Глава I

Введение в математический анализ

§ 1.1. Действительные числа. Абсолютная величина действительного числа

Действительным числом называется любая десятичная дробь, конечная или бесконечная.

Периодические десятичные дроби называются *рациональными* числами. Всякое рациональное число можно записать в виде отношения p/q целых чисел p и q, и обратно.

Непериодические десятичные дроби называются *иррациональными* числами.

Если X — некоторое множество действительных чисел, то запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит X, а запись $x \notin X$ означает, что число x не принадлежит X.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где a, b — фиксированные числа, называется *интервалом* (a, b). Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* $[a, b]$. Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называется *полуинтервалом* $[a, b)$ или $(a, b]$. Интервал, отрезок, полуинтервал объединяются общим названием *промежуток*.

Каждое действительное число изображается определенной точкой координатной оси, называемой *собственной точкой*. Иногда удобно считать, что имеются еще две *несобственные точки*, $+\infty$ и $-\infty$, бесконечно удаленные от начала координат в положительном и отрицательном направлениях. Для всякого действительного числа x по опрецелению считают, что $-\infty < x < +\infty$.

Интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* числа a.

Множество действительных чисел $x > M$ называется *M-окрестностью* несобственной точки $+\infty$.

Множество действительных чисел $x < M$ называется *M-окрестностью* несобственной точки $-\infty$.

Абсолютной величиной числа x называется число $|x|$, определяемое условиями:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Свойства абсолютных величин:

1) неравенство $|x| \leqslant \alpha$ означает, что $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$;
2) неравенство $|x| \geqslant \alpha$ означает, что $x \geqslant \alpha$ или $x \leqslant -\alpha$;
3) $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$;
4) $|x \pm y| \geqslant ||x| - |y||$;
5) $|xy| = |x|\,|y|$;
6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

1.1.1. Доказать, что число

$$0{,}1010010001\ldots1\underbrace{000\ldots0}_{n}1\ldots$$

иррационально.

Решение. Для доказательства нужно установить, что данная десятичная дробь не является периодической. Действительно, между n-й единицей и $(n+1)$-й стоит n нулей, чего не может быть в периодической дроби.

1.1.2. Доказать, что всякое число, в котором нули стоят на всех местах с номером 10^n после запятой и только на этих местах, является иррациональным.

1.1.3. Доказать, что сумма или разность рационального числа α и иррационального числа β есть число иррациональное.

Решение. Рассмотрим случай суммы чисел α и β. Предположим, что $\alpha+\beta=\gamma$ есть число рациональное. Тогда $\beta=\gamma-\alpha$ есть число рациональное, как разность двух рациональных чисел, что противоречит условию. Значит, сделанное предположение неверно и число $\alpha+\beta$ — иррационально.

1.1.4. Доказать, что произведение $\alpha\beta$ и частное α/β рационального числа $\alpha\neq0$ и иррационального числа β есть число иррациональное.

1.1.5. а) Найти все рациональные значения x, при которых $y=\sqrt{x^2+x+3}$ есть рациональное число.

Решение. а) Предположим, что x и $y=\sqrt{x^2+x+3}$ — рациональные числа. Тогда их разность $y-x=q$ есть так же рациональное число. Выразим x через q

$$y-x=\sqrt{x^2+x+3}-x=q,$$
$$\sqrt{x^2+x+3}=q+x,$$
$$x^2+x+3=q^2+2qx+x^2,$$
$$x=\frac{q^2-3}{1-2q}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $q\neq{}^1/_2$.

Докажем теперь обратное, а именно: число $y=\sqrt{x^2+x+3}$ является рациональным числом, если $x=\frac{q^2-3}{1-2q}$, где q — любое рациональное число, не равное ${}^1/_2$.

Действительно,

$$y=\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{\frac{(q^2-3)^2}{(1-2q)^2}+\frac{q^2-3}{1-2q}+3}=$$
$$=\sqrt{\frac{q^4-2q^3+7q^2-6q+9}{(1-2q)^2}}=\sqrt{\frac{(q^2-q+3)^2}{(1-2q)^2}}=\frac{q^2-q+3}{|1-2q|}\qquad(q\neq{}^1/_2).$$

Последнее выражение рационально при любом рациональном q.

