Следовательно, функция $f(x)$ не имеет предела справа в точке 0; учитывая четность функции $f(x)$, заключаем, что она не имеет также и предела слева (рис. 29).

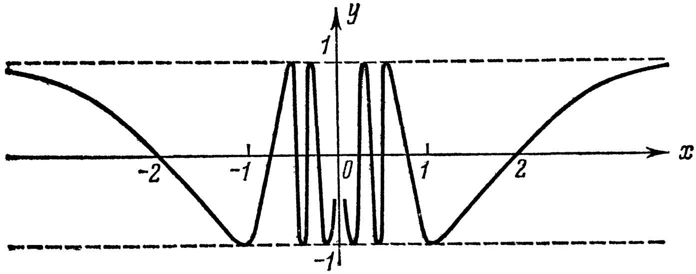

Рис. 29.

1.13.2. Доказать, что функция

а) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad 0\leqslant x<1, \\ 3x+2 & \text{при} \quad 1<x<3 \end{cases}$

при $x \to 1$ имеет предел слева, равный 2, и предел справа, равный 5.

1.13.3. Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{1/x}}$ при $x \to 0$;

б) $f(x)=e^{1/x}$ при $x \to 0$;

в) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ при $x \to 0$.

§ 1.14. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$. Последнее условие равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y(x_0)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Точки разрыва первого рода. Пусть точка x_0 является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если пределы справа и слева конечны. Если при этом $f(x_0-0)=f(x_0+0) \neq f(x_0)$, то x_0 — *точка устранимого разрыва*; если же $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то x_0 — точка неустранимого разрыва первого рода, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

Точки разрыва второго рода. Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$.

1.14.1. Используя лишь определение, доказать непрерывность функции $f(x)=3x^4+5x^3+2x^2+3x+4$ при любом значении x.

Решение. Пусть x_0 — произвольная точка числовой оси. Сначала вычисляем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(3x^4+5x^3+2x^2+3x+4)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

Затем вычисляем значение функции в точке x_0:

$$f(x_0)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0)=f(x_0).$$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 в силу определения непрерывности. Поскольку точка x_0 — произвольная точка числовой оси, доказана непрерывность функции для всех значений x.

1.14.2. Даны функции:

а) $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3) & \text{при} \quad -\infty<x\leqslant 1,\\ 6-5x & \text{при} \quad 1<x<3,\\ x-3 & \text{при} \quad 3\leqslant x<\infty;\end{cases}$$

б) $$f(x)=\begin{cases}-2x^2 & \text{при} \quad x\leqslant 3,\\ 3x & \text{при} \quad x>3;\end{cases}$$

в) $$f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}.$$

Найти точки разрыва, если они существуют. Определить скачки функций в точках, где имеются разрывы первого рода.

Решение. а) Область определения функции — вся числовая ось $(-\infty, \infty)$. На интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны лишь в точках $x=1$, $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x=1$:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{5}(2x^2+3)=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(6-5x)=1.$$

Значение функции в точке $x=1$ определяется первым аналитическим выражением, т. е. $f(1)=(2+3)/5=1$. Так как

$$f(1-0)=f(1+0)=f(1),$$

то в точке $x=1$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x=3$:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(6-5x)=-9;$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(x-3)=0.$$

Мы видим, что правый и левый пределы, хотя и конечны, но не равны между собой, поэтому в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции в точке разрыва $f(3+0)-f(3-0)=0-(-9)=9$.

в) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3/2$. Так как $2x-3>0$ при $x>3/2$ и $2x-3<0$ при $x<3/2$, то

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x>3/2, \\ -1 & \text{при} \quad x<3/2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(3/2+0)=1, \qquad f(3/2-0)=-1.$$

Поэтому в точке $x=3/2$ функция имеет конечный разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке $f(3/2+0)-f(3/2-0)$ равен $1-(-1)=2$.

1.14.3. Исследовать непрерывность функций:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{для} \quad x\neq 0, \\ 1 & \text{для} \quad x=0; \end{cases}$

б) $f(x)=\sin(1/x)$;

в) $f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & \text{для} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x=0; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^x & \text{для} \quad x<0, \\ 2a+x & \text{для} \quad x\geqslant 0; \end{cases}$

д) $f(x)=\operatorname{arctg}(1/x)$; е) $f(x)=(x^3+1)/(x+1)$.

Решение. а) Функция непрерывна во всех точках $x\neq 0$. В точке $x=0$ имеем

$$f(0)=1; \quad \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следовательно, и в этой точке функция также непрерывна. Значит, она непрерывна для всех значений x.

б) Функция определена и непрерывна для всех $x\neq 0$. В точке $x=0$ не существуют односторонние пределы (ср. **1.13.1** д)). Поэтому в точке $x=0$ функция терпит разрыв второго рода (рис. 30).

