1.2.25. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$. Каковы области определения функций

а) $f(3x^2)$; б) $f(x-5)$; в) $f(\operatorname{tg} x)$?

Решение. Заданные функции являются функциями от функций, или *суперпозициями* функций, т. е. *сложными* функциями.

а) Введем промежуточный аргумент $u = 3x^2$. Тогда функция $f(3x^2) = f(u)$ определена, если $0 \leqslant u \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant 3x^2 \leqslant 1$, откуда $-1/\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 1/\sqrt{3}$.

в) Аналогично: $0 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$, откуда

$$k\pi \leqslant x \leqslant \pi/4 + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1.2.26. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$. Каковы области определения функций

а) $f(\sin x)$; б) $f(2x+3)$?

§ 1.3. Элементарное исследование функций

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *неубывающей* на этом множестве (соответственно, *возрастающей*, *невозрастающей*, *убывающей*), если для любых чисел $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Функция $f(x)$ называется *монотонной* на множестве X, если она обладает одним из указанных четырех свойств. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (или *снизу*) на множестве X, если существует такое число M (или m), что $f(x) \leqslant M$ для всех $x \in X$ (или $m \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$). Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если она ограничена сверху и снизу.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для всех x, принадлежащих области определения функции (вместе со всякой точкой x точка $x+T$ должна принадлежать области определения). Наименьшее число T, обладающее указанным свойством, если оно существует, называется *периодом* функции $f(x)$. Функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее значение*, если $f(x_0) \geqslant f(x)$ для всех $x \in X$, и *наименьшее значение*, если $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$. Функция $f(x)$, определенная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Чтобы составить представление о поведении функции, полезно ответить на следующие вопросы:

1. Какова область определения функции?
2. Является ли функция четной, нечетной, периодической?
3. В каких точках функция принимает значение, равное нулю? (Найти нули функции.)
4. Каков знак функции на промежутках между нулями?
5. Является ли функция ограниченной и каковы ее наименьшее и наибольшее значения?

Конечно, указанный перечень вопросов не исчерпывает задачи полного исследования функции. В дальнейшем этот круг вопросов будет расширяться.

1.3.1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, а также наименьшее и наибольшее ее значения.

Решение. Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, имеем

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Если $a > 0$, то функция $f(x)$ будет возрастать при тех значениях x, при которых $x+b/(2a) > 0$, т. е. при $x > -b/(2a)$, и убывать, когда $x+b/(2a) < 0$, т. е. при $x < -b/(2a)$. Таким образом, если $a > 0$, то функция $f(x)$ убывает в промежутке $(-\infty, -b/(2a))$ и возрастает в промежутке $(-b/(2a), +\infty)$. Очевидно, при $x = -b/(2a)$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение

$$f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Наибольшего значения функции здесь нет.

Аналогично, при $a < 0$ функция $f(x)$ будет возрастающей в промежутке $(-\infty, -b/(2a))$ и убывающей в промежутке $(-b/(2a), \infty)$; при $x = -b/(2a)$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение

$$f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a},$$

тогда как наименьшего значения у нее нет.

1.3.2. а) Найти наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 + 5x - 1.$$

б) Из всех прямоугольников данного периметра найти прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. а) Применим результаты задачи **1.3.1:** $a = 3 > 0$, $b = 5$, $c = -1$. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = -5/6$ и

$$y_{\min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{37}{12}.$$

б) Обозначим через $2p$ длину периметра искомого прямоугольника, а через x — длину одной из его сторон; тогда площадь S прямоугольника выразится так:

$$S = x(p-x) \quad \text{или} \quad S = px - x^2.$$

Задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $S(x) = -x^2+px$. Применим результаты задачи **1.3.1:** $a = -1 < 0$, $b = p$, $c = 0$. Наибольшее значение функция $S(x)$ принимает в точке $x = -b/(2a) = p/2$. Таким образом, одна сторона искомого прямоугольника равна $p/2$, а другая сторона $p-x = p/2$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат.

1.3.3. Показать, что

а) функция $f(x) = x^3 + 3x + 5$ возрастает во всей области ее определения;

б) функция $g(x) = x/(1+x^2)$ убывает в промежутке $(1, +\infty)$.

