д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{2}{3}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a>1)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

§ 1.10. Техника вычисления пределов

I. Если существуют $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)$, то существуют пределы:

1) $\lim\limits_{x\to a} [u(x) \pm v(x)] = \lim\limits_{x\to a} u(x) \pm \lim\limits_{x\to a} v(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [u(x)\cdot v(x)] = \lim\limits_{x\to a} u(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} v(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)} \qquad (\lim\limits_{x\to a} v(x) \neq 0)$.

II. Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

III. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a (кроме, быть может, $x=a$) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны и одна из них имеет предел при $x\to a$, то и вторая имеет тот же предел.

IV. Частое применение находят следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+1/x)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ldots$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a>0;\ a\neq 1)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad (a>0)$.

1.10.1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^p-1}{x^q-1}$ (p и q — целые числа);

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$; з) $\lim\limits_{x\to 3} \left[\log_a \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right]$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$;   к) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$.

Решение. а) Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то можно пользоваться теоремой о пределе частного:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x^5+9x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^6+x^3+1)} = \frac{4+9+7}{3+1+1} = 4.$$

б) Непосредственно теорему о пределе частного применять здесь нельзя, так как предел знаменателя при $x\to 2$ равен нулю. Здесь и предел числителя при $x\to 2$ также равен нулю. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для $x\neq 2$ имеем

$$\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}.$$

Таким образом, во всякой области, не содержащей точки $x=2$, функции

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}$$

равны; следовательно, равны и их пределы. Но предел функции $\varphi(x)$ находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11},$$

следовательно, и

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{15}{11}.$$

в) Так же как и в п. б), устраняем неопределенность вида $\frac{0}{0}$ преобразованием:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1.$$

1.10.2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;   г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{2x/(x+3)}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$.

Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$; произведем вычитание дробей

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+4/x}{9+6/x-12/x^2-8/x^3}=\frac{2}{9}.$$

Замечание. Мы видим, что в подобных примерах предел равен отношению коэффициентов при старшей степени x (если только степени многочленов одинаковы).

б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$$

в) В подобных примерах полезно иметь в виду, что функция $f(x)=\sqrt[m]{p_n(x)}$, где $p_n(x)$ — многочлен степени n, стремится к бесконечности так же, как и функция $\sqrt[m]{x^n}$. Это позволяет выделить высшую степень x, входящую в данное выражение, и разделить числитель и знаменатель на эту степень x. В данном примере надо делить на $\sqrt{x}$; тогда получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3/\sqrt[6]{x}+5/\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt{3-2/x}+\sqrt[6]{4/x-12/x^2+9/x^3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

г) Так как сумма двух положительных бесконечно больших есть также бесконечно большая, то

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{2x^2-3}+(-5x)]=+\infty.$$

е) При $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

При $x<0$ имеем $\sqrt{x^2}=-x$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Замечание. Отсюда, между прочим, следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ не существует.

ж) $$\lim_{x\to\infty}5^{2x/(x+3)}=5^{\lim\limits_{x\to\infty}2x/(x+3)}=5^2=25.$$

1.10.3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$ (k — целое положительное число);

д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Решение *(метод подстановки)*. а) Положим $26+x=z^3$. Тогда $x=z^3-26$ и $z\to 3$ при $x\to 1$; отсюда

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim_{z\to 3}\frac{2z^3-54}{z-3}=\lim_{z\to 3}\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}=$$
$$=\lim_{z\to 3}2(z^2+3z+9)=54.$$

г) Положим $1+x=z^k$; тогда $x=z^k-1$ и $z\to 1$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^k-1}=\frac{1}{k}\ (\text{см. } \mathbf{1.10.1.}\ \text{г}).$$

д) Положим $x-\pi/6=z$; отсюда $x=z+\pi/6$ и $z\to 0$ при $x\to\pi/6$. Подставив, получим

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos(z+\pi/6)}=$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin(z/2)\cos(z/2)}{2\sqrt{3}\sin^2(z/2)+2\sin(z/2)\cos(z/2)}=$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos(z/2)}{\sqrt{3}\sin(z/2)+\cos(z/2)}=1.$$

1.10.4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)}{1-x}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$$

в) положим $1-x=z$. Тогда $x=1-z$ и $z\to 0$ при $x\to 1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}z\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z}=\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Более простой метод решения подобных примеров см. в § 1.12.

