§ 1.6. Числовые последовательности. Предел последовательности

Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ при $n \longrightarrow \infty$, $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon) > 0$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim x_n = 0$, и *бесконечно большой*, если $\lim x_n = \infty$.

1.6.1. Дан общий член последовательности $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

Написать пять первых членов этой последовательности.

Решение. Положив последовательно $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в общем члене x_n, получим

$$x_1 = \frac{\sin(\pi/2)}{1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\sin(2\pi/2)}{2} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\sin(3\pi/2)}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$x_4 = \frac{\sin(4\pi/2)}{4} = 0; \qquad x_5 = \frac{\sin(5\pi/2)}{5} = \frac{1}{5}.$$

1.6.2. Зная несколько первых членов последовательности, написать одно из возможных выражений для общего члена:

а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23};$

б) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}.$

Замечание. Знание нескольких первых членов последовательности еще не определяет эту последовательность. Поэтому поставленную задачу надо воспринимать как задачу отыскания некоторой простой индуктивной закономерности, согласующейся с заданными членами.

Решение. а) Заметим, что числитель каждого из заданных членов последовательности равен квадрату номера этого члена плюс единица, т. е. n^2+1. Знаменатели же образуют арифметическую прогрессию 3, 8, 13, 18, ... с первым членом $a_1 = 3$ и разностью $d = 5$. Следовательно,

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n - 2,$$

поэтому

$$x_n = \frac{n^2+1}{5n-2}.$$

б) В этом примере общий член последовательности можно записать с помощью двух формул: одной — для членов, стоящих на нечетных, другой — для членов, стоящих на четных местах:

$$x_n = \begin{cases} k & \text{при} \quad n = 2k-1, \\ 1/(k+1) & \text{при} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Можно написать и одну формулу, но более сложную, например,

$$x_n = \frac{n+1}{4}[1-(-1)^n] + \frac{1}{n+2}[1+(-1)^n].$$

1.6.3. Найти несколько первых членов последовательности, если общий член задается формулой

а) $x_n = \sin(n\pi/3)$;

б) $x_n = 2^{-n}\cos n\pi$;

в) $x_n = (1+1/n)^n$.

1.6.4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а) $\lim x_n = 1$, если $x_n = (2n-1)/(2n+1)$,

б) $\lim x_n = 3/5$, если $x_n = (3n^2+1)/(5n^2-1)$. Начиная с какого n выполняется неравенство $|x_n - 3/5| < 0{,}01$?

Решение. а) Для любого $\varepsilon > 0$ попробуем найти такое натуральное число $N(\varepsilon)$, чтобы для всякого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Для этого найдем абсолютную величину разности

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1}.$$

Значит, неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ выполняется, если $2/(2n+1) < \varepsilon$, откуда $n > 1/\varepsilon - 1/2$. Поэтому в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $1/\varepsilon - 1/2$, т. е. $N = E(1/\varepsilon - 1/2)$.

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что из неравенства $n > N$ будет следовать $|x_n - 1| < \varepsilon$, а это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1.$$

б) Найдем абсолютную величину разности $|x_n - 3/5|$:

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5(5n^2-1)}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon.$$

Решая это неравенство, находим

$$n^2 > \frac{8}{25\varepsilon} + \frac{1}{5}; \qquad n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Положив

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right),$$

мы заключаем, что при $n > N$

$$|x_n - 3/5| < \varepsilon,$$

ч. т. д. (что требовалось доказать).

Если $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{805}\right) = 5,$$

и все члены последовательности, начиная с 6-го, содержатся в интервале $(3/5 - 0{,}01;\ 3/5 + 0{,}01)$.

