Решение. В самом деле, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos (1/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos (1/x)$ не существует (докажите!). Значит, эти бесконечно малые функции несравнимы.

1.11.8. Если $x \to 0$, то какие из нижеследующих бесконечно малых имеют порядок выше, чем x; ниже, чем x; тот же, что x?

а) $100x$; б) x^2; в) $6 \sin x$; г) $\sin^3 x$; д) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^3 x}$.

1.11.9. Пусть $x \to 0$. Определить порядки следующих бесконечно малых функций относительно x:

а) $2 \sin^4 x - x^5$; б) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$;
в) $\sqrt{1 + x^3} - 1$; г) $\sin 2x - 2 \sin x$;
д) $1 - 2 \cos (x + \pi/3)$; е) $2 \sqrt{\sin x}$;
ж) $x/(x - 1)$; з) $\operatorname{tg} x + x^2$;
и) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$; к) $e^x - \cos x$.

1.11.10. Принимая сторону куба за бесконечно малую, определить порядок малости диагонали куба (d); площади поверхности куба (S), объема куба (V).

§ 1.12. Эквивалентные бесконечно малые. Применение к отысканию пределов

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$ и если $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$$ (принцип замены эквивалентных).

Если

$$\lim_{x \to a} f(x) = k, \qquad 0 < |k| < \infty,$$

то

$$f(x)\,\alpha(x) \sim k\alpha(x).$$

Если

$$\alpha(x) \sim \gamma(x),$$
$$\beta(x) \sim \gamma(x),$$

то

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

($\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$)

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3) $1 - \cos \alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2/2$;
4) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 6) $\ln [1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ $(a > 0)$, в частности, $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
8) $[1 + \alpha(x)]^p - 1 \sim p\alpha(x)$, в частности, $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$.

1.12.1. Доказать, что при $x \to 0$

а) $1-\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{2}x$; б) $1-\frac{1}{1+x} \sim x$;

в) $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

Решение. а) По формуле 8) при $P=1/2$ имеем

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}(\sqrt{1+x}-1) \sim 1\cdot\frac{1}{2}x.$$

в) По формуле 1) имеем

$$\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x\sqrt{x}}=x^{3/4},$$

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}=x^{3/4}\sqrt{1+x^{1/2}} \sim x^{3/4},$$

откуда $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

1.12.2. Заменить каждую из следующих бесконечно малых эквивалентной:

а) $3\sin\alpha-5\alpha^3$; б) $(1-\cos\alpha)^2+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5$.

Решение. а) Заметим, что сумма двух бесконечно малых α и β разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка, так как переход от бесконечно малой к ей эквивалентной равносилен отбрасыванию бесконечно малой высшего порядка.

В нашем примере величина $3\sin\alpha$ имеет порядок малости 1, $(-5\alpha^3)$ — порядок малости 3, значит,

$$3\sin\alpha+(-5\alpha^3) \sim 3\sin\alpha \sim 3\alpha.$$

б) $(1-\cos\alpha)^2+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5=4\sin^4\frac{\alpha}{2}+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5.$

Низший порядок имеет слагаемое $16\alpha^3$, поэтому

$$(1-\cos\alpha)^2+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5 \sim 16\alpha^3.$$

1.12.3. С помощью принципа замены эквивалентных вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-x^2+x^3}{\operatorname{tg} x+2\sin^2 x+5x^4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-\operatorname{tg} x)^2+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\operatorname{tg}^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\operatorname{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}$.

Решение. а) Имеем $\sin 5x \sim 5x$; $\ln(1+4x)\sim 4x$ (см. таблицу эквивалентных бесконечно малых функций на стр. 61). Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2/4}=$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-4\lim\frac{x^2/2}{x^2}=-2.$$

г) Из таблицы эквивалентных бесконечно малых функций устанавливаем:

$$\sqrt{1+x+x^2}-1\sim(x+x^2)/2\sim x/2,\ \sin 4x\sim 4x.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{4x}=\frac{1}{8}.$$

д) Воспользовавшись таблицей эквивалентных бесконечно малых функций на стр. 61, получим

$$\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x\sim\sin 2x\sim 2x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

з) $\sin\sqrt[3]{x}\sim\sqrt[3]{x}$; $\ln(1+3x)\sim 3x$;

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x}\sim\sqrt{x};\quad e^{5\sqrt[3]{x}}-1\sim 5\sqrt[3]{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{5}.$$

1.12.4. Вычислить приближенно значения корней $\sqrt{1,02}$ и $\sqrt{0,994}$. Оценить абсолютную погрешность.

Решение. Пользуемся приближенной формулой

$$\sqrt{1+x}\sim 1+x/2 \tag{*}$$

(для x, достаточно близких к 0). В нашем случае

$$\sqrt{1+0,02}\sim 1+\frac{0,02}{2}=1,01;$$

$$\sqrt{1-0,006}\sim 1-\frac{0,006}{2}=0,997.$$

Для оценки погрешности заметим, что

$$\frac{x}{2}-(\sqrt{1+x}-1)=\frac{1}{2}(x-2\sqrt{1+x}+2)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+1-2\sqrt{x+1}+1)=\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-1)^2\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{8}.$$

Следовательно, абсолютная погрешность приближенной формулы (*) оценивается величиной $x^2/8$.

Пользуясь этой оценкой, находим, что абсолютная погрешность корня $\sqrt{1{,}02}\approx 1{,}01$ составляет $\approx(0{,}02)^2/8=0{,}00005$, абсолютная погрешность $\sqrt{0{,}994}\approx 0{,}997$ составляет $\approx(0{,}006)^2/8\approx 0{,}000005$.

1.12.5. Доказать, что при $x\to 0$:

а) $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x$; б) $\operatorname{arctg} mx\sim mx$; в) $1-\cos^3 x\sim\frac{3}{2}\sin^2 x$.

1.12.6. Определить при $x\to 0$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x$ следующих бесконечно малых:

а) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$; б) $\dfrac{x^2(1+x)}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1.12.7. Определить при $x\to 2$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x-2$ следующих бесконечно малых:

а) $3(x-2)^2+2(x^2-4)$; б) $\sqrt[3]{\sin\pi x}$.

1.12.8. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

1.12.9. Вычислить приближенное значение корня $\sqrt[3]{1042}$.

§ 1.13. Односторонние пределы

Число A называется *пределом справа функции* $f(x)$ при $x\to x_0$, $A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Аналогично определяется предел слева $f(x_0-0)$ при $x\to x_0-0$. Если $x_0=0$, то пишут просто $x\to+0$ или $x\to-0$ и соответственно $f(+0)$ и $f(-0)$.

1.13.1. Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 3x-5, & \text{если } x>1\end{cases}$ при $x\to 1$;