§ 1.2. Понятие функции. Область определения

Независимая переменная x определяется заданием множества X своих значений.

Переменная y называется *функцией* независимой переменной x с *областью определения* X, если каждому значению $x \in X$ однозначно соответствует значение y. Символическая запись: $y=y(x)$ или $y=f(x)$ или $y=\varphi(x)$ и т. д. Множество значений функции $y(x)$ называется *областью изменения* данной функции.

В частности, функции, определенные на множестве натуральных чисел 1, 2, 3, ..., называются *числовыми последовательностями*. Они записываются следующим образом: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_n\}$.

1.2.1. Дана функция $f(x)=(x+1)/(x-1)$. Найти $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $[f(x)]^2$.

Решение.

$$f(2x)=\frac{2x+1}{2x-1}; \qquad 2f(x)=2\,\frac{x+1}{x-1};$$

$$f(x^2)=\frac{x^2+1}{x^2-1}; \qquad [f(x)]^2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

1.2.2. а) Дана функция

$$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}.$$

Показать, что при $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ имеет место тождество

$$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

Решение. При $x \in (-1, 1)$ имеем $(1-x)/(1+x)>0$ и поэтому

$$f(x_1)+f(x_2)=\lg\frac{1-x_1}{1+x_1}+\lg\frac{1-x_2}{1+x_2}=\lg\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)=\lg\frac{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}=\lg\frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}=$$

$$=\lg\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

что совпадает с правой частью выражения (1).

б) Дана функция $f(x)=(a^x+a^{-x})/2$ $(a>0)$. Показать, что

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1.2.3. Дана функция $f(x)=(x+1)/(x^3-1)$. Найти $f(-1)$; $f(a+1)$; $f(a)+1$.

1.2.4. Дана функция $f(x)=x^3-1$. Найти

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (b \neq a) \quad \text{и} \quad f\left(\frac{a+h}{2}\right).$$

1.2.5. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}-1, & -1\leqslant x<0, \\ \operatorname{tg}(x/2), & 0\leqslant x<\pi, \\ x/(x^2-2), & \pi\leqslant x\leqslant 6. \end{cases}$$

Найти $f(-1)$, $f(\pi/2)$, $f(2\pi/3)$, $f(4)$, $f(6)$.

Решение. Точка $x=-1$ лежит в промежутке $[-1, 0)$. Поэтому

$$f(-1)=3^{-(-1)}-1=2.$$

Точки $x=\pi/2$, $x=2\pi/3$ лежат в промежутке $[0, \pi)$. Поэтому

$$f(\pi/2)=\operatorname{tg}(\pi/4)=1; \qquad f(2\pi/3)=\operatorname{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}.$$

Точки $x=4$, $x=6$ лежат в промежутке $[\pi, 6]$. Поэтому

$$f(4)=\frac{4}{16-2}=\frac{2}{7}; \qquad f(6)=\frac{6}{36-2}=\frac{3}{17}.$$

1.2.6. Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси следующим законом:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+1, & \text{если} \quad x\leqslant 2, \\ 1/(x-2), & \text{если} \quad 2<x\leqslant 3, \\ 2x-5, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$$

Найти: $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{8})$, $f(\sqrt{\log_2 1024})$.

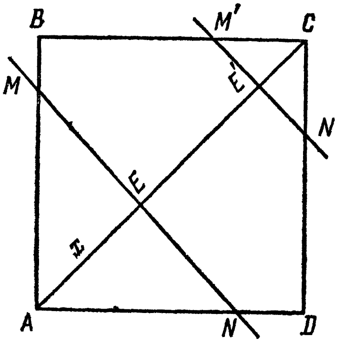

Рис. 1.

1.2.7. В квадрате $ABCD$ со стороной $AB=2$ проведена прямая $MN\perp AC$. Принимая за x расстояние от вершины A до прямой MN, выразить через x площадь S фигуры AMN, отсекаемой от квадрата прямой MN. Найти эту площадь при $x=\sqrt{2}/2$ и при $x=2$ (рис. 1).

Решение. Заметим, что $AC=2\sqrt{2}$; поэтому $0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$. Если $x\leqslant\sqrt{2}$, то

$$S(x)=S_{\triangle AMN}=x^2.$$

Если $x>\sqrt{2}$, то

$$S(x)=4-(2\sqrt{2}-x)^2=-x^2+4x\sqrt{2}-4.$$

Таким образом,

$$S(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}, \\ -x^2+4x\sqrt{2}-4, & \sqrt{2}<x\leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Так как $\sqrt{2}/2<\sqrt{2}$, то $S(\sqrt{2}/2)=(\sqrt{2}/2)^2=1/2$. Так как $2>\sqrt{2}$, то

$$S(2)=-4+8\sqrt{2}-4=8(\sqrt{2}-1).$$

1.2.8. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n число α_n, равное n-му десятичному знаку в разложении $\sqrt{2}$ в десятичную дробь. Это задает некоторую функцию $\alpha_n = \varphi(n)$. Вычислить $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$.