1.6.5. Дана последовательность с общим членом $x_n = (3n-5)/(9n+4)$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/3$. Найти число точек x_n, лежащих вне интервала

$$L = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000};\ \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right).$$

Решение. Расстояние от точки x_n до точки $1/3$ равно

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{19}{3(9n+4)}\right| = \frac{19}{3(9n+4)}.$$

Вне интервала L окажутся те члены последовательности, для которых это расстояние больше 0,001, т. е.

$$\frac{19}{3(9n+4)} > \frac{1}{1000},$$

откуда

$$1 \leqslant n < \frac{18\,988}{27} = 703\,\frac{7}{27}.$$

Значит, вне интервала L находятся 703 точки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{703}$.

1.6.6. Доказать, что число $l = 0$ не является пределом последовательности с общим членом $x_n = (n^2-2)/(2n^2-9)$.

Решение. Оценим снизу абсолютную величину разности

$$\left|\frac{n^2-2}{2n^2-9} - 0\right| = \frac{|n^2-2|}{|2n^2-9|}.$$

Абсолютная величина разности при $n \geqslant 3$ остается больше постоянного числа $1/2$; следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1/2$, что для любого $n \geqslant 3$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{n^2-2}{2n^2-9} - 0\right| > \frac{1}{2}.$$

Полученное неравенство доказывает, что $l=0$ не является пределом данной последовательности.

1.6.7. Доказать, что последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

с общим членом

$$x_n=\begin{cases} 1/n, & \text{если } n=2k-1,\\ n/(n+2), & \text{если } n=2k,\end{cases}$$

предела не имеет.

Решение. Легко установить, что точки x_n с нечетными номерами «стягиваются» к точке 0, а точки x_n с четными номерами — к точке 1. Следовательно, любая окрестность точки 0, а также любая окрестность точки 1 содержат бесконечное множество точек x_n. Пусть a есть произвольное действительное число. Всегда можно выбрать настолько малое $\varepsilon>0$, чтобы ε-окрестность точки a не содержала по крайней мере некоторую окрестность одной из точек 0 или 1. Тогда вне этой окрестности будет находиться бесконечное множество чисел x_n и поэтому нельзя утверждать, что все числа x_n, начиная с некоторого, попадут в ε-окрестность числа a. А это значит, по определению, что число a не является пределом данной последовательности. Но число a — произвольное, поэтому никакое число не является пределом этой последовательности.

1.6.8. Доказать, что $\lim x_n=1$, если $x_n=(3^n+1)/3^n$.

1.6.9. Доказать, что $\lim x_n=2$, если $x_n=(2n+3)/(n+1)$. Найти номер члена, начиная с которого выполняется неравенство $|(2n+3)/(n+1)-2|<\varepsilon$, где $\varepsilon=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

1.6.10. Доказать, что последовательность

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{8},\ \ldots,$$

с общим членом

$$x_n=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^{(n+1)/2}}, & \text{если } n \text{ нечетное},\\[2mm] \dfrac{1}{2^{n/2}}, & \text{если } n \text{ четное},\end{cases}$$

не имеет предела.

1.6.11. Доказать, что при любом как угодно большом $a>0$ $\lim x_n=0$, если $x_n=a^n/n!$

Решение. Пусть натуральное число $k>2a$. Тогда при $n>k$

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{n}=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}\right)<a^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=$$
$$=(2a)^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim(1/2)^n=0$ (доказать!), то при достаточно большом n имеем: $(1/2)^n<\varepsilon/(2a)^k$ и, следовательно, $a^n/n!<\varepsilon$, а это значит, что $\lim(a^n/n!)=0$.

1.6.12. Какие из последовательностей имеют предел и какие его не имеют:

а) $x_n = 1/(2\pi)$; б) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{для четного } n, \\ 1/n & \text{для нечетного } n; \end{cases}$

в) $x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$; г) $x_n = n\left[1-(-1)^n\right]$.

1.6.13. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n = 1/n^k \qquad (k > 0)$$

есть бесконечно малая последовательность.

Решение. Доказать, что последовательность x_n бесконечно малая — это значит доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n| = 1/n^k$, то необходимо решить неравенство

$$1/n^k < \varepsilon,$$

откуда $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть $\sqrt[k]{1/\varepsilon}$, т. е. $N = E\left(\sqrt[k]{1/\varepsilon}\right)$.

