Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x>0, \\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x<0, \end{cases}$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку односторонние пределы различны, не существует производной. Следовательно, функция $y=|\ln x|$ в точке $x=1$ не дифференцируема (рис. 35).

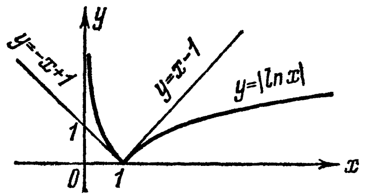

Рис. 35.

2.1.5. Определить среднюю скорость движения, заданного формулой

$$s=(t^2-5t+2)\ м$$

от $t_1=5$ *сек* до $t_2=15$ *сек*.

2.1.6. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y=x^3$; б) $y=1/x^2$.

2.1.7. Исследовать дифференцируемость функции $y=|\cos x|$ в точках $x=\pi/2+n\pi$ (n — целое).

§ 2.2. Дифференцирование явно заданных функций

I. Основные правила дифференцирования

1) $c'=0$; 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 3) $(cu)'=cu'$;

4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

Здесь $c=\text{const}$, а u и v — функции от x, имеющие производные в соответствующей точке.

6) Если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y'_x(x_0)=y'_u(u_0)\,u'_x(x_0)$.

II. Дифференцирование основных элементарных функций

1) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$; 3) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

4) $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$; 5) $(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 6) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$;

7) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$; 8) $(e^u)'=e^u u'$; 9) $(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u\cdot u'$;

10) $(\operatorname{ch} u)'=\operatorname{sh} u\cdot u'$; 11) $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=-(\arccos u)'$;

12) $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}=-(\operatorname{arcctg} u)'$.

2.2.1. Найти y', если:

а) $y=5x^{2/3}-3x^{5/2}+2x^{-3}$;

б) $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ (a, b — постоянные).

Решение. а) $y'=5\cdot\frac{2}{3}x^{2/3-1}-3\cdot\frac{5}{2}x^{5/2-1}-2\cdot 3x^{-3-1}=$

$$=\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{15}{2}x\sqrt{x}-\frac{6}{x^4}.$$

2.2.2. Найти y', если:

а) $y=3\cos x+2\sin x$; б) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

в) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} x$; г) $y=x^3\arcsin x$.

Решение. а) $y'=3(\cos x)'+2(\sin x)'=-3\sin x+2\cos x$;

б) $y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=-\frac{2}{(\sin x-\cos x)^2};$$

г) $y'=(x^3)'\arcsin x+(\arcsin x)'x^3=3x^2\arcsin x+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.2.3. Найти производную данной функции и затем вычислить частное значение производной при указанном значении аргумента:

а) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+16/x$ при $x=-8$;

б) $f(x)=(1-\sqrt{x})^2/x$ при $x=0,01$;

в) $f(t)=(\cos t)/(1-\sin t)$ при $t=\pi/6$.

Решение. а) $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3}-16x^{-2}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{16}{x^2}$.

Полагая $x=-8$, найдем

$$f'(-8)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}-\frac{16}{(-8)^2}=\frac{1}{12};$$

в) $f'(t)=\frac{-\sin t(1-\sin t)+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\frac{1}{1-\sin t}$.

Отсюда $f'(\pi/6)=2$.

2.2.4. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y=2x^3+3x-5$; б) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0,1x^{10}$;

в) $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$; г) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$;

д) $y=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$; е) $y=2e^x+\ln x$;

ж) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; з) $y=\frac{e^x+\sin x}{xe^x}$.

2.2.5. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные следующих функций:

а) $y=\sin^3 x$; б) $y=\ln \operatorname{tg} x$; в) $y=5^{\cos x}$;

г) $y=\ln\sin(x^3+1)$; д) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

е) $y=\ln^5(\operatorname{tg} 3x)$; ж) $y=\sin^2\sqrt{1/(1-x)}$.

