**1.4.6.** Найти функции, обратные данным:

а) $y = \sin(3x - 1)$ при $-(\pi/6 + 1/3) \leqslant x \leqslant (\pi/6 + 1/3)$;

б) $y = \arcsin(x/3)$ при $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

в) $y = 5^{\lg x}$;

г) $y = 2^{x/(x-1)}$.

**1.4.7.** Доказать, что функция $y = (1 - x)/(1 + x)$ обратна сама себе.

## § 1.5. Построение графиков функций

**1.5.1.** Исследовать функцию и построить ее график:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$; г) $f(x) = \arccos(\cos x)$;

д) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; е) $f(x) = x^{1/\lg x}$.

Решение. а) Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Функция $f(x)$ четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат и можно ограничиться исследованием функции только при $x \geqslant 0$.

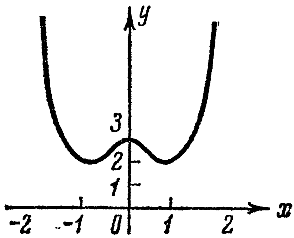


Рис. 2.

Выделим полный квадрат $f(x) = (x^2 - 1)^2 + 2$. Так как первое слагаемое $(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение функции, равное 2, достигается в точках $x = \pm 1$ (рис. 2).

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $f(x)$ убывает от 3 до 2; на интервале $1 < x < \infty$ функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

б) Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Функция $f(x)$ нечетная, поэтому ее график симметричен относительно начала координат и можно ограничиться исследованием функции только при $x \geqslant 0$.

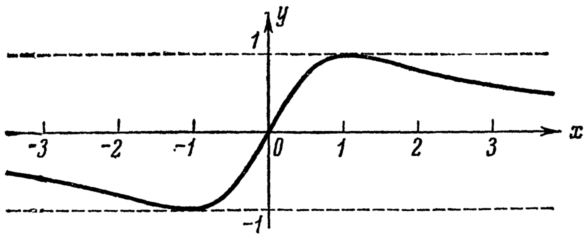


Рис. 3.

Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Очевидно, что других точек пересечения с осями координат нет. Заметим, что $|f(x)| \leqslant 1$. В самом деле, $(1 - |x|)^2 \geqslant 0$ или $1 + x^2 \geqslant$

$\geqslant 2|x|$, откуда
$$1 \geqslant \frac{2|x|}{1+x^2} = |f(x)|.$$

Так как $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$ и $f(1)=1$, то в промежутке $[0, \infty)$ наибольшее значение функции $f(x)$ равно 1, наименьшее равно 0 (рис. 3).

Докажем, что на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция возрастает. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$. Тогда имеем
$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2+2x_2x_1^2-2x_1-2x_1x_2^2}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} =$$
$$= \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0$$
и $f(x_2) > f(x_1)$.

Аналогично показывается, что на интервале $(1, \infty)$ функция убывает. Наконец,
$$f(x) = 2x/(1+x^2) < 2x/x^2 = 2/x,$$
откуда видно, что $f(x)$ стремится к нулю с ростом $x$.

в) Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Функция имеет период $2\pi$, поэтому достаточно изучить ее на отрезке $[0, 2\pi]$. На этом отрезке она обращается в нуль в точках $x=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$.

Записав заданную функцию в виде
$$f(x) = (1-\sin x)^2 - 1,$$
замечаем, что она возрастает при убывании функции $\sin x$ и убывает при возрастании $\sin x$. Поэтому функция $f(x)$ на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[3\pi/2, 2\pi]$ убывает, а на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ возрастает. Так как $f(\pi/2) = -1$, а $f(3\pi/2) = 3$, то область изменения функции $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ (рис. 4).

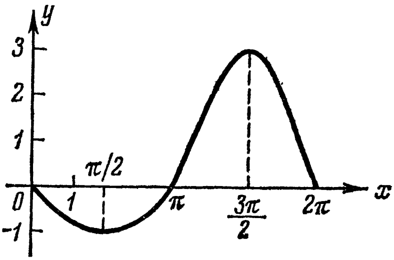

Рис. 4.

