx\right)' = f(t,t)+\int_a^t f_t'(x,t)\,dx. \tag{38.21}$$

Последние две записи теоремы умножения можно видоизменить, если учесть, что

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_2'(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau$$

и

$$\int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Теорема 38.7. *Если $f(t)$ — оригинал с периодом $\omega>0$, то его изображение выражается формулой*

$$F(p)=\frac{\varphi(p)}{1-e^{-\omega p}}, \tag{38.22}$$

где

$$\varphi(p)=\int_0^{\omega} e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{38.23}$$

Эту теорему называют теоремой об изображении периодического оригинала.

Теорема 38.8. *Если $F(p)$ — аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю и если лорановское разложение $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид*

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{p^k}, \tag{38.24}$$

то оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}, \tag{38.25}$$

причем этот ряд сходится при всех t.

Эту теорему называют первой теоремой разложения.

Пример 38.14. Найти изображение $\sin\beta t$, зная изображение $\sin t$.

Поскольку $\sin t \doteqdot 1/(p^2+1)$, то в соответствии с теоремой подобия (см. (38.16)) получаем

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{1}{(p/\beta)^2+1}=\frac{1}{\beta}\frac{\beta^2}{p^2+\beta^2};\ \sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2}.$$

Пример 38.15. Найти изображение функций: 1) $e^{\alpha t}\sin\beta t$; 2) $e^{\alpha t}\cos\beta t$.

Пользуясь формулами

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2},\ \cos\beta t \doteqdot \frac{p}{p^2+\beta^2},$$

с помощью теоремы смещения находим

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\ e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Пример 38.16. Найти изображение функции $\sin(t-1)\eta(t-1)$, где $\eta(t)$ – функция Хевисайда (см. 38.1).

Вид функции показывает, что здесь имеется запаздывание аргумента на величину $\Theta=1$. С помощью теоремы запаздывания и формулы $\sin t \to 1/(p^2+1)$ получаем

$$\sin(t-1)\eta(t-1) \doteqdot \frac{e^{-p}}{p^2+1}.$$

Замечание. Если бы запаздывания аргумента не было, т.е. рассматривалась функция $\sin(t-1)\eta(t)$ (такую функцию условились обозначать просто $\sin(t-1)$), то изображение имело бы совсем другой вид, а именно:

$$\sin(t-1)=\sin t\cos 1-\cos t\sin 1 \doteqdot \frac{\cos 1}{p^2+1}-\frac{p\sin 1}{p^2+1}.$$

Пример 38.17. Найти изображение функции $f(t)=|\sin t|$.

Поскольку $|\sin t|$ – периодическая функция с периодом $\omega=\pi$, то изображение $F(p)=\varphi(p)/(1-e^{\pi p})$ (см. формулу (38.22)), где

$$\varphi(p)=\int_0^{\pi}e^{-pt}|\sin t|\,dt=\int_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt.$$

Дважды проинтегрировав по частям, получим

$$\varphi(p)=-e^{-pt}\left.\frac{\cos t+p\sin t}{p^2+1}\right|_0^{\pi}=\frac{e^{-\pi p}+1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{e^{-\pi p}+1}{1-e^{-\pi p}}=\frac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2}.$$

Пример 38.18. Найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом $\omega=2\pi$, который равен $\sin t$ при $0<t<\pi$ и нулю при $\pi<t<2\pi$.

Оригинал для $t>0$ можно записать так: $f(t)=\sin t\cdot\eta(\sin t)$. Искомое изображение имеет вид $F(p)=\varphi(p)/(1-e^{2\pi p})$, где

$$\varphi(p)=\int_0^{2\pi}e^{-pt}\sin t\,\eta(\sin t)\,dt=\int_0^{\pi}e^{-pt}\sin t dt=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$$

(см. пример 38.17). Итак,

$$F(p)=\frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

Пример 38.19. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=$ $=\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$.