Решение. а) Внешней функцией здесь служит степенна́я функция: $\sin x$ возводится в третью степень. Дифференцируя эту степенну́ю функцию по промежуточному аргументу ($\sin x$), получим

$$(\sin^3 x)'_{\sin x}=3\sin^2 x;$$

но промежуточный аргумент $\sin x$ — функция независимой переменной x; поэтому надо полученный результат помножить на производную от $\sin x$ по независимой переменной x. Таким образом, получим

$$y'_x=(\sin^3 x)'_{\sin x}(\sin x)'_x=3\sin^2 x\cos x;$$

б) $y'_x=(\ln\operatorname{tg} x)'_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)'_x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin 2x}$;

в) $y'_x=(5^{\cos x})'_{\cos x}(\cos x)'_x=5^{\cos x}\ln 5(-\sin x)=-5^{\cos x}\sin x\ln 5$;

г) $y'_x=[\ln\sin(x^3+1)]'_{\sin(x^3+1)}[\sin(x^3+1)]'_{x^3+1}[x^3+1]'_x=$

$$=\frac{1}{\sin(x^3+1)}\cdot\cos(x^3+1)\cdot 3x^2=3x^2\operatorname{ctg}(x^3+1);$$

д) $y'_x=(\arcsin\sqrt{1-x^2})'_{\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1-x^2})'_{1-x^2}(1-x^2)'_x=$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\qquad(x\neq 0).$$

Замечание. Разумеется, нет никакой необходимости в таких излишне подробных записях. Результат следует писать сразу, представляя последовательно в уме промежуточные аргументы.

2.2.6. Найти производные следующих функций:

а) $y=(1+3x+5x^2)^4$; б) $y=(3-\sin x)^3$;

в) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+1/\cos^2 x$; г) $y=\sqrt[3]{2e^x+2^x+1}+\ln^5 x$;

д) $y=\sin 3x+\cos(x/5)+\operatorname{tg}\sqrt{x}$; е) $y=\sin(x^2-5x+1)+\operatorname{tg}(a/x)$;

ж) $y=\arccos\sqrt{x}$; з) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$;

и) $y=\ln^2\operatorname{arctg}(x/3)$; к) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Решение. а) $y'=4(1+3x+5x^2)^3(1+3x+5x^2)'=$

$$=4(1+3x+5x^2)^3(3+10x);$$

ж) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$;

к) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

2.2.7. Найти производную функции

$$y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2(1+x^2)}} =$$
$$= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},$$

т. е.

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{при } |x|<1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$$

При $|x|=1$ производной не существует.

2.2.8. Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{sh} 5x \operatorname{ch}(x/3)$; б) $y = \operatorname{cth}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{th}(\operatorname{ctg} x)$;

в) $y = \arccos(\operatorname{th} x) + \operatorname{sh}(\sin 6x)$;

г) $y = \operatorname{sh}^2 x^3 + \operatorname{ch}^3 x^2$; д) $y = \frac{e^{\operatorname{sh} ax}}{\operatorname{sh} bx - \operatorname{ch} bx}$.

Решение.

а) $y' = (\operatorname{sh} 5x)' \operatorname{ch}\frac{x}{3} + \operatorname{sh} 5x\left(\operatorname{ch}\frac{x}{3}\right)' = 5\operatorname{ch} 5x \operatorname{ch}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{sh} 5x \operatorname{sh}\frac{x}{3}$;

в) $y' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} + \operatorname{ch}(\sin 6x)(\sin 6x)' =$

$= -\frac{1/\operatorname{ch}^2 x}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)/\operatorname{ch}^2 x}} + 6\cos 6x \operatorname{ch}(\sin 6x) =$

$= -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + 6\cos 6x \operatorname{ch}(\sin 6x)$.

2.2.9. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$; б) $y = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x \cos^2 x$; г) $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^{x+1}$.

Решение. а) Применим метод логарифмического дифференцирования. Вместо y рассмотрим функцию

$$z=\ln|y|=\ln\sqrt[3]{\frac{|x^3|(x^2+1)}{\sqrt[5]{|5-x|}}}=$$
$$=\ln|x|+\frac{1}{3}\ln(x^2+1)-\frac{1}{15}\ln|5-x|.$$

Учитывая, что $(\ln|u|)'=u'/u$, будем иметь

$$z'=\frac{1}{x}+\frac{2x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{15(5-x)}=\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

Но $z'=(\ln|y|)'=y'/y$, откуда

$$y'=yz'=\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\,\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

б) Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в данной области определения производные. Тогда функция

$$z=\ln y=v\ln u$$

также имеет в этой области производную, причем

$$z'=(v\ln u)'=v'\ln u+v\frac{u'}{u}.$$

Следовательно, и функция

$$y=e^{\ln y}=e^{z}$$

имеет производную в указанной области, причем

$$y'=e^{z}z'=yz'.$$

Таким образом,

$$y'=u^{v}\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)=vu^{v-1}u'+u^{v}\ln u\cdot v'.$$

2.2.10. Показать, что функция $y=xe^{-x^2/2}$ удовлетворяет уравнению

$$xy'=(1-x^2)y.$$

Решение.

$$y'=e^{-x^2/2}-x^2e^{-x^2/2}=e^{-x^2/2}(1-x^2);$$
$$xy'=xe^{-x^2/2}(1-x^2).$$

Следовательно,

$$xy'=y(1-x^2).$$

2.2.11. Показать, что функция $y=xe^{-x}$ удовлетворяет уравнению $xy'=(1-x)y$.

2.2.12. Исследовать дифференцируемость функций:

а) $y=\arcsin(\cos x)$; б) $y=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. а) $y' = \frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|}$.

Следовательно, $y' = -1$ в точках, где $\sin x > 0$; $y' = 1$ в точках, где $\sin x < 0$. В тех точках, где $\sin x = 0$, т. е. в точках $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функция не дифференцируема, хотя она в этих точках непрерывна.

б) Область определения этой функции — отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) \quad \text{при} \quad x \neq 0 \text{ и } x \neq \pm 1.$$

При $x \to 1-0$ или $x \to -1+0$ имеем $y' \to +\infty$. Выясним существование производной y' в точке $x = 0$, т. е. существование предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\Delta x^2}}}{\Delta x}.$$

Так как $\sqrt{1-\Delta x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}\Delta x^2$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\Delta x^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\Delta x^2}}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{при } \Delta x \to +0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{при } \Delta x \to -0. \end{cases}$$

Таким образом, $y'_-(0) \neq y'_+(0)$, значит, рассматриваемая функция не имеет производной в точке $x = 0$, хотя она в этой точке и непрерывна.

Замечание. Можно указать примеры, когда функция в данной точке не имеет ни производной в обычном смысле, ни односторонних производных, т. е. когда график функции в данной точке не имеет ни правосторонней, ни левосторонней касательной. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$ непрерывна, но не имеет даже односторонних производных, так как $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$.

2.2.13. Найти производные следующих функций:

а) $f(x) = \operatorname{sh}(x/2) + \operatorname{ch}(x/2)$;

б) $f(x) = \ln[\operatorname{ch} x]$; в) $f(x) = 2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$;

г) $f(x) = \arcsin[\operatorname{th} x]$; д) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x}$;

е) $f(x) = e^{ax}(\operatorname{ch} bx + \operatorname{sh} bx)$.

2.2.14. Пользуясь логарифмическим дифференцированием, найти производные функции:

а) $y = (\cos x)^{\sin x}$; б) $y = \sqrt[3]{\frac{\sin 3x}{1-\sin 3x}}$; в) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

2.2.15.

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x};$$

показать, что

$$f(\pi/4)-3f'(\pi/4)=3.$$

2.2.16. Показать, что функция

$$y=\frac{x-e^{-x^2}}{2x^2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'+2y=e^{-x^2}.$$

2.2.17. Найти производные следующих функций:

а) $y=\ln\cos\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}$ $\quad (x>0)$;

б) $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$.

§ 2.3. Повторное дифференцирование явно заданных функций. Формула Лейбница

Если производная $(n-1)$-го порядка функции $y=f(x)$ уже определена, то производная n-го порядка определяется равенством

$$y^{(n)}(x)=[y^{(n-1)}(x)]'.$$

В частности, $y''(x)=[y'(x)]'$, $y'''(x)=[y''(x)]'$ и т. д.

Если u и v суть n раз дифференцируемые функции, то для их линейной комбинации c_1u+c_2v (c_1, c_2 — постоянные) имеет место формула

$$(c_1u+c_2v)^{(n)}=c_1u^{(n)}+c_2v^{(n)},$$

а для их произведения uv — формула Лейбница

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$ и $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Имеют место следующие формулы:

1) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

2) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$ $(a>0)$. В частности, $(e^x)^{(n)}=e^x$.

3) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

4) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$.

5) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$.