1.10.5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^{mx}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\operatorname{tg}x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; и) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+1/x)^x]^7=$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x\right]^7=e^7;$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right]=\frac{1}{\ln 3}$.

и) Положим $x/e-1=z$; отсюда $x=e(z+1)$; $z\to 0$ при $x\to e$. Подставив, получим

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln(x/e)}{e(x/e-1)}=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=\frac{1}{e}.$$

1.10.6. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x^2)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+1/x^2)^{x^2}]^{1/x}=e^0=1$.

1.10.7. Найти

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{(2x+1)/(x-1)}$

Решение. а) Обозначим:

$$f(x)=(1+x)/(2+x);$$

$$\varphi(x)=(1-\sqrt{x})/(1-x);$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x}{2+x}=\frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{1}{2}.$$

Но при конечных пределах $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$ имеет место соотношение

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Замечание. Если при решении примеров вида $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ окажется, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то можно рекомендовать следующее преобразование:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\{1+[f(x)-1]\}^{\varphi(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{1/(f(x)-1)}\right\}^{\varphi(x)[f(x)-1]}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]}. \quad (*)$$

1.10.8. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$ $(a\neq k\pi$, где k — целое число).

Решение. а) Обозначим:

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{2x^2+5};\quad \varphi(x)=8x^2+3;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{2x^2+5}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}(8x^2+3)=\infty.$$

Воспользуемся формулой (*):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]};$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1=-\frac{2}{2x^2+5};$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]=-\lim_{x\to\infty}\frac{2(8x^2+3)}{2x^2+5}=-8.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}.$$

1.10.9. Функция $f(x)$ задана с помощью предела

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Исследовать эту функцию и построить ее график.

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $|x|>1$. Так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$, то

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/x^{2n}}{1+1/x^{2n}}=1.$$

2) $|x|<1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$; поэтому $f(x)=-1$.

3) $x=\pm 1$. В этом случае $x^{2n}=1$ при любом n, и поэтому $f(x)=0$.

Таким образом, рассмотренная функция может быть записана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|>1,\\ -1, & \text{если } |x|<1,\\ 0, & \text{если } x=\pm 1,\end{cases}$$

или, короче, $f(x)=\operatorname{sign}(|x|-1)$ (см. (**1.5.11.** о)).

График этой функции представлен на рис. 27.

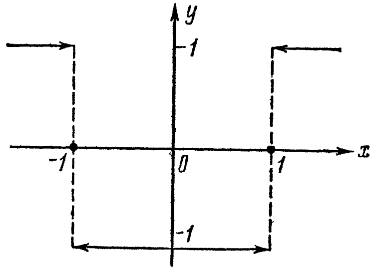

Рис. 27.

1.10.10. Население страны возрастает на 2% в год. Во сколько раз оно увеличится за 100 лет?

Решение. Если через A обозначить первоначальное число жителей в данной стране, то через год количество жителей будет равно

$$A+(A/100)\cdot 2=(1+1/50)A.$$

Через два года количество жителей будет равно $A(1+1/50)^2$. Через 100 лет оно будет равно $A(1+1/50)^{100}$, т. е. увеличится в $[(1+1/50)^{50}]^2$ раз. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$, мы можем приближенно считать, что $(1+1/50)^{50}\approx e$.

Следовательно, население страны за 100 лет увеличится примерно в $e^2\approx 7{,}39$ раза.

Конечно, эта оценка является весьма приближенной, но она дает представление о порядке величины роста населения (с точностью до 0,001 величина $(1+1/50)^{100}=7{,}245$).

1.10.11. Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+4\operatorname{tg} x}{2-x-2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$.

1.10.12. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\frac{\sin\alpha}{1-\alpha^2/\pi^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}(\pi/4-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos(x+\pi/6)}$.

1.10.13. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+4/x)^{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{(6x+1)/(3x+2)}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+3x}{2+3x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

1.10.14. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$.

§ 1.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение их

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x\to\infty$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$. Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x\to\infty$. Величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами.

1) Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ также являются бесконечно малыми при $x\to a$.

2) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.