1.6.14. Доказать, что последовательности с общими членами

а) $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$, б) $x_n = \frac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$

— бесконечно малые при $n \to \infty$.

1.6.15. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n 2/(5\sqrt[3]{n}+1)$ — бесконечно малая при $n \to \infty$. Найти какой-нибудь номер N, начиная с которого точки x_n принадлежат интервалу $(-1/10,\ 1/10)$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Оценим $|x_n|$:

$$|x_n| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1} < \frac{2}{5\sqrt[3]{n}} < \frac{2}{2\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Поэтому $|x_n| < \varepsilon$, как только $n > 1/\varepsilon^3$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т. е. последовательность бесконечно малая.

Теперь возьмем $\varepsilon = 1/10$. Так как $|x_n| < 1/\sqrt[3]{n}$, то заведомо $|x_n| < 1/10$, если $1/\sqrt[3]{n} < 1/10$ или $n > 1000$. Поэтому в качестве N можно взять 1000. Однако можно получить более точный результат, решив неравенство

$$|x_n| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1} < \frac{1}{10}.$$

Оно справедливо при $n > (19/5)^3 = 3{,}8^3 = 54{,}872$. Значит, в качестве N можно взять значительно меньшее число 54.

1.6.16. Известно, что если $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Пользуясь этим, найти пределы:

а) $x_n = \dfrac{3^{n+1} + \sin(n\pi/4)}{3^n}$; б) $x_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^n}$.

Решение. а) $x_n = \dfrac{3^{n+1} + \sin(n\pi/4)}{3^n} = 3 + \alpha_n$, где $\alpha_n = \dfrac{\sin(n\pi/4)}{3^n}$ — бесконечно малая при $n \to \infty$, а значит, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$.

1.6.17. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. Докажем, что переменную $\sqrt[n]{n}$ можно представить в виде суммы $1 + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая величина при $n \to \infty$.

Положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. Возводя в n-ю степень, получим

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n.$$

Из последнего равенства заключаем, что для любого $n > 1$ справедливо неравенство

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2$$

(так как все члены справа неотрицательны). Перенося влево единицу и сокращая на $n - 1$, получим

$$1 > \frac{n}{2}\alpha_n^2.$$

Отсюда следует, что $2/n > \alpha_n^2$ или $\sqrt{2/n} > \alpha_n > 0$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2/n} = 0$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, т. е. α_n — бесконечно малая величина. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

1.6.18. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n = 3^{\sqrt[3]{n}}$$

есть бесконечно большая при $n \to \infty$.

Решение. Возьмем произвольное положительное число M и решим неравенство

$$3^{\sqrt[3]{n}} > M.$$

Прологарифмировав, получим

$$\sqrt[3]{n} > \log_3 M, \qquad n > (\log_3 M)^3.$$

Если теперь взять $N = E(\log_3 M)^3$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n| > M$, а это значит, что последовательность бесконечно большая.

1.6.19. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0).$$

§ 1.7. Вычисление пределов последовательностей

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то:

1) $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$;
2) $\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n$;
3) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} \qquad (\lim y_n \neq 0)$.

Если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.

1.7.1. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если

а) $x_n = \dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$; б) $x_n = \dfrac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$;

в) $x_n = \dfrac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$; г) $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$;

д) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. а) $x_n = \dfrac{3+5/n+4/n^2}{2/n^2+1}$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} (3+5/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n \to \infty} (2/n^2+1)} = 3.$$

г) Вспомним, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

Поэтому

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2+3/n+1/n^2}{30+6/n^2+6/n^3},$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1/15.$$

1.7.2. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если:

а) $x_n = \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$; б) $x_n = \left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^4$;

в) $x_n = \sqrt[n]{5n}$; г) $x_n = \sqrt[n]{n^8}$;

д) $x_n = \sqrt[n]{n^5}$; е) $x_n = \sqrt[n]{6n+3}$.