Для оценки погрешности заметим, что

$$\frac{x}{2}-(\sqrt{1+x}-1)=\frac{1}{2}(x-2\sqrt{1+x}+2)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+1-2\sqrt{x+1}+1)=\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-1)^2\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{8}.$$

Следовательно, абсолютная погрешность приближенной формулы (*) оценивается величиной $x^2/8$.

Пользуясь этой оценкой, находим, что абсолютная погрешность корня $\sqrt{1,02}\approx 1,01$ составляет $\approx(0,02)^2/8=0,00005$, абсолютная погрешность $\sqrt{0,994}\approx 0,997$ составляет $\approx(0,006)^2/8\approx 0,000005$.

**1.12.5.** Доказать, что при $x\to 0$:

а) $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x$; б) $\operatorname{arctg} mx\sim mx$; в) $1-\cos^3 x\sim\frac{3}{2}\sin^2 x$.

**1.12.6.** Определить при $x\to 0$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x$ следующих бесконечно малых:

а) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$; б) $\dfrac{x^2(1+x)}{1+\sqrt[3]{x}}$.

**1.12.7.** Определить при $x\to 2$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x-2$ следующих бесконечно малых:

а) $3(x-2)^2+2(x^2-4)$; б) $\sqrt[3]{\sin\pi x}$.

**1.12.8.** Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

**1.12.9.** Вычислить приближенное значение корня $\sqrt[3]{1042}$.

## § 1.13. Односторонние пределы

Число $A$ называется *пределом справа функции* $f(x)$ при $x\to x_0$, $A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Аналогично определяется предел слева $f(x_0-0)$ при $x\to x_0-0$. Если $x_0=0$, то пишут просто $x\to+0$ или $x\to-0$ и соответственно $f(+0)$ и $f(-0)$.

**1.13.1.** Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 3x-5, & \text{если } x>1\end{cases}$ при $x\to 1$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ при $x \to 1$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ при $x \to 0$;

г) $f(x)=3+\dfrac{1}{1+7^{1/(1-x)}}$ при $x \to 1$;

д) $f(x)=\cos(\pi/x)$ при $x \to 0$;

е) $f(x)=5/(x-2)^3$ при $x \to 2$.

Решение. а) Пусть $x \leqslant 1$. Тогда $f(x)=-2x+3$. Следовательно, $f(1-0)=\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)=1$ — предел слева.

Если $x>1$, то $f(x)=3x-5$; следовательно, $f(1+0)=\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)=-2$ — предел справа (рис. 28).

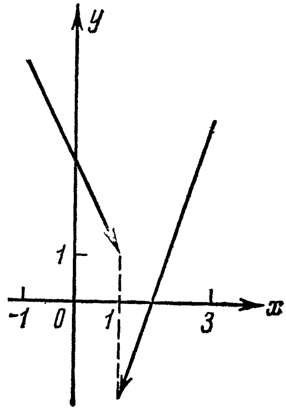

Рис. 28.

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x},$$

но

$$|\sin x|=\begin{cases} \sin x, & \text{если } 0<x<\pi/2, \\ -\sin x, & \text{если } -\pi/2<x<0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(-0)=\lim_{x \to -0} f(x)=\lim_{x \to -0}\left(-\sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x}\right)=-\sqrt{2},$$

$$f(+0)=\lim_{x \to +0} f(x)=\lim_{x \to +0}\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x}\right)=\sqrt{2}.$$

г) Выражение $1/(1-x)$ стремится к $+\infty$, когда $x$ стремится к единице, оставаясь меньше единицы, поэтому

$$\lim_{x \to 1-0} 7^{1/(1-x)}=+\infty, \quad \lim_{x \to 1-0}\frac{1}{1+7^{1/(1-x)}}=0, \quad f(1-0)=3.$$

Далее, при $x \to 1+0$ имеем $1/(1-x) \to -\infty$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 1+0} 7^{1/(1-x)}=0$,

$$f(1+0)=\lim_{x \to 1+0}\left(3+\frac{1}{1+7^{1/(1-x)}}\right)=3+1=4.$$

д) Выберем две последовательности, $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, с общими членами

$$x_n=\frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad x'_n=\frac{2}{2n+1} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

соответственно.

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=\lim\limits_{n \to \infty} x'_n=0$ и

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)=\lim_{n \to \infty}\cos 2\pi n=1;$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n)=\lim_{n \to \infty}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ не имеет предела справа в точке 0; учитывая четность функции $f(x)$, заключаем, что она не имеет также и предела слева (рис. 29).

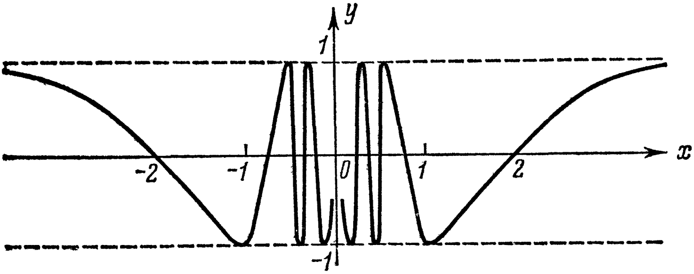


Рис. 29.

**1.13.2.** Доказать, что функция

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 3x+2 & \text{при} \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

при $x \to 1$ имеет предел слева, равный 2, и предел справа, равный 5.

**1.13.3.** Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{1/x}}$ при $x \to 0$;

б) $f(x)=e^{1/x}$ при $x \to 0$;

в) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ при $x \to 0$.

## § 1.14. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $X$ и пусть точка $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$. Последнее условие равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y(x_0)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* $X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Точки разрыва первого рода.** Пусть точка $x_0$ является предельной точкой области определения $X$ функции $f(x)$. Точка $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если пределы справа и слева конечны. Если при этом $f(x_0-0)=f(x_0+0) \neq f(x_0)$, то $x_0$ — *точка устранимого разрыва*; если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то $x_0$ — точка неустранимого разрыва первого рода, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке $x_0$.

**Точки разрыва второго рода.** Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то точка $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$.