г) Область определения функции — вся числовая ось. Действительно, $|\cos x| \leqslant 1$ при любом $x$ и поэтому $\arccos(\cos x)$ имеет смысл. Функция $f(x)$ — периодическая с периодом $2\pi$, следовательно, достаточно построить график этой функции на отрезке $[0, 2\pi]$. Но на этом отрезке имеет место следующее равенство:
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 2\pi - x, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Действительно, первое утверждение следует из определения функции $\arccos x$, а второе можно доказать следующим образом: положим

$x' = 2\pi - x,\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi$; тогда $0 \leqslant x' \leqslant \pi$ и

$$f(x) = \arccos[\cos(2\pi - x')] = \arccos(\cos x') = x' = 2\pi - x.$$

Учитывая все сказанное, строим график (рис. 5).

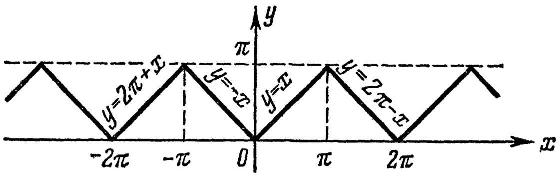


Рис. 5.

д) Функция $y = \sqrt{\sin x}$ периодическая с периодом $2\pi$, поэтому мы можем ограничиться промежутком $[0, 2\pi]$. Однако функция не определена во всем промежутке $[0, 2\pi]$, а только лишь в промежутке

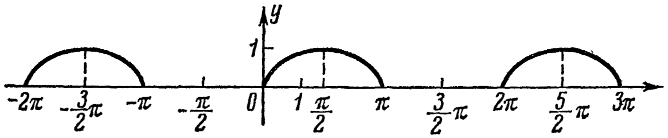


Рис. 6.

$[0, \pi]$, так как на промежутке $(\pi, 2\pi)$ подкоренное выражение отрицательно. График симметричен относительно прямой $x = \pi/2$, так же как график $y = \sin x$ (рис. 6). Мы имеем пример периодической функции, не существующей в бесконечном множестве промежутков.

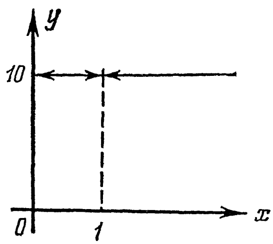


Рис. 7.

е) Область определения функции:

$$0 < x < 1 \text{ и } 1 < x < \infty.$$

Преобразуем формулу к виду

$$f(x) = x^{1/\lg x} = x^{\log_x 10} = 10.$$

Следовательно, графиком данной функции служит полупрямая $y = 10$, в правой полуплоскости с выключенной точкой $x = 1$ (рис. 7).

**1.5.2.** Построить графики функций, задаваемых разными формулами на разных промежутках (и сводящихся к ним):

а) $y = \begin{cases} \sin x & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1/(x-1) & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 4; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2 & \text{при} \quad x > 0, \\ 1/2 & \text{при} \quad x = 0, \\ -x^3 & \text{при} \quad x < 0; \end{cases}$

в) $y = x + \sqrt{x^2}$; г) $y = 2/(x + \sqrt{x^2})$.

Решение. а) Область определения функции — отрезок $[-\pi, 4]$. График функции состоит из части синусоиды $y = \sin x$ на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, прямой $y = 2$ на промежутке $(0, 1]$ и части ветви гиперболы $y = 1/(x-1)$ на промежутке $(1, 4]$ (рис. 8).

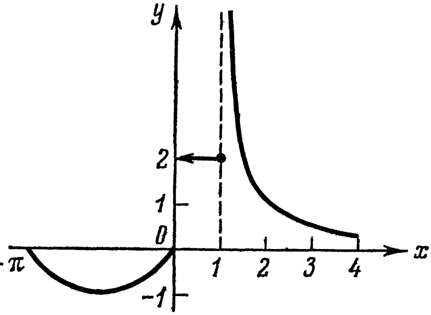


Рис. 8.

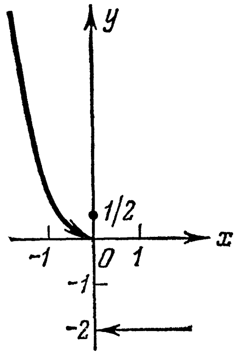


Рис. 9.

б) График функции состоит из части кубической параболы, одной изолированной точки и полупрямой (рис. 9).

в) Функцию можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, графиком нашей функции служит ломаная (рис. 10).

