2.2.15.

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x};$$

показать, что

$$f(\pi/4)-3f'(\pi/4)=3.$$

2.2.16. Показать, что функция

$$y=\frac{x-e^{-x^2}}{2x^2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'+2y=e^{-x^2}.$$

2.2.17. Найти производные следующих функций:

а) $y=\ln\cos\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}\qquad(x>0)$;

б) $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$.

§ 2.3. Повторное дифференцирование явно заданных функций. Формула Лейбница

Если производная $(n-1)$-го порядка функции $y=f(x)$ уже определена, то производная n-го порядка определяется равенством

$$y^{(n)}(x)=[y^{(n-1)}(x)]'.$$

В частности, $y''(x)=[y'(x)]'$, $y'''(x)=[y''(x)]'$ и т. д.

Если u и v суть n раз дифференцируемые функции, то для их линейной комбинации c_1u+c_2v (c_1, c_2 — постоянные) имеет место формула

$$(c_1u+c_2v)^{(n)}=c_1u^{(n)}+c_2v^{(n)},$$

а для их произведения uv — формула Лейбница

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$ и $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты. Имеют место следующие формулы:

1) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$.

2) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\ (a>0)$. В частности, $(e^x)^{(n)}=e^x$.

3) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

4) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$.

5) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$.

2.3.1. Найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $y=\ln x$; б) $y=e^{kx}$;

в) $y=\sin x$; г) $y=\sin 5x\cos 2x$;

д) $y=\sin x\cos x$; е) $y=\sin 3x\cos^2 x$;

ж) $y=\ln(x^2+x-2)$.

Решение.

а) $y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$; $y''=(-1)x^{-2}$; $y'''=1\cdot 2x^{-3}$;

$y^{(4)}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}; \ldots; y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

в) $y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$;

$y''=\cos(x+\pi/2)=\sin(x+2\pi/2)$.

Вообще, если допустить, что для данного $n=k$

$$y^{(k)}=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

то окажется, что

$$y^{(k+1)}=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{2}+x\right].$$

Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что при любом натуральном n

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

г) $y=\sin 5x\cos 2x=\frac{1}{2}[\sin 7x+\sin 3x]$.

Поэтому

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[7^n\sin\left(7x+n\frac{\pi}{2}\right)+3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

ж) $y'=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

Для упрощения вычислений преобразуем полученную функцию:

$$y'=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=(x-1)^{-1}+(x+2)^{-1}.$$

Отсюда

$$y''=-1(x-1)^{-2}-1(x+2)^{-2};$$
$$y'''=1\cdot 2(x-1)^{-3}+1\cdot 2(x+2)^{-3};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x-1)^{-n}+(x+2)^{-n}\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}\right].$$

2.3.2. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; найти $y^{(n)}$.

Решение. Преобразуем выражение следующим образом:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}(cx+d)^{-1}.$$

Отсюда

$$y'=(-1)\frac{bc-ad}{c}c(cx+d)^{-2},$$

$$y''=(-1)(-2)\frac{bc-ad}{c}c^2(cx+d)^{-3},$$

$$y'''=(-1)(-2)(-3)\frac{bc-ad}{c}c^3(cx+d)^{-4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\frac{bc-ad}{c}c^n(cx+d)^{-(n+1)}=$$

$$=(-1)^n\frac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}(bc-ad).$$

2.3.3. $y=x/(x^2-1)$; найти $y^{(n)}$.

Решение. Преобразуем выражение

$$y=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right],$$

поэтому (см. **2.3.2**):

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

2.3.4. Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков для функций:

а) $y=x^2\sin x$; найти $y^{(25)}$;

б) $y=e^x(x^2-1)$; найти $y^{(24)}$;

в) $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$; найти $y^{(n)}$.

Решение. а) $y^{(25)}=(\sin x\cdot x^2)^{(25)}=$

$$=(\sin x)^{(25)}x^2+25(\sin x)^{(24)}(x^2)'+\frac{25\cdot 24}{2}(\sin x)^{(23)}(x^2)'',$$

так как следующие слагаемые равны нулю. Поэтому

$$y^{(25)}=x^2\sin\left(x+25\frac{\pi}{2}\right)+50x\sin\left(x+24\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+600\sin\left(x+23\frac{\pi}{2}\right)=(x^2-600)\cos x+50x\sin x.$$

2.3.5. Вычислить значение n-й производной функции $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$ в точке $x=0$.

Решение. По условию имеем $y(x)(x^2-2x+5)=3x+2$. Продифференцируем это тождество n раз, применяя формулу Лейбница; тогда (для $n\geqslant 2$) получим

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(x)(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0.$$

Положив $x=0$, получим

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0.$$

Отсюда

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Мы получили рекуррентную формулу для определения n-й производной в точке $x=0$ $(n\geqslant 2)$. Значения $y(0)$ и $y'(0)$ найдем непосредственно: $y(0)=2/5$;

$$y'(x)=\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2};\quad y'(0)=\frac{19}{25}.$$

Затем, последовательно полагая $n=2, 3, 4, \ldots$, с помощью рекуррентной формулы получим значения производных высших порядков. Например,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}.$$

2.3.6. Найти производные второго порядка следующих функций:

а) $y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $y=e^{-x^2}$.

2.3.7. Дана функция

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x.$$

Показать, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$y''-4y'+4y=e^x.$$

2.3.8. Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков для функций:

а) $y=x^3\sin x$; найти $y^{(20)}$;
б) $y=e^{-x}\sin x$; найти y''';
в) $y=e^x(3x^2-4)$; найти $y^{(n)}$;
г) $y=(1-x^2)\cos x$; найти $y^{(2n)}$.

2.3.9. Применяя разложение в линейную комбинацию более простых функций, найти производные 100-го порядка от функций

а) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; б) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

2.3.10. Показать, что функция

$$y=x^n[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]$$

(где c_1, c_2, n — постоянные) удовлетворяет уравнению

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

2.3.11. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную n-го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

§ 2.4. Дифференцирование обратных функций и функций, заданных неявно или параметрически

1. Производная обратной функции. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$, $a<x<b$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x=g(y)$ и $y'_x \neq 0$, то x'_y также существует и

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Для производной второго порядка имеем

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

2. Производная неявной функции. Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y)=0$, то надо продифференцировать его по x, рассматривая y как функцию от x, и решить полученное уравнение $\frac{d}{dx}F(x, y)=0$ относительно y'_x. Чтобы найти y''_{xx}, надо уравнение дважды продифференцировать по x, и т. д.

3. Производная функции, заданной параметрически. Если система уравнений

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad \alpha<t<\beta,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t)\neq 0$, определяет y как однозначную непрерывную функцию от x, то производная y'_x существует и

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производные высших порядков вычисляют последовательно:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad \text{и т. д.}$$

В частности, для производной второго порядка справедлива формула

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

2.4.1. Найти указанные производные:

а) $y=2x^3+3x^5+x$; найти x'_y;

б) $y=3x-(\cos x)/2$; найти x''_{yy};

в) $y=x+e^x$; найти x''_{yy}.

Решение. а) Имеем $y'_x = 6x^2+15x^4+1$, следовательно,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{6x^2+15x^4+1}.$$