б) Доказать, что $\sqrt{2}$ есть иррациональное число.

1.1.6. Доказать, что число $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ иррационально.

Решение. Предположим противное, т. е. допустим, что число $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ рационально. Тогда число

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

также является рациональным, как частное двух рациональных чисел. Поэтому число

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$

является рациональным, что противоречит иррациональности числа $\sqrt{2}$ (задача **1.1.5**). Следовательно, наше предположение неверно, и число $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ иррационально.

1.1.7. Доказать, что каково бы ни было положительное рациональное число r, удовлетворяющее условию $r^2<2$, всегда найдется бóльшее рациональное число $r+h$ $(h>0)$, для которого $(r+h)^2<2$.

Решение. Можно считать $h<1$. Тогда $h^2<h$ и $(r+h)^2<$ $<r^2+2rh+h$. Поэтому достаточно положить $r^2+2rh+h=2$, т. е. $h=(2-r^2)/(2r+1)$.

1.1.8. Доказать, что каково бы ни было положительное рациональное число s, удовлетворяющее условию $s^2>2$, всегда найдется меньшее рациональное число $s-k$ $(k>0)$, для которого $(s-k)^2>2$.

1.1.9. Решить неравенства:

а) $|2x-3|<1$; б) $(x-2)^2\geqslant 4$;

в) $x^2+2x-8\leqslant 0$; г) $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$.

Решение. а) Неравенство $|2x-3|<1$ равносильно неравенствам

$$-1<2x-3<1,$$

откуда

$$2<2x<4 \quad \text{и} \quad 1<x<2.$$

г) Данное неравенство справедливо для тех значений x, при которых $x^2-7x+12<0$, откуда $3<x<4$.

1.1.10. Имеют ли решения следующие уравнения:

а) $|x|=x+5$; б) $|x|=x-5$?

Решение. а) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x+5$. Следовательно, решений нет. При $x<0$ имеем $-x=x+5$, откуда $x=-5/2$. Это значение удовлетворяет исходному уравнению.

б) При $x\geqslant 0$ имеем $x=x-5$. Следовательно, решений нет. При $x<0$ имеем $-x=x-5$, откуда $x=5/2$, что противоречит нашему предположению $(x<0)$. Таким образом, уравнение не имеет решений.

1.1.11. Определить, для каких значений x будут справедливы равенства

а) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{x-1}{x+1}$; б) $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$.

1.1.12. Определить, для каких значений x имеют место равенства

а) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$;

б) $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$.

Решение. а) Равенство $|a+b|=|a|+|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда оба слагаемых одного знака. Так как

$$x^2+4x+9=(x+2)^2+5>0$$

при любых значениях x, то равенство имеет место для значений x, при которых $2x-3\geqslant 0$, т. е. для $x\geqslant 3/2$.

б) Равенство $|a-b|=|a|-|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда a и b одного знака и $|a|\geqslant|b|$.

В нашем случае равенство будет выполнено для тех значений x, для которых

$$x^4-4\geqslant x^2+2.$$

Отсюда

$$x^2-2\geqslant 1; \qquad |x|\geqslant\sqrt{3}.$$

1.1.13. Решить неравенства:

а) $|3x-5|-|2x+3|>0$; б) $|x^2-5x|>|x^2|-|5x|$.

1.1.14. Найти корни уравнений

а) $|\sin x|=\sin x+1$; б) $x^2-2|x|-3=0$.

Решение. а) Это уравнение может быть удовлетворено только при тех значениях x, для которых $\sin x<0$, поэтому мы можем переписать его так:

$$-\sin x=\sin x+1, \quad \text{или} \quad \sin x=-1/2;$$

отсюда $x=\pi k-(-1)^k\pi/6$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

б) Можно решить это уравнение стандартным способом, рассмотрев случаи $x\geqslant 0$ и $x\leqslant 0$, но проще, пожалуй, решать так: запишем уравнение в виде

$$|x|^2-2|x|-3=0.$$

Заменяя $|x|$ на y, получим

$$y^2-2y-3=0,$$

откуда $y_1=3$, $y_2=-1$. Так как $y=|x|\geqslant 0$, то $y_2=-1$ не подходит. Остается

$$y=|x|=3,$$

т. е. $x_1=-3$, $x_2=3$.