Прологарифмировав, получим

$$\sqrt[3]{n} > \log_3 M, \qquad n > (\log_3 M)^3.$$

Если теперь взять $N = E(\log_3 M)^3$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n| > M$, а это значит, что последовательность бесконечно большая.

1.6.19. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0).$$

§ 1.7. Вычисление пределов последовательностей

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то:

1) $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$;
2) $\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n$;
3) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} \qquad (\lim y_n \neq 0)$.

Если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.

1.7.1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

а) $x_n = \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$; б) $x_n = \frac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$;

в) $x_n = \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$; г) $x_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$;

д) $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. а) $x_n = \frac{3+5/n+4/n^2}{2/n^2+1}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+5/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2/n^2+1)} = 3.$$

г) Вспомним, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

Поэтому

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2+3/n+1/n^2}{30+6/n^2+6/n^3},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1/15.$$

1.7.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = \left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$; б) $x_n = \left(\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^4$;

в) $x_n = \sqrt[n]{5n}$; г) $x_n = \sqrt[n]{n^8}$;

д) $x_n = \sqrt[n]{n^5}$; е) $x_n = \sqrt[n]{6n+3}$.

Решение. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n-2/n^2}{4+2/n+7/n^2}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}.$$

в) При решении этого примера, а также всех остальных примеров задачи **1.7.2** надо иметь в виду следующие равенства (см. задачи **1.6.17, 1.6.19**):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1. \tag{1}$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n},$$

но из (1) следует, что $\lim\sqrt[n]{5}=1$ и $\lim\sqrt[n]{n}=1$, поэтому $\lim x_n=1\cdot 1=1$.

1.7.3. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}+\frac{1-5n^2}{5n+1}\right).$$

Решение. Сложив дроби, получим

$$x_n=\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3}=\frac{1}{5}.$$

Замечание. Если положить

$$y_n=\frac{2n^3}{2n^2+3};\quad z_n=\frac{1-5n^2}{5n+1},$$

то предел их суммы $\lim(y_n+z_n)=1/5$, хотя каждое слагаемое в отдельности — бесконечно большая величина. Таким образом, из существования предела суммы последовательностей не следует, вообще говоря, существование пределов слагаемых.

1.7.4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если:

а) $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$; б) $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$;

в) $x_n=n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$; г) $x_n=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n$;

д) $x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$; е) $x_n=\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}$;

ж) $x_n=\frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}$;

з) $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. а) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{2+3/n} - \sqrt{1-1/n}\right) \to +\infty$ при $n \to \infty$, так как второй множитель имеет положительный предел.

$$\text{в) } x_n = \frac{n^2\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)}{1} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= -n \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}} \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

$$\text{г) } x_n = \frac{n^2}{(n^2-n^3)^{2/3} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} =$$

$$= \frac{1}{(1/n-1)^{2/3} - (1/n-1)^{1/3} + 1}.$$

Значит, $x_n \to 1/3$.

д) Вынося старшие степени числителя и знаменателя за скобки, имеем

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}} = \frac{n\left(\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}\right)}{n^{3/4}\left(\sqrt[4]{1+1/n^2}-\sqrt[4]{1/n}\right)} =$$

$$= n^{1/4}\,\frac{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}}{\sqrt[4]{1+1/n^2}-\sqrt[4]{1/n}} \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

1.7.5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$;

в) $x_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n$; г) $x_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}$;

д) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1} - \dfrac{n}{1-2n}\,\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$;

е) $x_n = \dfrac{1+1/2+1/4+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/9+\ldots+1/3^n}$.

§ 1.8. Признаки существования предела последовательности

Теорема Больцано—Вейерштрасса. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема о «зажатой» последовательности. *Если* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$.

1.8.1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (2n-1)/(3n+1)$ — возрастающая.

Решение. Надо доказать, что $x_{n+1} > x_n$ для любого n, т. е. надо доказать, что

$$\frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1}.$$