целочисленные значения, а слева стоит линейная или квадратичная функция непрерывного аргумента x.

1.3.16. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}.$$

1.3.17. Установить, какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; б) $f(x)=x^2-|x|$;
в) $f(x)=x\sin^2 x-x^3$; г) $f(x)=(1+2^x)^2/2^x$.

1.3.18. Найти период функций:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; б) $f(x)=2\cos\frac{x-\pi}{3}$.

1.3.19. Доказать, что функции:

а) $f(x)=x+\sin x$; б) $f(x)=\cos\sqrt{x}$,

не являются периодическими.

§ 1.4. Обратные функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и имеет область значений Y. Если для каждого $y\in Y$ существует единственное значение x такое, что $f(x)=y$, то это соответствие определяет некоторую функцию $x=g(y)$, называемую *обратной* по отношению к данной функции $y=f(x)$. Достаточным условием существования обратной функции является строгая монотонность функции $y=f(x)$. При этом если функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает).

График обратной функции $x=g(y)$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$, если независимое переменное откладывать по оси Oy. Если же независимое переменное откладывать по оси Ox, т. е. если записать обратную функцию в виде $y=g(x)$, то график обратной функции будет симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1.4.1. Найти функцию, обратную функции $y=3x+5$.

Решение. Функция $y=3x+5$ определена и возрастает на всей числовой оси. Следовательно, обратная функция существует и возрастает. Разрешая уравнение $y=3x+5$ относительно x, получим $x=(y-5)/3$.

1.4.2. Показать, что функция $y=k/x$ $(k\neq 0)$ обратна сама себе.

Решение. Функция определена и монотонна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Следовательно, обратная функция существует. Область значений функции — вся числовая ось, кроме точки $y=0$. Разрешая уравнение $y=k/x$ относительно x, получим $x=k/y$.

1.4.3. Найти функцию, обратную функции

$$y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

Решение. Функция $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ определена для всех x, так как $\sqrt{x^2+1}>|x|$, и является нечетной (задача **1.3.9**, а)).

Для положительных x она возрастает, следовательно, она всюду возрастает и имеет обратную. Разрешая уравнение

$$y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

относительно x, находим

$$a^y=x+\sqrt{x^2+1}; \qquad a^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1},$$

откуда

$$x=\frac{1}{2}\left(a^y-a^{-y}\right)=\operatorname{sh}(y\ln a).$$

1.4.4. Показать, что функции

$$f(x)=x^2-x+1,\ x\geqslant 1/2 \quad \text{и} \quad \varphi(x)=1/2+\sqrt{x-3/4}$$

взаимно обратны, и решить уравнение

$$x^2-x+1=1/2+\sqrt{x-3/4}.$$

Решение. Функция $y=x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ возрастает в промежутке $1/2\leqslant x<\infty$, причем при изменении x в указанном промежутке имеем $3/4\leqslant y<\infty$. Следовательно, в промежутке $3/4\leqslant y<\infty$ определена обратная функция $x=g(y)$, $x\geqslant 1/2$, которая находится из уравнения

$$x^2-x+(1-y)=0.$$

Решая уравнение относительно x, получим

$$x=g(y)=1/2+\sqrt{y-3/4}=\varphi(y).$$

Решим теперь уравнение

$$x^2-x+1=1/2+\sqrt{x-3/4}.$$

Так как графики прямой и обратной функций могут пересекаться только на прямой $y=x$, то, решая уравнение $x^2-x+1=x$, находим $x=1$.

1.4.5. Найти функции, обратные функции $y=\sin x$.

Решение. Область определения функции $y=\sin x$ — вся числовая ось, область значений функции — отрезок $[-1, 1]$. Однако условие существования обратной функции не выполнено.

Разобьем ось Ox на отрезки $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$. Если n четно, то на отрезках $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ функция возрастает, если же n нечетно, то на отрезках $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ функция убывает. Следовательно, на каждом из указанных отрезков существует обратная функция, определенная на $[-1, 1]$. В частности, для отрезка $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ существует обратная функция $x=\arcsin y$.

Функция, обратная функции $y=\sin x$ на отрезке $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$, выражается через $\arcsin y$ следующим образом:

$$x=(-1)^n\arcsin y+n\pi \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

1.4.6. Найти функции, обратные данным:

а) $y = \sin(3x - 1)$ при $-(\pi/6 + 1/3) \leqslant x \leqslant (\pi/6 + 1/3)$;

б) $y = \arcsin(x/3)$ при $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

в) $y = 5^{\lg x}$;

г) $y = 2^{x/(x-1)}$.

1.4.7. Доказать, что функция $y = (1-x)/(1+x)$ обратна сама себе.

§ 1.5. Построение графиков функций

1.5.1. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$; г) $f(x) = \arccos(\cos x)$;

д) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; е) $f(x) = x^{1/\lg x}$.

Решение. а) Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Функция $f(x)$ четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат и можно ограничиться исследованием функции только при $x \geqslant 0$.

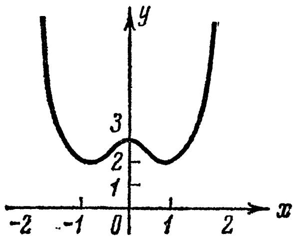

Рис. 2.

Выделим полный квадрат $f(x) = (x^2 - 1)^2 + 2$. Так как первое слагаемое $(x^2-1)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение функции, равное 2, достигается в точках $x = \pm 1$ (рис. 2).

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $f(x)$ убывает от 3 до 2; на интервале $1 < x < \infty$ функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

б) Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Функция $f(x)$ нечетная, поэтому ее график симметричен относительно начала координат и можно ограничиться исследованием функции только при $x \geqslant 0$.

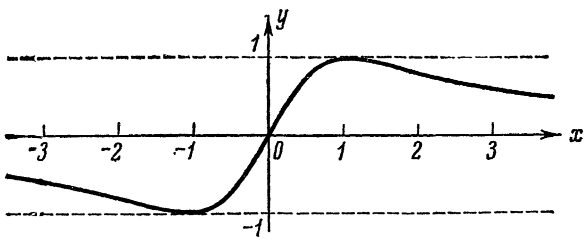

Рис. 3.

Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Очевидно, что других точек пересечения с осями координат нет. Заметим, что $|f(x)| \leqslant 1$. В самом деле, $(1 - |x|)^2 \geqslant 0$ или $1 + x^2 \geqslant$