Изображению придадим другой вид: $\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}=p\dfrac{1}{p^4}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$ и будем считать, что $F_1(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t=f_1(t)$, $F_2(p)=\dfrac{1}{p^4}\risingdotseq\dfrac{t^3}{6}=f_2(t)$; здесь использовано равенство $t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ при $n=3$ (см. пример 38.8). С помощью теоремы умножения (см. формулу (38.20)) получаем

$$p\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau.$$

В соответствии с формулой (38.21) находим производную

$$\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau=\frac{1}{6}\left\{[(t-\tau)^3\sin\tau]_{\tau=t}+3\int_0^t(t-\tau)^2\sin\tau d\tau\right\}\to$$

$$\to\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)^2\sin\tau d\tau.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\left[(t-\tau)^2(-\cos\tau) - 2(t-\tau)\sin\tau + 2\cos\tau\right]\Big|_0^t = t^2/2 + \cos t - 1.$$

Следовательно, $f(t) = t^2/2 + \cos t - 1$.

Пример 38.20. Найти оригинал $f(t)$ для изображения $F(p) = \ln(1+1/p)$.

Использовав разложение функции $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора (см. п. 37.6)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots \quad (|z|<1),$$

получим

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{np^n} + \cdots \quad (|p|>1).$$

В соответствии с теоремой (38.8) находим оригинал

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\frac{t}{1!} + \frac{1}{3}\frac{t^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{t}\left[t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!} + \cdots\right] = \frac{1}{t}\left\{1 - \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!} + \cdots\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{t}(1 - e^{-t}).$$

38.4. Решение дифференциальных уравнений и их систем

Методы операционного исчисления применяются при интегрировании дифференциальных уравнений и их систем. С помощью этих методов интегрирование некоторых классов линейных дифференциальных уравнений сводится к решению алгебраических уравнений; из алгебраического уравнения находят изображение решения данного уравнения, после чего по изображению восстанавливают само решение.

Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t), \tag{38.26}$$

удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{38.27}$$

Предположим, что искомая функция $y = y(t)$, ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ и данная функция $f(t)$ являются оригиналами. Обозначим изображения функций

$y(t)$ и $f(t)$, соответственно, через $Y(p)$ и $F(p)$ или короче Y и F. Пользуясь ими и правилом дифференцирования оригинала (см. формулы (38.8)), находим

$$y \to Y, y' \to pY, y'' \to p^2Y, \ldots, y^{(n-1)} \to p^{n-1}Y, y^{(n)} \to p^nY. \qquad (38.28)$$

Поскольку $f(t) \doteqdot F(p)$, то на основании свойства линейности (см. формулу (38.6)) получим уравнение в изображениях

$$p^nY + a_1p^{n-1}Y + \cdots + a_nY = F(p), \qquad (38.29)$$

которое соответствует данному дифференциальному уравнению. Из уравнения (38.29) найдем изображение Y искомого решения

$$Y = \frac{F(p)}{p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n}. \qquad (38.30)$$

Найдя изображение $F(p)$ функции $f(t)$, получим изображение Y и вопрос будет сведен к отысканию соответствующего оригинала, который является решением данного дифференциального уравнения и удовлетворяет нулевым начальным данным.

Таким образом, чтобы решить уравнение (38.26), необходимо знать, как по оригиналу найти изображение и по данному изображению – оригинал.

При интегрировании дифференциальных уравнений находит применение интеграл Дюамеля (см. формулу (38.20)). Пусть необходимо найти решение дифференциального уравнения (38.26), удовлетворяющее условиям (38.27). Запишем дифференциальное уравнение с такой же левой частью и правой частью, равной единице:

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}z' + a_nz = 1. \qquad (38.31)$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным нулевым данным:

$$z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (38.32)$$

Обозначим изображение решения $z(t)$ через Z, получим уравнение в изображениях

$$p^nZ + a_1p^{n-1}Z + \cdots + a_{n-1}pZ + a_nZ = \frac{1}{p}, \qquad (38.33)$$

откуда

$$Z = \frac{1}{p(p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n)}. \qquad (38.34)$$

Из этого равенства и равенства (38.30) находим, что

$$Y = pF(p)Z(p). \qquad (38.35)$$

Пользуясь интегралом Дюамеля, получаем

$$y = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)z(t-\tau)\,d\tau,$$

или

$$y=\frac{d}{dt}\int_0^t z(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (38.36)$$

Таким образом, когда известно решение уравнения (38.26) при $f(t)=1$, удовлетворяющее нулевым начальным данным, то можно сразу найти в квадратурах решение этого уравнения для любой функции $f(t)$ при тех же начальных данных.

