Решение. а) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{2+3/n} - \sqrt{1-1/n}\right) \to +\infty$ при $n \to \infty$, так как второй множитель имеет положительный предел.

$$\text{в) } x_n = \frac{n^2\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)}{1} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= -n \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}} \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

$$\text{г) } x_n = \frac{n^2}{(n^2-n^3)^{2/3} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} =$$

$$= \frac{1}{(1/n-1)^{2/3} - (1/n-1)^{1/3} + 1}.$$

Значит, $x_n \to 1/3$.

д) Вынося старшие степени числителя и знаменателя за скобки, имеем

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}} = \frac{n\left(\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}\right)}{n^{3/4}\left(\sqrt[4]{1+1/n^2}-\sqrt[4]{1/n}\right)} =$$

$$= n^{1/4}\frac{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}}{\sqrt[4]{1+1/n^2}-\sqrt[4]{1/n}} \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

1.7.5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$;

в) $x_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n$; г) $x_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}$;

д) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1} - \dfrac{n}{1-2n}\,\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$;

е) $x_n = \dfrac{1+1/2+1/4+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/9+\ldots+1/3^n}$.

§ 1.8. Признаки существования предела последовательности

Теорема Больцано—Вейерштрасса. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема о «зажатой» последовательности. *Если* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$.

1.8.1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (2n-1)/(3n+1)$ — возрастающая.

Решение. Надо доказать, что $x_{n+1} > x_n$ для любого n, т. е. надо доказать, что

$$\frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1}.$$

Последнее неравенство равносильно очевидному неравенству

$$6n^2+5n+1>6n^2+5n-4.$$

Значит, $x_{n+1}>x_n$, ч.т.д.

1.8.2. Дана последовательность с общим членом

$$x_n=10^n/n!.$$

Доказать, что эта последовательность убывает при $n\geqslant 10$.

Решение.

$$x_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n}{n!}\cdot\frac{10}{n+1}=x_n\frac{10}{n+1}.$$

Так как $10/(n+1)<1$ при $n\geqslant 10$, то с этого номера $x_{n+1}<x_n$, а это значит, что последовательность при $n\geqslant 10$ убывает.

1.8.3. Даны последовательности:

а) $x_n=\dfrac{5n^2}{n^2+3}$; б) $y_n=(-1)^n\dfrac{2n}{n+1}\sin n$;

в) $z_n=n\cos\pi n$.

Указать, какие из этих последовательностей ограничены и какие из них не ограничены.

Решение. а) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как очевидно, что $0<5n^2/(n^2+3)<5$ при всех n.

б) Последовательность $\{y_n\}$ ограничена:

$$|y_n|=|(-1)^n|\cdot\frac{2n}{n+1}|\sin n|<\frac{2n}{n+1}<2.$$

в) Последовательность $\{z_n\}$ не ограничена, так как

$$|z_n|=|n\cos\pi n|=n.$$

1.8.4. Доказать, что последовательность

$$x_1=\frac{x_0}{a+x_0};\ x_2=\frac{x_1}{a+x_1};\ x_3=\frac{x_2}{a+x_2};\ \ldots;\ x_n=\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}};\ \ldots$$

$(a>1,\ x_0>0)$ сходится.

Решение. Докажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Во-первых, $x_n<x_{n-1}$, так как

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}<x_{n-1}.$$

Следовательно, данная последовательность убывающая. Во-вторых, все ее члены положительны (по условию $a>0$ и $x_0>0$), поэтому последовательность ограничена снизу. Итак, данная последовательность монотонна и ограничена, значит, имеет предел.

1.8.5. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}$$

$$\left(\text{т. е. } x_1=\frac{1}{5+1};\ x_2=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1};\ x_3=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1};\ \ldots\right)$$

сходится.

Решение. Последовательность x_n возрастает, так как $x_{n+1}=x_n+1/(5^{n+1}+1)$ и, следовательно, $x_{n+1}>x_n$. Кроме того, она ограничена сверху, поскольку $1/(5^n+1)<1/5^n$ при любом n и

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}<$$
$$<\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}=\frac{1/5-1/5^{n+1}}{1-1/5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)<\frac{1}{4}.$$

Следовательно, предел последовательности существует.

1.8.6. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

а) $x_n=\frac{n^2-1}{n^2}$; б) $x_n=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

1.8.7. Доказать, что следующие последовательности сходятся, и найти их пределы:

а) $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};\ \ldots;\ x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{радикалов}};\ \ldots;$$

б) $x_n=\frac{2^n}{(n+2)!}$; в) $x_n=\frac{E(ny)}{n}$;

г) последовательность десятичных приближений по недостатку 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... иррационального числа $\sqrt{2}$;

д) $x_n=n!/n^n$.

Решение. а) Очевидно, что $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$, т. е. наша последовательность *возрастающая*. Остается доказать, что эта последовательность ограничена.