Решение. а) Функция определена для всех точек числовой оси. Выберем на числовой оси произвольные точки x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, и составим разность:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^3 + 3x_2 + 5) - (x_1^3 + 3x_1 + 5) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 3) = \\ &= (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3\right]. \end{aligned}$$

Поскольку $x_2-x_1>0$, а выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно при всех x_1 и x_2, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, т. е. $f(x_2)>f(x_1)$, а это значит, что функция $f(x)$ возрастает для всех значений x.

1.3.4. Найти промежутки возрастания и убывания функции

а) $f(x)=\sin x+\cos x$;

б) $\operatorname{tg}(x+\pi/3)$.

Решение. а) Пользуясь известными формулами тригонометрии, находим

$$f(x)=\sqrt{2}\cos(x-\pi/4).$$

Известно, что функция $\cos x$ убывает на отрезках

$$2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$$

и возрастает на отрезках

$$(2n-1)\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Следовательно, промежутки убывания функции $f(x)$:

$$\pi/4+2n\pi\leqslant x\leqslant\pi/4+(2n+1)\pi \qquad (n=0,\ \pm1,\ \ldots),$$

а промежутки возрастания $f(x)$:

$$\pi/4+(2n-1)\pi\leqslant x\leqslant\pi/4+2n\pi \qquad (n=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

1.3.5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=a\cos x+b\sin x \qquad (a^2+b^2>0).$$

Решение. Данную функцию можно представить так:

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha),$$

где $\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}$. Так как $|\cos(x-\alpha)|\leqslant1$, то наибольшее значение $f(x)$ равно $+\sqrt{a^2+b^2}$ (при $\cos(x-\alpha)=1$), а наименьшее значение $f(x)$ равно $-\sqrt{a^2+b^2}$ (при $\cos(x-\alpha)=-1$).

1.3.6. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=3^{(x^2-2)^3+8}.$$

Решение. Обозначим показатель степени через $\varphi(x)$, т. е.

$$\varphi(x)=(x^2-2)^3+8.$$

Функция $f(x)=3^{\varphi(x)}$ принимает наименьшее значение там же, где функция $\varphi(x)$.

Имеем

$$\varphi(x)=x^6-6x^4+12x^2=x^2[(x^2-3)^2+3].$$

Отсюда видно, что функция $\varphi(x)$ принимает наименьшее значение (равное 0) при $x=0$. Поэтому рассматриваемая функция $f(x)$ имеет наименьшее значение, равное $3^0=1$.

1.3.7. Исследовать функцию

$$f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x, \quad \text{где} \quad 0<x<\pi/2,$$

на возрастание и убывание.

1.3.8. Даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определить, при каком значении x функция

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

принимает наименьшее значение.

Решение. Перепишем функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

Отсюда видно, что $f(x)$ есть квадратный трехчлен ax^2+bx+c, у которого $a=n>0$. Воспользовавшись результатами задачи **1.3.1**, получаем, что функция достигает наименьшего значения при $x=-b/(2a)$, т. е. при $x=(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$.

Таким образом, сумма квадратов отклонений величины x от n заданных чисел достигает наименьшего значения тогда, когда x есть среднее арифметическое значение для этих чисел.

1.3.9. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной и какая из них не является ни четной, ни нечетной функцией.

а) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$; б) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$;

в) $f(x)=2x^3-x+1$; г) $f(x)=x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$.

Решение. а) Можно заметить, что $f(+x)+f(-x)=0$. Действительно,

$$f(+x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=$$
$$=\lg(1+x^2-x^2)=0,$$

следовательно, $f(x)=-f(-x)$ для всех x. Значит, функция нечетная.

б) $f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

Таким образом, $f(-x)=-f(x)$ для всех x из области определения $(-1,\ 1)$. Значит, функция нечетная.

1.3.10. Установить четность или нечетность функций:

а) $f(x)=4-2x^4+\sin^2 x$; б) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}$; г) $f(x)=\sin x+\cos x$; д) $f(x)=\text{const}$.

1.3.11. Доказать, что если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то функция $f(ax+b)$, где $a>0$, является периодической с периодом T/a.

