1.8.15. Доказать, что последовательность длин периметров правильных вписанных в окружность 2^n-угольников стремится к пределу (называемому длиной окружности).

§ 1.9. Предел функции

Точка a действительной оси называется *предельной точкой* множества X, если во всякой окрестности точки a содержатся точки из X, отличные от a (a может быть как собственной, так и несобственной точкой).

Пусть точка a является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для всякой окрестности V числа A существует такая окрестность u числа a, что для всех $x \in X$, лежащих в u, $f(x) \in V$ (определение предела функции по Коши). Число A может быть как конечным, так и бесконечным. В частности, если числа A и a конечны, получаем следующее определение.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ («$\varepsilon - \delta$-определение»).

Если $a = +\infty$, то получаем следующее определение.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M(\varepsilon)$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ («}\varepsilon - M\text{-определение»).}$$

Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ означает, что $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$. Остальные случаи разбираются аналогично.

Определение предела функции по Гейне. Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что для любой сходящейся к числу a последовательности значений x

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(входящих в область определения функции и отличных от a), соответствующая последовательность значений y

$$y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \ \ldots; \quad y_n = f(x_n), \ \ldots$$

имеет пределом число A.

1.9.1. Пользуясь определением предела по Гейне (т. е. на языке последовательностей) и теоремами о пределах последовательностей, доказать, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим любую последовательность $x_1, x_2, \ldots$ значений x, удовлетворяющую двум условиям: 1) числа $x_1, x_2, \ldots$ принадлежат области существования функции $f(x) = (3x+1)/(5x+4)$ (т. е. $x_n \neq -4/5$); 2) последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу 2, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Этой последовательности $\{x_n\}$ соответствует последовательность значений функции

$$\frac{3x_1+1}{5x_1+4}; \quad \frac{3x_2+1}{5x_2+4}; \ \ldots;$$

причем на основании теорем о пределах (§ 1.7)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{3x_n+1}{5x_n+4}=\frac{\lim(3x_n+1)}{\lim(5x_n+4)}=\frac{6+1}{10+4}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, независимо от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к числу 2 ($x_n \neq -4/5$), соответствующие последовательности значений функции $f(x_n)$ сходятся к числу $1/2$. А это на основании определения предела функции значит, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Определением предела по Гейне удобно пользоваться тогда, когда доказывается, что функция $f(x)$ *не имеет предела*. Для этого достаточно показать, что существуют две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$, но соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ не имеют одинаковых пределов.

1.9.2. Доказать, что следующие пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

Решение. а) Выберем две последовательности

$$x_n = 1+\frac{1}{n\pi} \quad \text{и} \quad x'_n = 1+\frac{2}{(4n+1)\pi} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

для которых

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 1.$$

Соответствующие последовательности значений функции таковы:

$$f(x_n)=\sin\frac{1}{1+1/(n\pi)-1}=\sin n\pi = 0$$

и

$$f(x'_n)=\sin\frac{1}{1+2/[(4n+1)\pi]-1}=\sin\frac{4n+1}{2}\pi=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_n\to 1} f(x_n)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x'_n\to 1} f(x'_n)=1,$$

т. е. последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ имеют различные пределы. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ не существует.

в) Выберем две последовательности, $x_n=\pi n$ и $x'_n=2\pi n+\pi/2$ $(n=1, 2, \ldots)$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0,$$

а

$$\lim_{n\to\infty} \sin x'_n = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n+\pi/2) = 1,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует.

Замечание. Приведенные примеры показывают, что вывод о наличии предела функции нельзя делать, исходя из последовательности значений x *частного вида* (например, исходя из $x_n=1+2/((4n+1)\pi)$ в пункте а) последней задачи), а нужно рассматривать произвольную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, имеющую заданный предел.

1.9.3. Исходя из определения предела функции по Коши (т. е. пользуясь определением на языке «$\varepsilon-\delta$»; «$\varepsilon-M$» и др.), доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)=-5$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{3x+9}=\dfrac{5}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$ $(a>1)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x=\pi/2$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\sin x=1/2$.

Решение. а) Согласно «$\varepsilon-\delta$»-определению нам надо доказать, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенства $|x-1|<\delta$ следует $|f(x)-(-5)|=|f(x)+5|<\varepsilon$.

Другими словами, необходимо решить неравенство

$$|3x-8+5|=3|x-1|<\varepsilon.$$

Последнее неравенство показывает, что как только $|x-1|<\varepsilon/3=\delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)+5|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)=-5$.

б) Согласно «$\varepsilon-M$»-определению предела надо показать, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти число $M>0$ такое, что для всех $x>M$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Преобразуя это неравенство, получим

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|=\frac{14}{|3x+9|}<\varepsilon.$$

Так как $x>0$, то остается решить неравенство

$$\frac{14}{3x+9}<\varepsilon,$$

откуда

$$x > \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon};$$

таким образом, $M=(14-9\varepsilon)/3\varepsilon$.

Итак, для $\varepsilon > 0$ мы нашли $M=(14-9\varepsilon)/3\varepsilon$ такое, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство (*). Это и означает, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}.$$

Пусть, например, $\varepsilon=0{,}01$; тогда $M=\frac{14-0{,}09}{0{,}03}=463\frac{2}{3}$.

в) Нужно доказать, что для всякого $K > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$|x-1| < \delta$$

всегда следует неравенство

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| = \frac{1}{(1-x)^2} > K.$$

Выберем произвольное число $K > 0$ и решим неравенство

$$\frac{1}{(1-x)^2} > K. \qquad (**)$$

Отсюда

$$|1-x| < 1/\sqrt{K} \qquad (K>0).$$

Таким образом, если положить $\delta = 1/\sqrt{K}$, то как только $|x-1| < \delta$, будет справедливо неравенство (**). А это означает, что $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

г) Надо доказать, что для всякого $K > 0$ существует такое $M > 0$, что из неравенства $x > M$ всегда следует неравенство $\log_a x > K$. Выберем произвольное число $K > 0$ и рассмотрим неравенство $\log_a x > K$. Если положить $a^K = M$, то при $x > M$ справедливо неравенство $\log_a x > K$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

1.9.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ не существует.

1.9.5. Используя последовательности корней уравнений $\sin(1/x)=1$ и $\sin(1/x)=-1$, показать, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ не имеет предела при $x\to 0$.

1.9.6. Исходя из определения предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\sin x = 0$; г) $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$;

д) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{2}{3}$;

е) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$;

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

§ 1.10. Техника вычисления пределов

I. Если существуют $\lim\limits_{x \to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} v(x)$, то существуют пределы:

1) $\lim\limits_{x \to a} [u(x) \pm v(x)] = \lim\limits_{x \to a} u(x) \pm \lim\limits_{x \to a} v(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} [u(x) \cdot v(x)] = \lim\limits_{x \to a} u(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} v(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} u(x)}{\lim\limits_{x \to a} v(x)} \qquad (\lim\limits_{x \to a} v(x) \neq 0)$.

II. Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a).$$

III. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a (кроме, быть может, $x=a$) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны и одна из них имеет предел при $x \to a$, то и вторая имеет тот же предел.

IV. Частое применение находят следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} (1+1/x)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ldots$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a > 0;\ a \neq 1)$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0)$.

1.10.1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; г) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^p-1}{x^q-1}$ (p и q — целые числа);

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$; е) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$; з) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\log_a \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right]$;