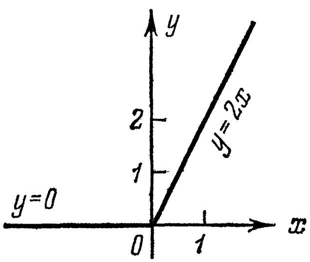


Рис. 10.

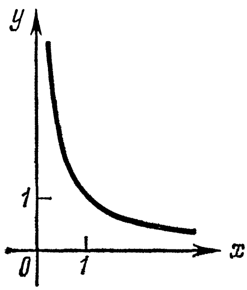


Рис. 11.

г) Из пункта в) следует, что функция определена только на промежутке $(0, +\infty)$, причем $y = 1/x$ $(x > 0)$. Таким образом, графиком нашей функции служит правая часть равнобочной гиперболы (рис. 11).

**1.5.3.** Построить графики функций:

а) $y = \cos x + |\cos x|$; б) $y = |x+2|\, x$.

Решение. а) $\cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x & \text{при} \quad \cos x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad \cos x < 0. \end{cases}$

Удваивая неотрицательные ординаты графика функции $y=\cos x$ (на рис. 12 — пунктир) и принимая $y=0$ в точках, где $\cos x<0$, построим искомый график (на рис. 12 — сплошная линия).

б) Функцию $|x+2|x$ можно задать двумя формулами:

$$y=\begin{cases}(x+2)x & \text{при} \quad x\geqslant -2,\\ -(x+2)x & \text{при} \quad x\leqslant -2.\end{cases}$$

Построив отдельно обе параболы $y=(x+2)x=(x+1)^2-1$, $y=-[(x+1)^2-1]$, сохраняем только те их участки, которые

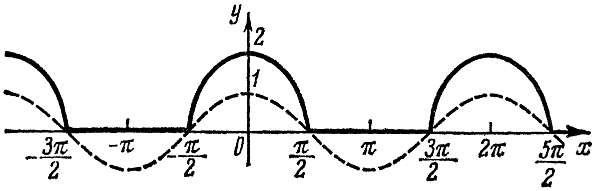


Рис. 12.

соответствуют указанным промежуткам. На рис. 13 сплошной линией дан график заданной функции, а пунктиром — отброшенные части построенных парабол.

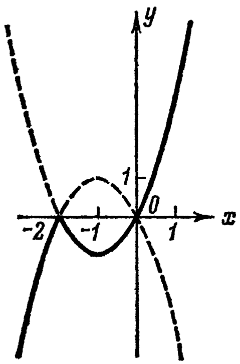


Рис. 13.

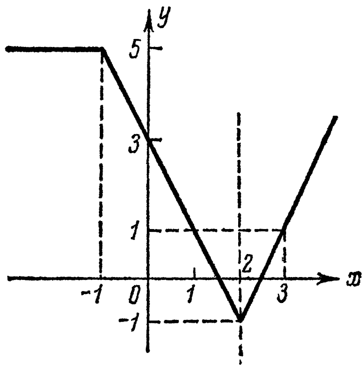


Рис. 14.

**1.5.4.** Построить график функции $y=2|x-2|-|x+1|+x$.

Решение. При $x\geqslant 2$

$$y=2(x-2)-(x+1)+x=2x-5.$$

При $-1\leqslant x\leqslant 2$

$$y=-2(x-2)-(x+1)+x=-2x+3.$$

Наконец, при $x\leqslant -1$

$$y=-2(x-2)+(x+1)+x=5.$$

Следовательно, заданную функцию можно записать следующим образом:

$$y=\begin{cases} 5, & x\leqslant -1, \\ -2x+3, & -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2x-5, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

Поэтому график представляется ломаной (рис. 14).

**1.5.5.** Построить график функции

$$y=2^x-2^{-x}.$$

Решение. Построив графики функций $y_1=2^x$ и $y_2=-2^{-x}$ (на рис. 15—пунктирные линии), складываем графически их ординаты. При сложении полезно иметь в виду, что $y_2<y<y_1$ и что $y_2$ стремится к нулю с ростом $x$, а $y_1$ стремится к нулю с убыванием $x$ (на рис. 15—сплошная линия).

**1.5.6.** Построить график функции

$$y=x\sin x.$$

Решение. Функция $y$, как произведение двух нечетных функций $y_1=x$ и $y_2=\sin x$, четна, поэтому анализ будем проводить для $x\geqslant 0$.

Строим графики функций: $y_1=x$ и $y_2=\sin x$ (на рис. 16—пунктирные линии).