Решение. Во-первых,

$$f[a(x+T/a)+b]=f[(ax+b)+T]=f(ax+b),$$

так как T — период функции $f(x)$. Во-вторых, пусть T_1 — такое положительное число, что

$$f[a(x+T_1)+b]=f(ax+b).$$

Возьмем произвольную точку x из области определения функции $f(x)$ и положим $x'=(x-b)/a$. Тогда

$$f(ax'+b)=f\left(a\frac{x-b}{a}+b\right)=f(x)=$$
$$=f[a(x'+T_1)+b]=f(ax'+b+aT_1)=f(x+aT_1).$$

Отсюда следует, что период $T\leqslant aT_1$, т. е. $T_1\geqslant T/a$, и значит, T/a — период функции $f(ax+b)$.

Замечание. Периодическая функция $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, где A, ω, φ — постоянные, называется *гармоникой* с амплитудой $|A|$, частотой ω и начальной фазой φ. Так как функция $\sin x$ имеет период 2π, то функция $A\sin(\omega x+\varphi)$ имеет период $T=2\pi/\omega$.

1.3.12. Указать амплитуду $|A|$, частоту ω, начальную фазу φ и период T следующих гармоник:

а) $f(x)=5\sin 4x$; б) $f(x)=4\sin(3x+\pi/4)$;

в) $f(x)=3\sin(x/2)+4\cos(x/2)$.

1.3.13. Найти период функций:

а) $f(x)=\operatorname{tg}2x$; б) $f(x)=\operatorname{ctg}(x/2)$; в) $f(x)=\sin 2\pi x$.

Решение. а) Так как функция $\operatorname{tg}x$ имеет период π, то функция $\operatorname{tg}2x$ имеет период $\pi/2$.

1.3.14. Найти период функций:

а) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; б) $f(x)=|\cos x|$.

Решение. а) $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right);$$

отсюда $T=2\pi/\omega=2\pi/4=\pi/2$.

б) $f(x)=|\cos x|=\sqrt{\cos^2 x}=\sqrt{(1+\cos 2x)/2}$; но функция $\cos 2x$ имеет период $T=\pi$, поэтому и заданная функция имеет тот же период.

1.3.15. Доказать, что функция $f(x)=\cos x^2$ не является периодической.

Решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что функция имеет период T; тогда должно выполняться тождество $\cos(x+T)^2\equiv\cos x^2$.

В силу условий равенства косинусов при некотором целом k имеем

$$x^2+2Tx+T^2\pm x^2\equiv 2\pi k.$$

Но это тождество невозможно, так как k может принимать только целочисленные значения, а слева стоит линейная или квадратичная функция непрерывного аргумента x.

1.3.16. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}.$$

1.3.17. Установить, какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; б) $f(x)=x^2-|x|$;
в) $f(x)=x\sin^2 x-x^3$; г) $f(x)=(1+2^x)^2/2^x$.

1.3.18. Найти период функций:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; б) $f(x)=2\cos\frac{x-\pi}{3}$.

1.3.19. Доказать, что функции:

а) $f(x)=x+\sin x$; б) $f(x)=\cos\sqrt{x}$,

не являются периодическими.

§ 1.4. Обратные функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и имеет область значений Y. Если для каждого $y\in Y$ существует единственное значение x такое, что $f(x)=y$, то это соответствие определяет некоторую функцию $x=g(y)$, называемую *обратной* по отношению к данной функции $y=f(x)$. Достаточным условием существования обратной функции является строгая монотонность функции $y=f(x)$. При этом если функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает).

График обратной функции $x=g(y)$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$, если независимое переменное откладывать по оси Oy. Если же независимое переменное откладывать по оси Ox, т. е. если записать обратную функцию в виде $y=g(x)$, то график обратной функции будет симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.4.1. Найти функцию, обратную функции $y=3x+5$.

Решение. Функция $y=3x+5$ определена и возрастает на всей числовой оси. Следовательно, обратная функция существует и возрастает. Разрешая уравнение $y=3x+5$ относительно x, получим $x=(y-5)/3$.

1.4.2. Показать, что функция $y=k/x$ $(k\neq 0)$ обратна сама себе.

Решение. Функция определена и монотонна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Следовательно, обратная функция существует. Область значений функции — вся числовая ось, кроме точки $y=0$. Разрешая уравнение $y=k/x$ относительно x, получим $x=k/y$.

1.4.3. Найти функцию, обратную функции

$$y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

Решение. Функция $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ определена для всех x, так как $\sqrt{x^2+1}>|x|$, и является нечетной (задача **1.3.9**, а)).