уравнения:

$$-2=\frac{1}{x-1}, \quad 1=\frac{1}{x-1};$$

отсюда $x=1/2$ и $x=2$.

Следовательно, сложная функция терпит разрыв в трех точках: $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=2$. Выясним характер разрывов в этих точках.

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{u\to\infty} y=0,$$

поэтому $x_2=1$ — точка устранимого разрыва.

$$\lim_{x\to 1/2} y=\lim_{u\to -2} y=\infty; \quad \lim_{x\to 2} y=\lim_{u\to 1} y=\infty;$$

следовательно, точки $x_1=1/2$, $x_3=2$ — точки разрыва второго рода.

1.15.4. Дана функция $f(x)=1/(1-x)$. Найти точки разрыва сложной функции

$$y=f\{f[f(x)]\}.$$

Решение. Точка $x=1$ есть точка разрыва функции

$$v=f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Если $x\neq 1$, то

$$u=f[f(x)]=\frac{1}{1-1/(1-x)}=\frac{x-1}{x}.$$

Следовательно, точка $x=0$ есть точка разрыва функции $u=f[f(x)]$.

Если $x\neq 0$, $x\neq 1$, то

$$y=f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-(x-1)/x}=x$$

непрерывна везде.

Таким образом, для этой сложной функции точки разрыва суть $x=0$, $x=1$, причем эти разрывы — устранимые.

§ 1.16. Свойства функции, непрерывной на отрезке. Непрерывность обратной функции

I. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ ограничена на $[a, b]$;

2) $f(x)$ имеет на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения;

3) Если $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, то для всякого A, удовлетворяющего неравенствам $m\leqslant A\leqslant M$, существует точка $x_0\in[a, b]$, для которой $f(x_0)=A$.

В частности, если $f(a)\cdot f(b)<0$, то найдется такая точка c $(a<c<b)$, что $f(c)=0$.

II. Непрерывность обратной функции. Если функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна в строгом смысле на промежутке X, то существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, определенная, непрерывная и строго монотонная (в том же смысле) на промежутке изменения функции $y=f(x)$.

1.16.1. Имеет ли корень уравнение

$$\sin x - x + 1 = 0?$$

Решение. Функция

$$f(x) = \sin x - x + 1$$

непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, эта функция меняет знак, так как $f(0) = 1$, а $f(3\pi/2) = -3\pi/2$. Следовательно, по свойству 3) внутри отрезка $[0, 3\pi/2]$ имеется по крайней мере один корень данного уравнения.

1.16.2. Имеет ли уравнение $x^5 - 18x + 2 = 0$ корни, принадлежащие отрезку $[-1, 1]$?

1.16.3. Доказать, что всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0 \tag{*}$$

имеет по крайней мере один действительный корень.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1},$$

которая непрерывна на всей числовой оси.

Пусть, для определенности, $a_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{а} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Следовательно, найдутся числа a, b, $a < b$, такие, что $f(a) < 0$; $f(b) > 0$. По свойству 3) между a и b существует такое число c, что $f(c) = 0$. Тем самым доказано, что уравнение (*) имеет по крайней мере один действительный корень.

1.16.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число корней. Расположим их в порядке возрастания

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < b.$$

Доказать, что в каждом из промежутков

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_n, b)$$

функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Решение. Если бы на каком-нибудь промежутке функция меняла знак, то внутри него нашелся бы еще один корень функции, что противоречит условию. Для определения знака функции на любом из указанных промежутков достаточно вычислить значение функции в какой-либо одной точке соответствующего интервала.

1.16.5. Дана функция на отрезке $[-2, +2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{если } -2 \leqslant x < 0, \\ -(x^2 + 2), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Существует ли на этом отрезке точка, в которой $f(x) = 0$?

Решение. На концах отрезка $[-2, +2]$ заданная функция имеет различные знаки:

$$f(-2) = +6; \quad f(+2) = -6.$$

Однако легко заметить, что она не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[-2, +2]$. Действительно, $x^2+2>0$ и $-(x^2+2)<0$ при любом x; это объясняется тем, что $f(x)$ терпит разрыв в точке $x=0$.

1.16.6. Принимает ли функция

$$f(x) = x^3/4 - \sin \pi x + 3$$

значение $2\frac{1}{3}$ внутри отрезка $[-2, 2]$?

Решение. Функция $f(x) = x^3/4 - \sin \pi x + 3$ непрерывна на отрезке $[-2, 2]$. Кроме того, на концах этого отрезка она принимает значения

$$f(-2) = 1; \qquad f(2) = 5.$$

Так как $1 < 2\frac{1}{3} < 5$, то по свойству 3) внутри отрезка $[-2, 2]$ существует хотя бы одна точка x такая, что $f(x) = 2\frac{1}{3}$.

1.16.7. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 2^x, & x = 0, \\ 2^x - 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

определенная и ограниченная на отрезке $[-1, 1]$, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Решение. На промежутке $[-1, 0)$ функция возрастает от $^3/_2$ до 2, на промежутке $(0, 1]$ функция возрастает от 0 до 1; при этом функция не принимает ни значения 2, ни значения 0. Поэтому функция ограничена, но не достигает своих верхней и нижней граней. Причина кроется в наличии разрыва в точке $x=0$.

1.16.8. Показать, что функция $f(x) = x - E(x)$ на любом отрезке $[a, b]$ длины бóльшей, чем 1, достигает своего наименьшего значения, но не достигает наибольшего значения.