Имеем $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, $n=2, 3, \ldots$ Так как $x_1=\sqrt{2}<2$, то $x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$, $x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2$, ... Пусть доказано, что $x_{n-1}<2$. Тогда $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$. Таким образом, с помощью математической индукции мы доказали, что $x_n<2$, т. е. последовательность *ограничена*. Следовательно, она имеет конечный предел. Найдем его. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} x_n=y.$$

Далее, $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$; возводя в квадрат, получим

$$x_n^2=2+x_{n-1}.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2=\lim_{n\to\infty}(2+x_{n-1}),\quad \text{или}\quad y^2=2+y.$$

Корни полученного квадратного уравнения таковы:

$$y_1=2; \qquad y_2=-1.$$

Отрицательный корень посторонний, так как $x_n>0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y_1=2$.

в) Имеем $ny-1<E(ny)\leqslant ny$ или $y-1/n<\frac{E(ny)}{n}\leqslant y$. Но последовательности $\{y-1/n\}$ и $\{y\}$ сходятся к пределу y, поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$.

г) Эта последовательность неубывающая, так как каждый последующий ее член x_{n+1} получается из предыдущего приписыванием в десятичной записи x_n на конце еще одного десятичного знака. Последовательность ограничена сверху — например, числом 1,5. Значит, последовательность сходится. Ее предел есть $\sqrt{2}$.

д) Последовательность монотонно убывает. Действительно,

$$x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}x_n.$$

Так как $n^n/(n+1)^n<1$, то $x_{n+1}<x_n$.

Далее, так как $x_n>0$, то последовательность ограничена снизу, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. Обозначим его через l. Очевидно, что $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geqslant 0$. Покажем, что $l=0$. Действительно,

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 1+n\frac{1}{n}=2.$$

Следовательно, $\frac{n^n}{(n+1)^n}<\frac{1}{2}$ и $x_{n+1}<\frac{1}{2}x_n$. Переходя к пределу, получим

$$l\leqslant\frac{1}{2}l,$$

что вместе с $l\geqslant 0$ приводит к выводу:

$$l=0.$$

1.8.8. Найти пределы последовательностей с общими членами:

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad z_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. В самом деле,

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}-1\right|=\left|\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right|=$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}\,(n+\sqrt{n^2+n})}<\frac{1}{2n}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 1.$$

Далее,

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n.$$

С другой стороны,

$$y_n > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n.$$

Таким образом,

$$x_n < y_n < z_n, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = 1$$

и по теореме о «зажатой» последовательности

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 1.$$

1.8.9. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0),$$

с помощью теоремы о «зажатой» последовательности.

1.8.10. Доказать существование предела последовательности $y_n = a^{1/2^n}$ $(a > 1)$ и вычислить его.

1.8.11. Пользуясь теоремой о пределе монотонной последовательности, доказать существование конечного предела у последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

1.8.12. Пользуясь теоремой о пределе «зажатой» последовательности, доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1, \text{ если } x_n = 2n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

1.8.13. Доказать, что последовательность

$$x_1 = \sqrt{a}; \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}};$$

$$x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}; \ \ldots; \ x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ радикалов}} \qquad (a > 0)$$

имеет своим пределом число $b = \left(\sqrt{4a+1} + 1\right)/2$.

1.8.14. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$$

имеет конечный предел.

1.8.15. Доказать, что последовательность длин периметров правильных вписанных в окружность 2^n-угольников стремится к пределу (называемому длиной окружности).

§ 1.9. Предел функции

Точка a действительной оси называется *предельной точкой* множества X, если во всякой окрестности точки a содержатся точки из X, отличные от a (a может быть как собственной, так и несобственной точкой).

Пусть точка a является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для всякой окрестности V числа A существует такая окрестность u числа a, что для всех $x \in X$, лежащих в u, $f(x) \in V$ (определение предела функции по Коши). Число A может быть как конечным, так и бесконечным. В частности, если числа A и a конечны, получаем следующее определение.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ («ε—δ-определение»).

Если $a = +\infty$, то получаем следующее определение.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M(\varepsilon)$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ («}\varepsilon\text{—}M\text{-определение»).}$$

Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ означает, что $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$. Остальные случаи разбираются аналогично.

Определение предела функции по Гейне. Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что для любой сходящейся к числу a последовательности значений x

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(входящих в область определения функции и отличных от a), соответствующая последовательность значений y

$$y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \ \ldots; \quad y_n = f(x_n), \ \ldots$$

имеет пределом число A.

1.9.1. Пользуясь определением предела по Гейне (т. е. на языке последовательностей) и теоремами о пределах последовательностей, доказать, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x + 1}{5x + 4} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим любую последовательность $x_1, x_2, \ldots$ значений x, удовлетворяющую двум условиям: 1) числа $x_1, x_2, \ldots$ принадлежат области существования функции $f(x) = (3x + 1)/(5x + 4)$ (т. е. $x_n \neq -4/5$); 2) последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу 2, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.