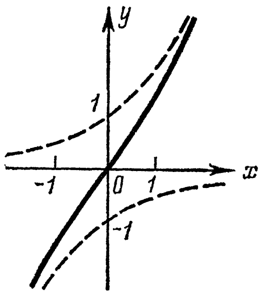


Рис. 15.

В точках, где $y_2=\sin x=0$, $y=y_1\cdot y_2=0$, а в точках, где $y_2=\sin x=\pm 1$, $y=\pm y_1=\pm x$. Последнее равенство показывает

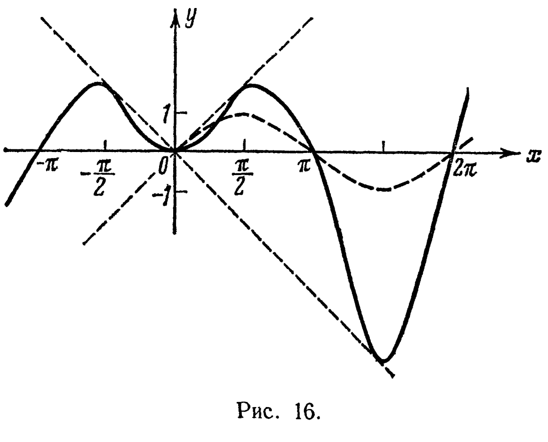


Рис. 16.

целесообразность построения графика вспомогательной функции $y_3=-x$.

Отмечая указанные точки и соединяя их плавной кривой, получим искомый график (на рис. 16—сплошная линия).

**1.5.7.** Построить график функции $y=x(x^2-1)$ путем умножения ординат графиков $y_1=x$ и $y_2=x^2-1$.

**1.5.8.** Построить графики функций

а) $y=x/(x^2-4)$, б) $y=1/\arccos x$.

Решение. а) Так как функция нечетная, то достаточно исследовать ее для $x \geqslant 0$.

Будем рассматривать ее как частное двух функций:

$$y_1=x \quad \text{и} \quad y_2=x^2-4.$$

Так как при $x=2$ знаменатель $y_2=0$, то функция не определена в точке 2. В промежутке $[0, 2)$ функция $y_1$ возрастает от 0 до 2, функция $y_2$ отрицательна и $|y_2|=4-x^2$ убывает от 4 до 0, поэтому частное $f(x)=y_1/y_2$ отрицательно и возрастает по абсолютной величине, т. е. $f(x)$ убывает в промежутке $[0, 2)$ от 0 до $-\infty$.

В промежутке $(2, \infty)$ обе функции $y_1$ и $y_2$ положительны и возрастают. Их частное убывает, так как из $2 \leqslant x_1 < x_2$ следует

$$y_2-y_1=\frac{x_2}{x_2^2-4}-\frac{x_1}{x_1^2-4}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+4)}{(x_2^2-4)(x_1^2-4)}<0.$$

При этом указанное частное стремится к нулю при $x \to \infty$, так как $y=\dfrac{1/x}{1-4/x^2} \to 0$. Общий вид графика представлен на рис. 17 (сплошная линия).

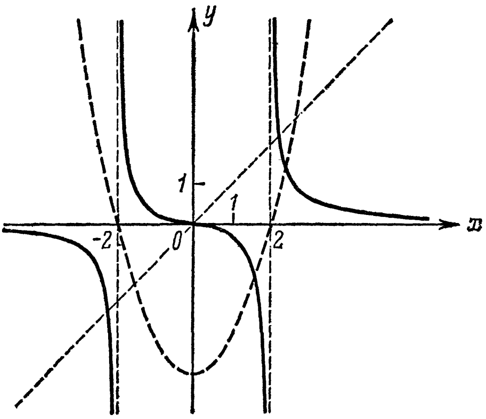

Рис. 17.

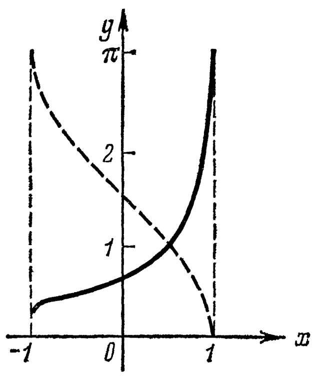

Рис. 18.