г) $f(-0)=4$, а $f(+0)=2a$; равенство $f(-0)=f(+0)=f(0)$ будет выполнено, т. е. функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x=0$, если положим $2a=4$, $a=2$.

е) $f(-1-0)=f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$, т. е. оба односторонних предела конечны и совпадают. Однако в точке $x=-1$ функция не определена и потому не является непрерывной. График функции представляет собой параболу $y=x^2-x+1$ с «выколотой» точкой $M(-1, 8)$. Если доопределить функцию, положив $f(-1)=3$, то функция станет непрерывной. Таким образом, при $x=-1$ функция имеет устранимый разрыв.

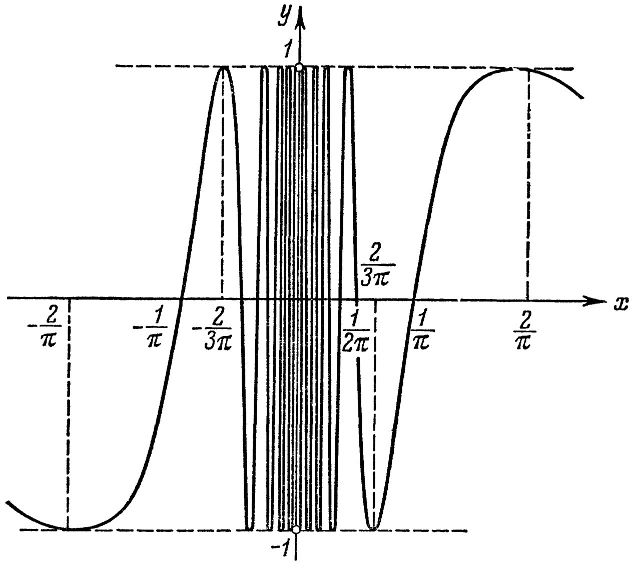

Рис. 30.

1.14.4. Исследовать непрерывность функций:

а) $f(x)=E(x)$. Напомним, что функция $E(x)$ определяется как наибольшее целое число n, содержащееся в числе x, т. е. удовлетворяющее неравенству $n \leqslant x$.

б) $$\lambda(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.} \end{cases}$$

Функция $\lambda(x)$ называется *функцией Дирихле*. Так, например, $\lambda(0)=1$; $\lambda(-1/2)=1$; $\lambda(\sqrt{2})=0$; $\lambda(\pi)=0$ и т. п.

Решение. а) Функция $E(x)$ определена на всей числовой оси и принимает только целочисленные значения. Эта функция разрывна при каждом целочисленном значении n независимого переменного, так как $E(n-0)=n-1$; $E(n+0)=n$ (рис. 31).

б) Выберем произвольную точку x_0 на оси Ox; могут представиться два случая: 1) число x_0 рационально; 2) число x_0 иррационально.

В первом случае $\lambda(x_0)=1$. В любой близости от рациональной точки существуют иррациональные точки, а в них $\lambda(x)=0$. Следовательно, в любой близости от x_0 есть точки x, для которых

$$|\Delta y|=|\lambda(x_0)-\lambda(x)|=1.$$

Во втором случае $\lambda(x_0)=0$. В любой близости от иррациональной точки имеются рациональные точки, а в них $\lambda(x)=1$. Следовательно, опять-таки можно найти значения x, для которых

$$|\Delta y| = |\lambda(x_0) - \lambda(x)| = 1.$$

Таким образом, в обоих случаях разность Δy не стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Поэтому x_0 — точка разрыва, а так как точка x_0 произвольна, то функция Дирихле $\lambda(x)$ разрывна в каждой точке. График функции Дирихле $\lambda(x)$ состоит из множества точек с иррациональными абсциссами на оси Ox и из множества точек с рациональными абсциссами на прямой $y=1$. Его изобразить невозможно.

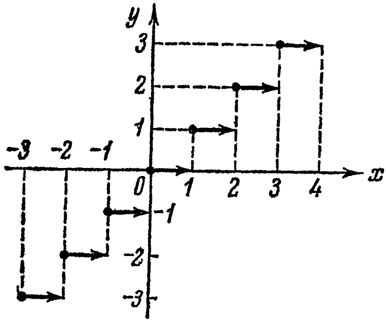

Рис. 31.

1.14.5. Используя определение непрерывности функции на языке «$\varepsilon - \delta$», исследовать на непрерывность следующие функции:

а) $f(x) = ax + b \qquad (a \neq 0)$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ -x^2, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$

Решение.