Замечание 1. Если начальные данные не являются нулевыми, то изображения производных находятся с помощью формул (38.7). Например, если $y(0)\neq 0$, то $y'\to pY-y(0)$ и т. д.

Замечание 2. Если за начальный момент взято значение $t_0\neq 0$, а не $t=0$, то вводят новую переменную τ по формуле $\tau=t-t_0$, $t=\tau+t_0$, тогда $\tau=0$ при $t=t_0$.

С помощью операционного исчисления можно найти решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а в некоторых случаях – решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 38.21. Найти решение уравнения $y''-y'=1$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Обозначим через Y изображение функции $y(t)$: $y\doteqdot Y$, тогда $y'\doteqdot pY$, $y''\doteqdot p^2Y$. Поскольку $1\doteqdot 1/p$, то уравнение в изображениях имеет вид $p^2Y-pY=1/p$, откуда

$$Y=\frac{1}{p(p^2-p)}=\frac{1-p^2+p^2}{p^2(p-1)}=\frac{-1-p}{p^2}+\frac{1}{p-1};\quad Y=-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}.$$

Принимая во внимание формулы $\frac{1}{p^2}\doteqdot t$, $\frac{1}{p}\doteqdot 1$, $\frac{1}{p-1}\doteqdot e^t$, получаем искомое решение $y=e^t-t-1$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет данному уравнению и нулевым начальным данным.

Пример 38.22. Найти решение уравнения $y''+y=2\cos t$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Изображение функции y обозначим через Y, а изображения производных найдем с помощью формул (38.7):

$$y\doteqdot Y,\ y'\doteqdot pY-y(0)=pY,\ y''\doteqdot p^2Y-pY(0)-Y'(0)=p^2Y+1.$$

Поскольку $\cos t \doteqdot p/(p^2+1)$, то уравнение в изображениях принимает вид $p^2Y+1+Y=2p/(p^2+1)$, откуда

$$Y=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Так как (см. примеры 38.4 и 38.9)

$$\frac{1}{p^2+1}\doteqdot \sin t,\quad \frac{2p}{(p^2+1)^2}\doteqdot t\sin t,$$

то $y=t\sin t-\sin t$. Получено решение $y=(t-1)\sin t$.

Пример 38.23. Проинтегрировать уравнение $y''+4y=8\sin 2t$ при начальных условиях: $y(0)=C_1$, $y'(0)=C_2$.

Обозначим через Y изображение решения $y(t)$, а изображения производных найдем с помощью формул (38.7): $y\doteqdot Y$, $y''\doteqdot pY-C_1$, $y''\doteqdot p^2Y-C_1p-C_2$.

Поскольку $\sin 2t\doteqdot 2/(p^2+4)$ (см. пример 38.4), то операторное уравнение принимает вид

$$p^2Y-C_1p-C_2+4Y=\frac{16}{p^2+4},\ \text{или}\ (p^2+4)Y=\frac{16}{p^2+4}+C_1p+C_2,$$

откуда

$$Y=\frac{16}{(p^2+4)^2}+C_1\frac{p}{p^2+4}+C_2\frac{1}{p^2+4}.$$

Для двух последних слагаемых имеем:

$$\frac{p}{p^2+4}\doteqdot\cos 2t,\quad \frac{1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}\sin 2t.$$

Что касается оригинала для первого слагаемого, то его найдем с помощью формулы $4p/(p^2+4)^2\to t\sin 2t$ (см. пример 38.9) и правила интегрирования оригинала (см. формулу (38.9)) следующим образом:

$$\frac{16}{(p^2+4)^2}=4\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{4p}{(p^2+4)^2}\to 4\int_0^t \tau\sin 2\tau d\tau=$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}\tau\cos 2\tau+\frac{1}{4}\sin 2\tau\right]\Bigg|_0^t=\sin 2t-2t\cos 2t.$$

Значит, искомое решение имеет вид

$$y = C_1 \cos 2t + \frac{C_2}{2} \sin 2t + \sin 2t - 2t \cos 2t,$$

или

$$y = C_1 \cos 2t + C \sin 2t - 2t \cos 2t \quad (C = C_2/2 + 1).$$

Пример 38.24. Проинтегрировать уравнение $y'' + y' = t$ при начальных данных $y(0) = y'(0) = 0$.