б) Обозначим $y_1=\arccos x$. Область определения этой функции $|x| \leqslant 1$. При $x=1$ имеем $y_1=0$, следовательно, $y=1/y_1 \to \infty$ при $x \to 1$, т. е. $x=1$ является вертикальной асимптотой. Функция $y_1$ на всем промежутке определения $[-1, 1)$ убывает, следовательно, $y=1/y_1$ возрастает. Наибольшее значение $y_1=\pi$ имеет при $x=-1$. Соответственно, наименьшее значение функции $y=1/\pi$. Общий вид графика — сплошная линия на рис. 18.

## Простейшие преобразования графиков

I. График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным сдвигом его вдоль оси $Ox$ на $|a|$ единиц масштаба в направлении, противоположном знаку $a$ (рис. 19).

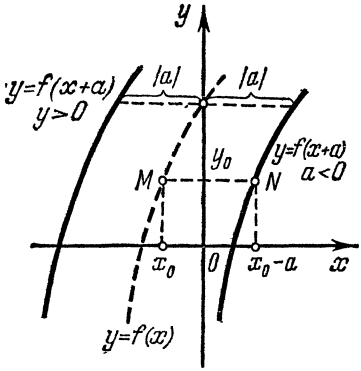


Рис. 19.

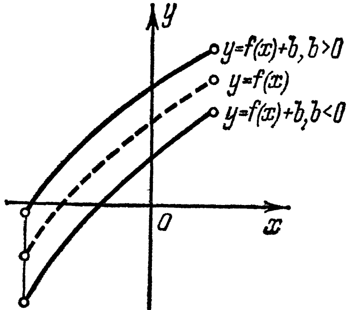


Рис. 20.

II. График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным сдвигом его вдоль оси $Oy$ на $|b|$ единиц масштаба в направлении, совпадающем со знаком $b$ (рис. 20).

III. График функции $y=f(kx)$ $(k>0)$ получается из графика функции $y=f(x)$ «сжатием» к оси $Oy$ в $k$ раз при $k>1$ и «растяжением» от оси $Oy$ в $1/k$ раз при $k<1$ (рис. 21).

IV. График функции $y=kf(x)$ $(k>0)$ получается из графика функции $y=f(x)$ «растяжением» от оси $Ox$ в $k$ раз при $k>1$ и «сжатием» к оси $Ox$ в $1/k$ раз при $k<1$ (рис. 21).

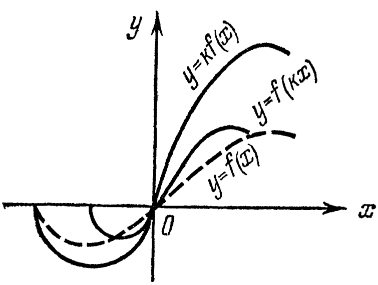


Рис. 21.

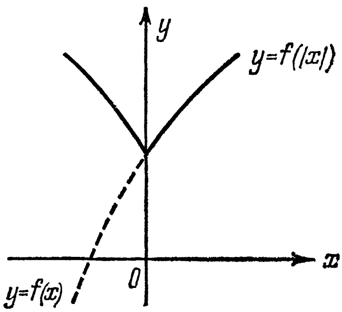


Рис. 22.

V. График функции $y=-f(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси $Ox$, а график функции $y=f(-x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси $Oy$.

VI. График функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: для $x\geqslant 0$ сохраняется график функции $y=f(x)$, затем эта оставленная часть графика отображается симметрично относительно оси $Oy$, определяя график функции для $x\leqslant 0$ (рис. 22).

VII. График функции $y=|f(x)|$ получается из графика $y=f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y=f(x)$, лежащая над осью $Ox$, остается без изменения; часть графика, лежащая под осью $Ox$, симметрично отображается относительно оси $Ox$ (рис. 23).

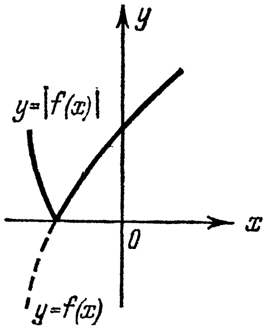


Рис. 23.

VIII. Графики функций более сложного вида

$$y=\lambda f(kx+a)+b$$

получаются из графика $y=f(x)$ последовательным применением преобразований I—V.

**1.5.9.** Построить график функции

$$y=3\sqrt{-2(x+2,5)}-0,8$$

с помощью преобразования графика $y=\sqrt{x}$.

