Так как $y(x)$ — непрерывная функция в промежутке $(-\infty, \infty)$, то обратная функция x является однозначной и непрерывной функцией от y.

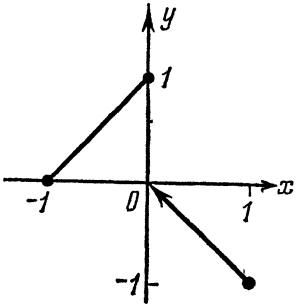

Рис. 33.

1.16.12. Показать, что уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

имеет на отрезке $[1, 2]$ один корень. Вычислить приближенно этот корень с точностью до 0,01.

1.16.13. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка имеет значения одного знака. Можно ли утверждать, что на $[a, b]$ нет такой точки, в которой функция обращается в нуль?

1.16.14. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x & \text{при } \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$ и тем не менее имеет на $[-1, 1]$ как наибольшее, так и наименьшее значения (рис. 33).

§ 1.17. Дополнительные задачи

1.17.1. Доказать неравенства:

а) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для натурального $n > 1$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.17.2. Доказать неравенства:

а) $202^{303} > 303^{202}$;

б) $200! < 100^{200}$.

1.17.3. Решить неравенства:

а) $||x|-2| \leqslant 1$; б) $||2-3x|-1| > 2$; в) $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$.

1.17.4. Может ли сумма, разность, произведение и частное иррациональных чисел быть числом рациональным?

1.17.5. Существуют ли корни уравнений

а) $|\sin x| = \sin x + 3$, б) $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 3$?

1.17.6. Доказать тождество $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$.

1.17.7. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного знака, причем $1 + x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1.17.8. Найти области определения функций:

а) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$; б) $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

в) $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ и $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

д) $f(x)=\arcsin(|x|-3)$; е) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{\sin x}$.

1.17.9. Тождественны ли функции

а) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ и $\varphi(x)\equiv 1$;

б) $f(x)=\lg x^2$ и $\varphi(x)=2\lg x$;

в) $f(x)=x$ и $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$;

г) $f(x)\equiv 1$ и $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

д) $f(x)=\lg(x-1)+\lg(x-2)$ и $\varphi(x)=\lg(x-1)(x-2)$?

1.17.10. В каком промежутке тождественны функции:

а) $f(x)=x$ и $\varphi(x)=10^{\lg x}$;

б) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ и $\varphi(x)=\sqrt{x(x-1)}$?

1.17.11. Равнобедренный треугольник данного периметра $2p=12$ вращается вокруг основания. Составить функцию, выражающую зависимость объема V тела вращения от боковой стороны x треугольника.

1.17.12. Исследуя область определения функций,

а) решить неравенство

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{5-x};$$

б) доказать, что неравенство

$$\log_{2-x}(x-3)\geqslant -5$$

не имеет решений.

1.17.13. Функция $y=\operatorname{sign} x$ была определена в задаче **1.5.11**, о). Показать, что

а) $|x|=x\operatorname{sign} x$; б) $x=|x|\operatorname{sign} x$;

в) $\operatorname{sign}(\operatorname{sign} x)=\operatorname{sign} x$.

1.17.14. Доказать, что если для линейной функции

$$f(x)=ax+b$$

значения аргумента $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции

$$y_n=f(x_n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

образуют также арифметическую прогрессию.

1.17.15. Доказать, что произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

1.17.16. Доказать, что если область определения функции $f(x)$ симметрична относительно $x=0$, то $f(x)+f(-x)$ — четная функция, а $f(x)-f(-x)$ — нечетная функция.

1.17.17. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном промежутке $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций. Представить в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

а) $f(x)=\dfrac{x+2}{1+x^2}$; б) $y=a^x$.

1.17.18. Функцию $f(x)=x^2+x$, заданную на отрезке $[0, 3]$, продолжить четным и нечетным образом на отрезок $[-3, 3]$.

1.17.19. Функция $\{x\}=x-E(x)$ — дробная часть числа x. Доказать, что эта функция — периодическая с периодом 1.

1.17.20. Построить график периодической функции с периодом $T=1$, которая на полуоткрытом интервале $(0, 1]$ задана формулой $y=x^2$.

1.17.21. Пусть имеем две периодические функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, определенные на общем множестве. Доказать, что если периоды этих функций соизмеримы, то их сумма и произведение также являются периодическими функциями.

1.17.22. Доказать, что функция Дирихле $\lambda(x)$ (см. **1.14.4**, б) периодическая, но периода не имеет.

1.17.23. Доказать, что если функция

$$f(x)=\sin x+\cos ax$$

периодическая, то a — рациональное число.

1.17.24. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=|x|$; б) $f(x)=|x|-x$.

1.17.25. Доказать, что сумма двух функций, возрастающих в некотором интервале, есть функция монотонно возрастающая в этом интервале. Будет ли разность возрастающих функций монотонной функцией?

1.17.26. Привести пример немонотонной функции, имеющей обратную функцию.

1.17.27. Определить обратную функцию $x=g(y)$ и ее область определения, если:

а) $y=\operatorname{th} x$; б) $y=\begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < \infty. \end{cases}$

1.17.28. Показать, что уравнение $x^2+2x+1=-1+\sqrt{x}$ не имеет действительных корней.