Решение. Извлекая квадратный корень, находим $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ Таким образом,

$$\varphi(1) = 4; \quad \varphi(2) = 1; \quad \varphi(3) = 4; \quad \varphi(4) = 2.$$

1.2.9. Вычислить $f(x) = 49/x^2 + x^2$ в точках, для которых $7/x + x = 3$.

Решение. $f(x) = 49/x^2 + x^2 = (7/x + x)^2 - 14$, но $7/x + x = 3$, поэтому $f(x) = 9 - 14 = -5$.

1.2.10. Найти функцию вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(0) = 5$; $f(-1) = 10$; $f(1) = 6$.

Решение.

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, \\ f(-1) &= 10 = a - b + c, \\ f(1) &= 6 = a + b + c. \end{aligned}$$

Из полученной системы определяем коэффициенты a, b, c. Имеем $a = 3$; $b = -2$; $c = 5$; следовательно, $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

1.2.11. Найти функцию вида

$$f(x) = a + bc^x \qquad (c > 0),$$

если $f(0) = 15$; $f(2) = 30$; $f(4) = 90$.

1.2.12. Найти $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если

$$\varphi(x) = x^2 \quad \text{и} \quad \psi(x) = 2^x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \varphi[\psi(x)] &= [\psi(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}, \\ \psi[\varphi(x)] &= 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}. \end{aligned}$$

1.2.13. Дана функция

$$f(x) = \frac{5x^2 + 1}{2 - x}.$$

Найти $f(3x)$; $f(x^3)$; $3f(x)$; $[f(x)]^3$.

1.2.14. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{при} \quad -1 < x < 0, \\ 4 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 3x - 1 & \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Найти $f(2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(-0{,}5)$, $f(3)$.

1.2.15. Доказать, что если для показательной функции $y = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = a^{x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют геометрическую прогрессию.

1.2.16. $f(x)=x^2+6$, $\varphi(x)=5x$. Решить уравнение $f(x)=|\varphi(x)|$.

1.2.17. Найти $f(x)$, если

$$f(x+1)=x^2-3x+2.$$

1.2.18. Вычислить значения функций

$$f(x)=x^2+1/x^2 \quad \text{и} \quad \varphi(x)=x^4+1/x^4$$

в тех точках, в которых $1/x+x=5$.

1.2.19. $f(x)=x+1$; $\varphi(x)=x-2$; решить уравнение

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

1.2.20. В треугольник ABC с основанием b и высотой h вписан прямоугольник, высота которого x. Выразить периметр P и площадь S прямоугольника как функции от x.

1.2.21. Найти области определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

в) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$; г) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$;

д) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$; е) $f(x)=\log_x 5$; ж) $f(x)=\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$;

з) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$; и) $f(x)=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;

к) $f(x)=\lg\cos x$; л) $f(x)=\arccos\dfrac{3}{4+2\sin x}$; м) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

Решение. а) Область определения заданной функции состоит из тех значений x, при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Для этого должны выполняться два условия:

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 6-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенства, получим $x\geqslant 1$; $x\leqslant 6$.

Таким образом, областью определения функции является отрезок $[1, 6]$.

д) Функция определена при тех значениях x, для которых

$$\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1, \text{ или } x^2-5x+4\leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, находим $1\leqslant x\leqslant 4$.

Таким образом, область определения функции — отрезок $[1, 4]$.

е) Функция определена для всех положительных x, отличных от 1. Значит, область определения функции состоит из промежутков $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

л) Функция определена при тех x, для которых

$$-1 \leqslant \frac{3}{4+2\sin x} \leqslant 1.$$

Так как $4+2\sin x > 0$ при любых x, то задача сводится к решению неравенства

$$\frac{3}{4+2\sin x} \leqslant 1.$$

Отсюда

$$3 \leqslant 4+2\sin x, \text{ т. е. } \sin x \geqslant -1/2.$$

Решая последнее неравенство, получим

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

м) Функция определена при тех x, для которых $|x|-x>0$, откуда $|x|>x$. Это неравенство выполняется при $x<0$. Следовательно, функция определена в интервале $(-\infty, 0)$.

1.2.22. Найти области определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;

б) $f(x)=\log_2 \log_3 \log_4 x$;

в) $f(x)=\frac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$;

г) $f(x)=\lg|4-x^2|$;

д) $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+\arcsin\frac{1+x^2}{2x}$.

Найти области изменения функций:

е) $y=\frac{1}{2-\cos 3x}$;

ж) $y=\frac{x}{1+x^2}$.