Найдем сначала решение уравнения $z'' + z' = 1$ при нулевых начальных данных. Уравнение в изображениях имеет вид $p^2 Z + pZ = \frac{1}{p}$, откуда

$$Z = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{p^2 + (1 - p^2)}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad z(t) = e^{-t} + t - 1.$$

На основании формулы (38.36) получаем

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t (e^{-\tau} + \tau - 1)(t - \tau)d\tau = [(e^{-\tau} + \tau - 1)(t - \tau)]_{\tau=t} +$$

$$+ \int_0^t (e^{-\tau}\tau - 1)\, d\tau = \left(-e^{-\tau} + \frac{\tau^2}{2} - \tau\right)\Bigg|_0^t; \quad y(t) = \frac{t^2}{2} - t - e^{-t} + 1.$$

Пример 38.25. Найти решение уравнения $y'' - y' - 6y = 2e^{4t}$, удовлетворяющее условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Операторное уравнение в заданном случае принимает вид

$$p^2 F(p) - pF(p) - 6F(p) = \frac{2}{p-4},$$

откуда

$$F(p) = \frac{2}{(p-4)(p^2 - p - 6)} = \frac{2}{(p-4)(p-3)(p+2)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби, находим

$$F(p) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-4}.$$

Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$y = \frac{1}{15} e^{-2t} - \frac{2}{5} e^{3t} + \frac{1}{3} e^{4t}.$$

Пример 38.26. Найти решение задачи Коши: $y'' - 3y' + 2y = te^{3t}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

В отличие от предыдущих примеров, здесь за начальный момент взято значение $t=1$, а не $t=0$. Введем новую переменную $\tau=t-1$, откуда $t=\tau+1$. Обозначим $y(t)=y(\tau+1)=\tilde{y}(\tau)$, тогда уравнение и начальные данные принимают вид: $\tilde{y}''-3\tilde{y}'+2\tilde{y}=(\tau+1)e^3e^{3\tau}$; $\tilde{y}(0)=\tilde{y}'(0)=1$. Найдем решение этого уравнения:

$$\tilde{y}\doteqdot Y,\ \tilde{y}'\doteqdot pY-1,\ \tilde{y}''\doteqdot p^2Y-p-1,\ (\tau+1)e^{3\tau}=\tau e^{3\tau}+e^{3\tau}\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{1}{p-3}=\frac{p-2}{(p-3)^2};\ (p^2-3p+2)Y=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}+p-2;$$

$$(p-1)(p-2)Y=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}+(p-2);\ (p-1)Y=e^3\frac{1}{(p-3)^2}+1;$$

$$Y=e^3\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}+\frac{1}{p-1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p-1}\to e^{\tau},\ \frac{1}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-3}+\frac{2}{(p-3)^2}\right]\to\frac{1}{4}(e^{\tau}-e^{3\tau}+2\tau e^{3\tau}),$$

то

$$\tilde{y}=\frac{1}{4}e^3(e^{\tau}-e^{3\tau}+2\tau e^{3\tau})+e^{\tau};\ \tilde{y}=\left(\frac{e^3}{4}+1\right)e^{\tau}+\frac{2\tau-1}{4}e^{3(\tau+1)}.$$

Возвращаясь к переменной t $(\tau=t-1)$, получаем решение исходной задачи Коши

$$y=\frac{e^3+4}{4e}e^t+\frac{2t-3}{4}e^{3t}.$$

Пример 38.27. Найти решение уравнения $y''+y'=t$, удовлетворяющее условиям $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Положим $t=\tau+1$, $y(t)=y(\tau+1)=\tilde{y}(\tau)$, тогда уравнение и начальные условия примут вид $\tilde{y}''+\tilde{y}'=\tau+1$, $\tilde{y}(0)=1$, $\tilde{y}'(0)=0$. Составим операторное уравнение для этого дифференциального уравнения. Пусть $\tilde{y}(\tau)\doteqdot Y(p)$, тогда $\tilde{y}'(\tau)\doteqdot pY(p)-1$, $y''(\tau)\doteqdot p^2Y(p)-p$, операторное уравнение и его решение запишутся так:

$$p^2Y(p)-p+pY(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p},\ Y(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получаем $\tilde{y}(\tau)=1+\tau^2/2$. Возвращаясь к переменной t (заменив τ на $t-1$), найдем искомое решение исходной задачи Коши $y(t)=1+(t-1)^2/2$.