1.17.29. Построить график функции

$$y=f(x-l)+f(x+l),$$

где

$$f(x)=\begin{cases} k(1-|x|/l) & \text{при } |x| \leqslant l, \\ 0 & \text{при } |x| > l. \end{cases}$$

1.17.30. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций:

а) $y=f^2(x)$; б) $y=\sqrt{f(x)}$; в) $y=f[f(x)]$.

1.17.31. Доказать, что графики функций $y=\log_a x$ и $y=\log_{a^n} x$ получаются один из другого изменением всех ординат в отношении $1:1/n$.

1.17.32. Доказать, что если график функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой оси, симметричен относительно двух вертикальных осей $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, то эта функция периодическая.

1.17.33. Пусть последовательность x_n сходится, а последовательность y_n расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей: а) x_n+y_n; б) x_ny_n?

1.17.34. Пусть последовательности x_n и y_n расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности x_n+y_n, x_ny_n также расходятся?

1.17.35. Пусть α_n есть внутренний угол правильного n-угольника ($n=3, 4, \ldots$). Написать несколько первых членов последовательности α_n. Доказать, что $\lim \alpha_n=\pi$.

1.17.36. Доказать, что из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=|a|$. Верно ли обратное утверждение?

1.17.37. Если последовательность имеет бесконечный предел, значит ли, что эта последовательность неограниченная? А если последовательность неограниченная, значит ли, что она имеет бесконечный предел? Доказать, что $x_n=n^{(-1)^n}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

1.17.38. Доказать, что последовательность $\{\alpha_n\}$, где α_n есть n-я цифра произвольно выбранного иррационального числа, не может быть монотонной.

1.17.39. Доказать, что если последовательность $\{a_n/b_n\}$ $(b_n > 0)$ монотонна, то монотонной будет также последовательность

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right\}.$$

1.17.40. Доказать существование предела последовательности и найти его.

а) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ \ldots;$ б) $x_n = c^n/\sqrt[k]{n!}$ $\quad (c > 0,\ \ k > 0);$

в) $x_n = \alpha_n/n$, где α_n есть n-я цифра числа π.

1.17.41. Доказать, что при произвольно выбранном x последовательность $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ ограничена.

1.17.42. Доказать, что последовательность

$$\left\{\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}\right\}$$

имеет предел $x/2$.

1.17.43. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1 \qquad (a > 0).$$

1.17.44. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

1.17.45. Пусть

$$P(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} \qquad (a_0 \neq 0;\quad b_0 \neq 0).$$

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ a_0/b_0, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

1.17.46. Найти постоянные a и b из условия:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0;$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) = 0.$

1.17.47. Построить графики функций:

а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $\quad (x \geqslant 0);$ $\qquad$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x.$

1.17.48. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\right] = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1).$$

1.17.49. Можно ли при вычислении предела заменять бесконечно малые слагаемые эквивалентными бесконечно малыми?

1.17.50. Определить порядок малости хорды бесконечно малой дуги окружности относительно стрелки той же дуги.

1.17.51. Определить порядок малости разности периметров вписанного и описанного правильных n-угольников относительно бесконечно малой стороны вписанного многоугольника.

1.17.52. Коэффициент объемного расширения тела принимается приближенно равным утроенному коэффициенту линейного расширения. На эквивалентности каких бесконечно малых это основано?

1.17.53. Верно ли соотношение

$$\lg(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \longrightarrow 0?$$

1.17.54. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x)+g(x)$, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x=x_0$,

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Привести соответствующие примеры.

1.17.55. Обязательно ли произведение двух функций $f(x)\,g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в этой точке;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$?

Привести соответствующие примеры.

1.17.56. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция? Привести пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

1.17.57. Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$; б) $f(x)=2^{-2^{1/(1-x)}}$;

в) $\varphi(x)=x[1-2\lambda(x)]$, где $\lambda(x)$ — функция Дирихле (см. **1.14.4**, б)).

1.17.58. Исследовать на непрерывность и нарисовать графики следующих функций:

а) $y=x-E(x)$; б) $y=x^2+E(x^2)$;

в) $y=(-1)^{E(x^2)}$; г) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

1.17.59. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если $f(x)=\operatorname{sign} x$ и $g(x)=x(1-x^2)$.

1.17.60. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1/2 & \text{при } \quad 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

разрывна в точке $x=0$ и тем не менее имеет на $[-1, 1]$ как наибольшее, так и наименьшее значения.

1.17.61. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)\,2^{-(1/|x|+1/x)}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } \quad x=0.\end{cases}$$

Убедиться в том, что на отрезке $[-2, 2]$ она принимает все промежуточные значения от $f(-2)$ до $f(2)$, хотя она и разрывна (в какой точке?).

1.17.62. Доказать, что если функция $f(x)$: 1) определена и монотонна на отрезке $[a, b]$; 2) пробегает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, то она непрерывна на отрезке $[a, b]$.

1.17.63. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем ее область изменения — тот же отрезок $a\leqslant y\leqslant b$. Доказать, что на этом отрезке существует, по крайней мере, одна такая точка x, для которой $f(x)=x$. Пояснить геометрически.

1.17.64. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется число ξ такое, что

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)].$$

1.17.65. Доказать, что уравнение $x2^x=1$ имеет по меньшей мере один положительный корень, меньший 1.

1.17.66. Доказать, что если многочлен четной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту при его старшем члене, то он имеет по меньшей мере два действительных корня.

1.17.67. Доказать, что функция, обратная разрывной функции $y=(1+x^2)\operatorname{sign} x$, есть функция непрерывная.