в) $f(x)=\dfrac{2\,|x-1|}{x^2-x^3}$; г) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } x\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{при } x>1. \end{cases}$

1.14.9. Следующие функции требуется доопределить в точке $x=0$ так, чтобы они стали непрерывными:

а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; г) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

§ 1.15. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то функции

$$1)\ f(x)\pm g(x);\quad 2)\ f(x)\cdot g(x);\quad 3)\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

также непрерывны в этой точке.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x=x_0$.

1.15.1. Исследовать на непрерывность следующие функции:

а) $f(x)=\dfrac{2x^5-8x^2+11}{x^4+4x^3+8x^2+8x+4}$;

б) $f(x)=\dfrac{3\sin^3 x+\cos^2 x+1}{4\cos x-2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3\cos x+x^2\sin x}{\cos(1/\sin x)}$.

Решение. а) Функция, представляющая собой отношение двух непрерывных функций (в нашем случае — двух многочленов), разрывна только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Но в нашем случае

$$x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)^2,$$

и так как $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ при любом x, то знаменатель нигде не обращается в нуль. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

б) Функция $f(x)$ терпит разрывы только в точках, в которых знаменатель равен нулю, т. е. в точках, являющихся корнями уравнения

$$4\cos x-2=0 \quad \text{или} \quad \cos x=1/2,$$

откуда

$$x=x_n=\pm\pi/3+2\pi n \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна везде, кроме точек x_n.

в) Как и в примере б), числитель непрерывен на всей числовой оси. Знаменатель же по теореме о непрерывности сложной функции непрерывен в тех точках, где непрерывна функция $u=1/\sin x$, так как функция $\cos u$ непрерывна везде. Значит, знаменатель непрерывен всюду, кроме точек $x=k\pi$ (k — целое). Кроме того, надо исключить точки, в которых $\cos(1/\sin x)=0$, т. е. те точки, в которых $1/\sin x=(2p+1)\pi/2$ (p — целое число), или $\sin x=2/[(2p+1)\pi]$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна всюду, исключая точки $x=k\pi$ и $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{(2p+1)\pi}+n\pi$ (k, p, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1.15.2. Исследовать на непрерывность следующие сложные функции:

а) $y=\cos x^n$, где n — натуральное число;

б) $y=\cos\log x$; в) $y=\sqrt{1/2-\cos^2 x}$.

Решение. а) Имеем сложную функцию $y=\cos u$, где $u=x^n$. Функция $y=\cos u$ непрерывна в любой точке u, а функция $u=x^n$ непрерывна при любом значении x. Поэтому функция $y=\cos x^n$ непрерывна на всей числовой оси.

в) Здесь $y=\sqrt{1/2-u^2}$, где $u=\cos x$. Функция $\sqrt{1/2-u^2}$ определена и непрерывна на отрезке $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, функция $u=\cos x$ непрерывна на всей числовой оси. Поэтому функция $y=\sqrt{1/2-\cos^2 x}$ непрерывна при всех значениях x, для которых

$$|\cos x|\leqslant\sqrt{2}/2, \text{ т. е. } \begin{cases} \pi/4+2\pi n\leqslant x\leqslant 3\pi/4+2\pi n, \\ 5\pi/4+2\pi n\leqslant x\leqslant 7\pi/4+2\pi n. \end{cases}$$

1.15.3. Для следующих функций найти точки разрыва и определить их характер:

а) $y=\frac{1}{u^2+u-2}$, где $u=\frac{1}{x-1}$;

б) $y=u^2$, где $u=\begin{cases} x-1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ x+1 & \text{при } x<0; \end{cases}$

в) $y=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, где $u=\operatorname{tg} x$.

Решение. а) Функция

$$u=\varphi(x)=\frac{1}{x-1}$$

терпит разрыв в точке $x=1$. Функция

$$y=f(u)=\frac{1}{u^2+u-2}$$

терпит разрыв в точках, где $u^2+u-2=0$, т. е. $u_1=-2$ и $u_2=1$. По этим значениям u находим соответствующие значения x, решая уравнения:

$$-2=\frac{1}{x-1}, \quad 1=\frac{1}{x-1};$$

отсюда $x=1/2$ и $x=2$.

Следовательно, сложная функция терпит разрыв в трех точках: $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=2$. Выясним характер разрывов в этих точках.

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{u\to\infty} y=0,$$

поэтому $x_2=1$ — точка устранимого разрыва.

$$\lim_{x\to 1/2} y=\lim_{u\to -2} y=\infty; \quad \lim_{x\to 2} y=\lim_{u\to 1} y=\infty;$$

следовательно, точки $x_1=1/2$, $x_3=2$ — точки разрыва второго рода.

1.15.4. Дана функция $f(x)=1/(1-x)$. Найти точки разрыва сложной функции

$$y=f\{f[f(x)]\}.$$

Решение. Точка $x=1$ есть точка разрыва функции

$$v=f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Если $x\neq 1$, то

$$u=f[f(x)]=\frac{1}{1-1/(1-x)}=\frac{x-1}{x}.$$

Следовательно, точка $x=0$ есть точка разрыва функции $u=f[f(x)]$.

Если $x\neq 0$, $x\neq 1$, то

$$y=f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-(x-1)/x}=x$$

непрерывна везде.

Таким образом, для этой сложной функции точки разрыва суть $x=0$, $x=1$, причем эти разрывы — устранимые.

§ 1.16. Свойства функции, непрерывной на отрезке. Непрерывность обратной функции

I. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ ограничена на $[a, b]$;

2) $f(x)$ имеет на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения;

3) Если $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, то для всякого A, удовлетворяющего неравенствам $m\leqslant A\leqslant M$, существует точка $x_0\in[a, b]$, для которой $f(x_0)=A$.

В частности, если $f(a)\cdot f(b)<0$, то найдется такая точка c $(a<c<b)$, что $f(c)=0$.

II. Непрерывность обратной функции. Если функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна в строгом смысле на промежутке X, то существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, определенная, непрерывная и строго монотонная (в том же смысле) на промежутке изменения функции $y=f(x)$.