Пример 38.28. Найдем решение системы дифференциальных уравнений

$$y'+3y+z=0,\ z'-y+z=0$$

при начальных условиях $y(0)=1,\ z(0)=1.$

При обозначениях $Y\to y,\ Z\to z$ система в изображениях принимает вид

$$pY-1+3Y+Z=0,\ pZ-1-Y+Z=0,$$

или

$$(p+3)Y+Z=1,$$
$$-Y+(p+1)Z=1.$$

Решение системы получим с помощью формул Крамера $Y=\Delta_y/\Delta,\ Z=\Delta_z/\Delta,$ где Δ – определитель системы, $\Delta_y,\ \Delta_z$ – определители, полученные из определителей системы заменой коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами. Поскольку

$$\Delta=(p+3)(p+1)+1=p^2+4p+4=(p+2)^2,$$
$$\Delta_y=p+1-1=p,\ \Delta_z=p+3+1=p+4,$$
$$Y=\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)-2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}-\frac{2}{(p+2)^2},$$
$$Z=\frac{p+4}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)+2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2},$$
$$\frac{1}{p+2}\doteq e^{-2t},\ \frac{1}{(p+2)^2}\doteq te^{-2t},$$

то

$$y=e^{-2t}(1-2t),\ z=e^{-2t}(1+2t).$$

Пример 38.29. Найти решение системы

$$y'-2y-4z=\cos t,\ z'+y+2z=\sin t$$

при начальных условиях $y(0)=z(0)=0.$

Система в изображениях принимает вид

$$(p-2)Y-4Z=\frac{p}{p^2+1},\ Y+(p+2)Z=\frac{p}{p^2+1}.$$

Изображения Y и Z определяем с помощью формул Крамера. Поскольку $\Delta=(p-2)(p+2)+4=p^2,$

$$\Delta_y=\frac{(p+2)p}{p^2+1}+\frac{4}{p^2+1}=\frac{p^2+2p+4}{p^2+1},\ \Delta_z=\frac{p-2}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}=-\frac{2}{p^2+1},$$

$$Y=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{4p^2+4+2p-3p^2}{p^2(p^2+1)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2p(p^2+1-p^2)}{p^2(p^2+1)}-\frac{3}{p^2+1},$$

$$Y=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+1};$$

$$Z=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}=-2\frac{(1+p^2)-p^2}{p^2(p^2+1)},\ Z=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p}\doteq 1,\ \frac{1}{p^2}\doteq t,\ \frac{1}{p^2+1}\doteq \sin t,\ \frac{p}{p^2+1}\doteq \cos t,$$

то

$$y=4t+2-2\cos t-3\cos t,\ z=-2t+2\sin t.$$

Пример 38.30. Найти решение системы

$$x'=x+y+z,\ y'=x-y+z,\ z'=x+y-z$$

при начальных данных $x(0)=0,\ y(0)=1,\ z(0)=0.$

В изображениях система принимает вид

$$pX=X+Y+Z, \qquad (1-p)X+Y+Z=0,$$

$$pY-1=X-Y+Z, \quad \text{или} \quad X-(1+p)Y+Z=-1,$$

$$pZ=X+Y-Z, \qquad X+Y-(1+p)Z=0.$$

Изображения X, Y, Z находим с помощью формул Крамера. Поскольку $\Delta=(p+1)(p+2)(2-p),\ \Delta_x=-(p+2),\ \Delta_y=2-p^2,\ \Delta_z=-p,$ то

$$X=\frac{-(p+2)}{(p+1)(p+2)(2-p)}=\frac{1}{(p+1)(p-2)},\ Y=\frac{2-p^2}{(p+1)(p+2)(2-p)}=$$

$$=\frac{p^2-2}{(p+1)(p+2)(p-2)},\ Z=\frac{-p}{(p+1)(p+2)(2-p)}=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p-2)}.$$

Разлагая полученные дроби на элементарные, найдем, что

$$X=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1},\ Y=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2},$$

$$Z=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}.$$

Принимая во внимание равенство $e^{\alpha t}\to\frac{1}{p-\alpha}$, получаем искомое решение системы

$$x=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t},\ y=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t},\ z=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}.$$