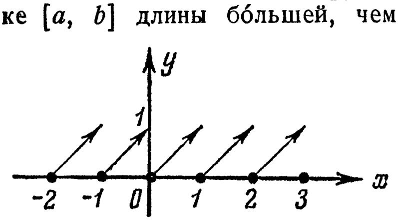

Рис. 32.

Решение. Заданная функция $f(x)$ на любом промежутке $[n, n+1)$, где n — целое число, возрастает от 0 до 1, не принимая значения 1. Следовательно, $0 \leqslant f(x) < 1$ для любых x. Поскольку на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одна внутренняя целочисленная точка n, то $f(n) = 0$ и $\lim\limits_{x \to n-0} f(x) = 1$, однако $f(x) \neq 1$ для любого x. Значит, функция достигает своего наименьшего значения и не достигает своего наибольшего значения. Причина кроется в наличии разрыва в точке $x=n$ (рис. 32).

1.16.9. Доказать, что функция $y=\sqrt[2n+1]{x}$ (n — натуральное число) непрерывна на всей числовой оси, рассматривая ее, как функцию, обратную к $y=x^{2n+1}$.

Решение. Функция $y=x^{2n+1}$ непрерывна и возрастает от $-\infty$ до ∞ на всей числовой оси. Следовательно, для всех y определена, непрерывна и возрастает обратная функция $x=\sqrt[2n+1]{y}$. Обозначая независимую переменную снова через x, получим, что функция $y=\sqrt[2n+1]{x}$ обладает требуемыми свойствами.

1.16.10. Доказать, что для всякой функции вида

$$y=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-3}+\ldots+a_nx+a_{n+1}, \qquad (*)$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} — положительные числа, существует обратная функция, возрастающая и непрерывная на всей числовой оси.

Решение. Известно, что функции x, x^3, x^5, ..., x^{2n+1} возрастают на всей числовой оси. Далее, так как коэффициенты a_i ($i=0, 1, \ldots, n+1$) положительны, то и $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+$ $+\ldots+a_nx+a_{n+1}$ также возрастает. Кроме того, она непрерывна. Поэтому для функции вида (*) существует обратная функция, возрастающая и непрерывная на всей числовой оси.

Замечание. В последнем примере устанавливается лишь существование обратной функции $x=g(y)$, но ее аналитическое выражение не дается и это не всегда возможно осуществить в радикалах. Вопросы о существовании обратной функции и о нахождении ее аналитического выражения не равнозначны.

1.16.11. Доказать, что существует единственная непрерывная функция $x=x(y)$ $(-\infty<y<\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*:

$$x-\varepsilon\sin x=y \qquad (0<\varepsilon<1).$$

Решение. Покажем, что $y(x)$ — возрастающая функция. Пусть $x_1<x_2$ — произвольные точки числовой оси. Тогда

$$y(x_2)-y(x_1)=(x_2-\varepsilon\sin x_2)-(x_1-\varepsilon\sin x_1)=$$
$$=(x_2-x_1)-\varepsilon(\sin x_2-\sin x_1).$$

Оценим абсолютную величину разности $|\sin x_2-\sin x_1|$:

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{x}\right|\leqslant 2\frac{|x_2-x_1|}{2}=|x_2-x_1|=(x_2-x_1).$$

Так как $0<\varepsilon<1$, то

$$\varepsilon|\sin x_2-\sin x_1|<(x_2-x_1),$$

откуда

$$(x_2-x_1)-\varepsilon(\sin x_2-\sin x_1)=y(x_2)-y(x_1)>0.$$

Так как $y(x)$ — непрерывная функция в промежутке $(-\infty, \infty)$, то обратная функция x является однозначной и непрерывной функцией от y.

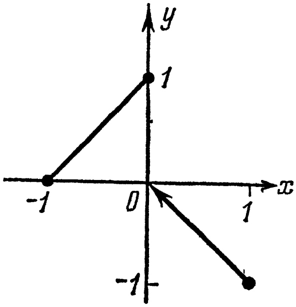

Рис. 33.

1.16.12. Показать, что уравнение

$$x^3-3x+1=0$$

имеет на отрезке $[1, 2]$ один корень. Вычислить приближенно этот корень с точностью до 0,01.

1.16.13. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка имеет значения одного знака. Можно ли утверждать, что на $[a, b]$ нет такой точки, в которой функция обращается в нуль?

1.16.14. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ -x & \text{при } \quad 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$ и тем не менее имеет на $[-1, 1]$ как наибольшее, так и наименьшее значения (рис. 33).

§ 1.17. Дополнительные задачи

1.17.1. Доказать неравенства:

а) $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для натурального $n>1$;

б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.17.2. Доказать неравенства:

а) $202^{303}>303^{202}$;

б) $200!<100^{200}$.

1.17.3. Решить неравенства:

а) $||x|-2|\leqslant 1$; б) $||2-3x|-1|>2$; в) $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$.

1.17.4. Может ли сумма, разность, произведение и частное иррациональных чисел быть числом рациональным?

1.17.5. Существуют ли корни уравнений

а) $|\sin x|=\sin x+3$, б) $|\operatorname{tg} x|=\operatorname{tg} x+3$?

1.17.6. Доказать тождество $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

1.17.7. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного знака, причем $1+x_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

1.17.8. Найти области определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=\sqrt{-\sin^2 \pi x}$;