д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$.

1.10.12. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\alpha^2/\pi^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}(\pi/4-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos(x+\pi/6)}$.

1.10.13. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+4/x)^{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{(6x+1)/(3x+2)}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

1.10.14. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$.

§ 1.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение их

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x\to\infty$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$. Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x\to\infty$. Величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами.

1) Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ также являются бесконечно малыми при $x\to a$.

2) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

Сравнение бесконечно малых. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$. Если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c,$$

где c — некоторое конечное число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка*. Если $c = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*; запись: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Если $c = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$, что записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, а $\beta(x)$ — бесконечно малой *низшего порядка* по отношению к $\alpha(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = c$, где $0 < |c| < +\infty$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой *n-го порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$. Аналогично вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

1.11.1. Доказать, что функции:

а) $f(x) = (2x-4)/(x^2+5)$ при $x \to 2$,

б) $f(x) = (x-1)^2 \sin^3 \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$ являются бесконечно малыми.

Решение. а) Достаточно вычислить предел

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x^2+5} = 0.$$

б) Во-первых, функция $\varphi(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$; действительно, $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$. Во-вторых, функция

$$\psi(x) = \sin^3 \frac{1}{x-1}; \qquad x \neq 1,$$

ограничена:

$$\left| \sin^3 \frac{1}{x-1} \right| \leqslant 1.$$

Следовательно, заданная функция $f(x)$ представляет собой произведение ограниченной функции $\psi(x)$ на бесконечно малую $\varphi(x)$. Значит, $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to 1$.

1.11.2. Доказать, что функции

а) $f(x) = \dfrac{3x-12}{2x^2+7}$ при $x \to 4$;

б) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to \infty$

являются бесконечно малыми.

1.11.3. Найти

$$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x).$$

Решение. Так как x — бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $\sin(1/x)$ ограничена, то произведение $x \sin(1/x)$ есть бесконечно малая, а это значит, что $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

1.11.4. Сравнить с бесконечно малой $\varphi(x)=x$ следующие бесконечно малые при $x \longrightarrow 0$ функции:

а) $f_1(x)=\operatorname{tg} x^3$; б) $f_2(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}$; в) $f_3(x)=\sqrt{9+x}-3$.

Решение. а) Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg} x^3}{x^3} x^2\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{x^3} \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x^3$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с x.

б) Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right] = \infty.$$

Значит, $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ есть бесконечно малая низшего порядка по сравнению с x.

в) Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, бесконечно малые $\sqrt{9+x}-3$ и x одного порядка малости.

1.11.5. Определить порядок малости величины β относительно бесконечно малой величины α.

а) $\beta=\cos\alpha-\cos 2\alpha$; б) $\beta=\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$.

Решение. а) $\beta=\cos\alpha-\cos 2\alpha=2\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\sin(3\alpha/2)\sin(\alpha/2)}{\alpha^2} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, β бесконечно малая того же порядка, что и α^2, т. е. второго порядка относительно α.

1.11.6. Считая $x \longrightarrow \infty$, сравнить следующие бесконечно большие величины:

а) $f(x)=3x^2+2x+5$ и $\varphi(x)=2x^3+2x-1$;

б) $f(x)=2x^2+3x$ и $\varphi(x)=(x+2)^2$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x+a}$ и $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$.

Решение. а) Бесконечно большая $3x^2+2x+5$ имеет низший порядок по сравнению с бесконечно большой $2x^3+2x-1$, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x+5}{2x^3+2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3/x+2/x^2+5/x^3}{2+2/x^2-1/x^3} = 0.$$

1.11.7. Доказать, что бесконечно малые $\alpha=x$ и $\beta=x\cos(1/x)$ (при $x \longrightarrow 0$) несравнимы между собой, т. е. что предел их отношения не существует.

Решение. В самом деле, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos(1/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)$ не существует (докажите!). Значит, эти бесконечно малые функции несравнимы.

1.11.8. Если $x \to 0$, то какие из нижеследующих бесконечно малых имеют порядок выше, чем x; ниже, чем x; тот же, что x?

а) $100x$; б) x^2; в) $6\sin x$; г) $\sin^3 x$; д) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^3 x}$.

1.11.9. Пусть $x \to 0$. Определить порядки следующих бесконечно малых функций относительно x:

а) $2\sin^4 x - x^5$; б) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$;
в) $\sqrt{1+x^3} - 1$; г) $\sin 2x - 2\sin x$;
д) $1 - 2\cos(x + \pi/3)$; е) $2\sqrt{\sin x}$;
ж) $x/(x-1)$; з) $\operatorname{tg} x + x^2$;
и) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$; к) $e^x - \cos x$.

1.11.10. Принимая сторону куба за бесконечно малую, определить порядок малости диагонали куба (d); площади поверхности куба (S), объема куба (V).

§ 1.12. Эквивалентные бесконечно малые. Применение к отысканию пределов

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$ и если $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, то

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$ (принцип замены эквивалентных).

Если

$$\lim_{x \to a} f(x) = k, \qquad 0 < |k| < \infty,$$

то

$$f(x)\,\alpha(x) \sim k\alpha(x).$$

Если

$$\alpha(x) \sim \gamma(x),$$
$$\beta(x) \sim \gamma(x),$$

то

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

($\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$)

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3) $1 - \cos\alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2/2$;
4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$; 6) $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$ $(a > 0)$, в частности, $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
8) $[1+\alpha(x)]^p - 1 \sim p\alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$.