Решение. Строим график функции $y=\sqrt{x}$ (это верхняя ветвь параболы $y^2=x$) (рис. 24, *а*) и последовательно преобразуем его следующим образом.

Увеличивая в $3\sqrt{2}$ раза ординаты точек графика функции $y=\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их абсциссы, строим график функции $y=3\sqrt{2x}$ (рис. 24, *б*).

Зеркальным отображением относительно оси $Oy$ строим график функции $y=3\sqrt{-2x}$ (рис. 24, *в*).

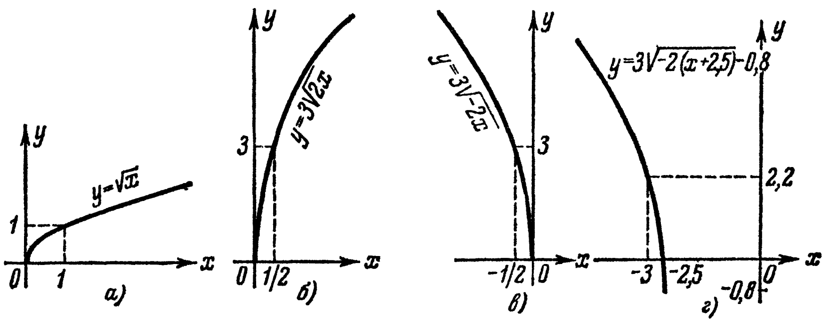


Рис. 24.

Теперь остается перенести полученный график на 2,5 единицы масштаба влево и на 0,8 единицы вниз и построить искомый график функции $y=3\sqrt{-2(x+2,5)}-0,8$ (рис. 24, *г*).

**1.5.10.** Построить график функции $y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$ с помощью преобразования косинусоиды.

Решение. Преобразуем заданную функцию

$$y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Таким образом, нам нужно построить график функции

$$y=2\sqrt{3}\cos(x+\pi/6).$$

Это — график функции $y=2\sqrt{3}\cos x$, смещенный на $\pi/6$ влево. Функция имеет период $2\pi$; поэтому достаточно начертить ее график для $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ (рис. 25).

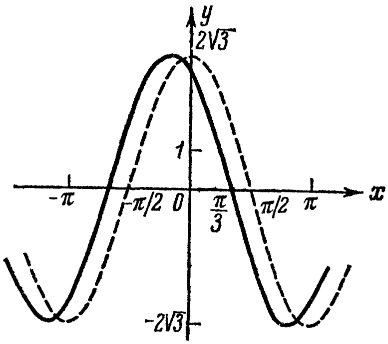

Рис. 25.

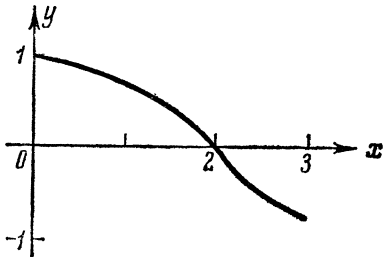

Рис. 26.

Подобным образом строится график любой функции вида $y=a\cos x+b\sin x$, где $a$ и $b$ — постоянные.

**1.5.11.** Построить графики функций:

а) $y=\dfrac{x+3}{x+1}$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$;

в) $y=\begin{cases} x^2+x+1, & \text{если} \quad -1\leqslant x<0,\\ \sin^2 x, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ (x-1)/(x+1), & \text{если} \quad \pi<x\leqslant 5;\end{cases}$

г) $y=x+1/x$; д) $y=x^2-x^3$;
е) $y=x+\sin x$; ж) $y=1/\cos x$;
з) $y=3\sin(2x-4)$; и) $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}-1{,}2$;
к) $y=|x^2-2x-1|$; л) $y=||x|-1|$; м) $y=\cos(\sin x)$;
н) $y=|\sin x|+\sin x$ на отрезке $[0, 3\pi]$;

о) $y=x^2\operatorname{sign}x$, где $\operatorname{sign}x=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0,\\ -1 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$

**1.5.12.** Функция $y=f(x)$ задана графически (рис. 26). Построить графики функций:

а) $y=f(x+1)$; б) $y=f(x/2)$; в) $y=|f(x)|$;
г) $y=(|f(x)|\pm f(x))/2$; д) $y=|f(x)|/f(x)$.