а) Выберем произвольную точку x_0. Согласно «$\varepsilon - \delta$»-определению нужно показать, что для любого наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Рассмотрим абсолютную величину разности

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax+b) - (ax_0 + b)| = \\ = |ax + b - ax_0 - b| = |a|\,|x - x_0|.$$

Потребуем, чтобы было $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это требование будет выполнено для тех x, для которых имеет место неравенство

$$|a|\,|x - x_0| < \varepsilon \text{ или } |x - x_0| < \varepsilon/|a| \quad (a \neq 0).$$

Следовательно, если взять $\delta \leqslant \varepsilon/|a|$, то при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Непрерывность, таким образом, доказана для любой точки $x = x_0$.

б) Выберем произвольную точку x_0. Если $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, стремящаяся к x_0, то $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = x_0^2$. Если $\{x'_n\}$ — последовательность иррациональных чисел, стремящаяся к x_0, то $\lim\limits_{x'_n \to x_0} f(x'_n) = -x_0^2$. При $x_0 \neq 0$ указанные пределы различны и, следовательно, функция разрывна во всех точках $x \neq 0$.

С другой стороны, пусть теперь $x=0$. Найдем абсолютную величину разности $|f(x)-f(0)|$:

$$|f(x)-f(0)|=|\pm x^2-0|=x^2.$$

Очевидно, что $x^2<\varepsilon$ при $|x|<\sqrt{\varepsilon}$. Если $\varepsilon>0$ задано, то, положив $\delta\leqslant\sqrt{\varepsilon}$ и $|x-0|=|x|<\delta$, получим $|\Delta f(0)|=x^2<\varepsilon$. Следовательно, в точке $x=0$ функция непрерывна. Итак, точка $x=0$ является единственной точкой, в которой функция непрерывна. Заметим, что рассматриваемую функцию $f(x)$ можно выразить через функцию Дирихле (задача **1.14.4** б)): $f(x)=x^2[2\lambda(x)-1]$.

1.14.6. Установить, какого рода разрыв в точке $x=x_0$ имеют функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{для } x<2, \\ x^2-1 & \text{для } x\geqslant 2;\end{cases}$ $x_0=2$;

б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5}$; $x_0=5$; в) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$; $x_0=0$;

г) $f(x)=\operatorname{tg} x$; $x_0=\pi/2$;

д) $f(x)=\sqrt{x}-E(\sqrt{x})$; $x_0=n^2$, где n — натуральное число.

Решение. а) Вычислим односторонние пределы в точке $x_0=2$:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}(x+2)=4;$$
$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}(x^2-1)=3.$$

Здесь пределы справа и слева существуют, конечны, но не совпадают, поэтому функция имеет в точке $x_0=2$ разрыв первого рода.

д) Функция $E(\sqrt{x})$ имеет разрывы первого рода в каждой точке $x=n^2$, где n — натуральное число (см. **1.14.4** а)). Функция же $\sqrt{x}$ непрерывна при всех $x\geqslant 0$. Поэтому функция $f(x)=\sqrt{x}-E(\sqrt{x})$ имеет разрывы первого рода в точках $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$

1.14.7. Исследовать на непрерывность следующие функции:

а) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$;

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{при } x\neq 0, \\ 3 & \text{при } x=0;\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases} e^{1/x} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0;\end{cases}$

г) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x)^{2n}$; д) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$;

е) $f(x)=E(x)+E(-x)$.

1.14.8. Для каждой из следующих функций найти точки разрыва и определить скачки функции в этих точках:

а) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$; б) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$;

в) $f(x)=\frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$; г) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } x\leqslant 1, \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x>1. \end{cases}$

1.14.9. Следующие функции требуется доопределить в точке $x=0$ так, чтобы они стали непрерывными:

а) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $f(x)=\frac{5x^2-3x}{2x}$;

в) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; г) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

§ 1.15. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то функции

$$1)\ f(x)\pm g(x);\quad 2)\ f(x)\cdot g(x);\quad 3)\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

также непрерывны в этой точке.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x=x_0$.

1.15.1. Исследовать на непрерывность следующие функции:

а) $f(x)=\frac{2x^5-8x^2+11}{x^4+4x^3+8x^2+8x+4}$;

б) $f(x)=\frac{3\sin^3 x+\cos^2 x+1}{4\cos x-2}$;

в) $f(x)=\frac{x^3\cos x+x^2\sin x}{\cos(1/\sin x)}$.

Решение. а) Функция, представляющая собой отношение двух непрерывных функций (в нашем случае — двух многочленов), разрывна только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Но в нашем случае

$$x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)^2,$$

и так как $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ при любом x, то знаменатель нигде не обращается в нуль. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

б) Функция $f(x)$ терпит разрывы только в точках, в которых знаменатель равен нулю, т. е. в точках, являющихся корнями уравнения

$$4\cos x-2=0 \quad \text{или} \quad \cos x=1/2,$$

откуда

$$x=x_n=\pm\pi/3+2\pi n \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна везде, кроме точек x_n.