Решение. а) Чтобы функция $f(x)$ была определена, должно выполняться неравенство

$$\arcsin(\log_2 x) \geqslant 0,$$

откуда $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1$ и $1 \leqslant x \leqslant 2$.

б) Функция $\log_2 \log_3 \log_4 x$ определена при $\log_3 \log_4 x > 0$, откуда $\log_4 x > 1$ и $x > 4$. Следовательно, область определения есть промежуток $4 < x < +\infty$.

в) Заданная функция определена, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$x \neq 0; \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad x > 2,$$

но неравенства $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $x > 2$ несовместны, поэтому функция не определена ни при каком значении x.

д) Должны одновременно выполняться следующие неравенства:

$$\cos(\sin x) \geqslant 0 \text{ и } \left|\frac{1+x^2}{2x}\right| \leqslant 1.$$

Первое неравенство выполняется при всех значениях x, второе — при $|x|=1$. Следовательно, область определения заданной функции состоит лишь из двух точек $x=\pm 1$.

е) Имеем

$$\cos 3x=\frac{2y-1}{y}.$$

Так как

$$-1\leqslant \cos 3x\leqslant 1, \quad \text{то} \quad -1\leqslant \frac{2y-1}{y}\leqslant 1,$$

откуда, учитывая, что $y>0$, получим

$$-y\leqslant 2y-1\leqslant y \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1.$$

ж) Разрешив относительно x, получим

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Область изменения функции y определится из соотношения

$$1-4y^2\geqslant 0.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}.$$

1.2.23. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\pi/2.$$

Решение. Изучим область определения функции, стоящей в левой части уравнения. Эта функция будет определена при

$$x^2+x\geqslant 0, \quad 0\leqslant x^2+x+1\leqslant 1,$$

откуда $x^2+x=0$.

Таким образом, левая часть уравнения принимает действительные значения лишь при $x_1=0$ и $x_2=-1$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что они являются корнями заданного уравнения.

Этот пример показывает, что изучение областей определения функций иногда облегчает решение уравнений, неравенств и т. п.

1.2.24. Найти области определения функций:

а) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; б) $y=\lg\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

в) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$; г) $y=\dfrac{x}{\lg(1+x)}$.

1.2.25. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$. Каковы области определения функций

а) $f(3x^2)$; б) $f(x-5)$; в) $f(\operatorname{tg} x)$?

Решение. Заданные функции являются функциями от функций, или *суперпозициями* функций, т. е. *сложными* функциями.

а) Введем промежуточный аргумент $u=3x^2$. Тогда функция $f(3x^2)=f(u)$ определена, если $0\leqslant u\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant 3x^2\leqslant 1$, откуда $-1/\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{3}$.

в) Аналогично: $0\leqslant \operatorname{tg} x\leqslant 1$, откуда

$$k\pi\leqslant x\leqslant \pi/4+k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1.2.26. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$. Каковы области определения функций

а) $f(\sin x)$; б) $f(2x+3)$?

§ 1.3. Элементарное исследование функций

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *неубывающей* на этом множестве (соответственно, *возрастающей*, *невозрастающей*, *убывающей*), если для любых чисел $x_1, x_2\in X$, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Функция $f(x)$ называется *монотонной* на множестве X, если она обладает одним из указанных четырех свойств. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (или *снизу*) на множестве X, если существует такое число M (или m), что $f(x)\leqslant M$ для всех $x\in X$ (или $m\leqslant f(x)$ для всех $x\in X$). Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если она ограничена сверху и снизу.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $f(x+T)=f(x)$ для всех x, принадлежащих области определения функции (вместе со всякой точкой x точка $x+T$ должна принадлежать области определения). Наименьшее число T, обладающее указанным свойством, если оно существует, называется *периодом* функции $f(x)$. Функция $f(x)$ принимает в точке $x_0\in X$ *наибольшее значение*, если $f(x_0)\geqslant f(x)$ для всех $x\in X$, и *наименьшее значение*, если $f(x_0)\leqslant f(x)$ для всех $x\in X$. Функция $f(x)$, определенная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$, и называется *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$.

Чтобы составить представление о поведении функции, полезно ответить на следующие вопросы:

1. Какова область определения функции?
2. Является ли функция четной, нечетной, периодической?
3. В каких точках функция принимает значение, равное нулю? (Найти нули функции.)
4. Каков знак функции на промежутках между нулями?
5. Является ли функция ограниченной и каковы ее наименьшее и наибольшее значения?

Конечно, указанный перечень вопросов не исчерпывает задачи полного исследования функции. В дальнейшем этот круг вопросов будет расширяться.

1.3.1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=ax^2+bx+c$, а также наименьшее и наибольшее ее значения.

Решение. Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, имеем

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$